DOS PROBLEMAS DE POTENCIACIÓN

Resolución a cargo de A. Rabino

PROBLEMA 1: POTENCIAS DE NÚMEROS QUE TERMINAN EN 5:

$5^2 = 25$
$15^2 = 225$
$25^2 = 625$
$35^2 = 1225$
$45^2 = 2025$

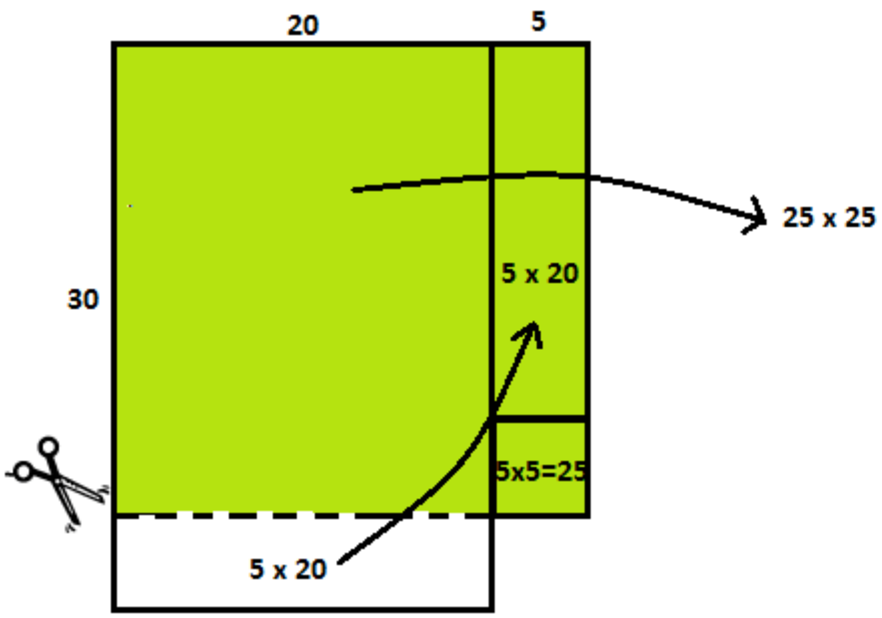
REGLA: Descarta el último dígito del número. Multiplica el número que te quedó por el número siguiente y agrega el resultado delante de 25. Por ejemplo, para el caso de 25^2, hacemos 2 x 3 = 6. Entonces la respuesta es 625. Usa el modelo de área para investigar por qué esta regla funciona y para construir una demostración visual de la misma.

Solución

$25^2 = 625$

2X3=6 y lo colocamos delante del 25 (o sea que ese 6 representa 6 centenas)

el 2 del 25 representa decenas, o sea que es 20. Para utilizar el modelo rectangular de área para representar una multiplicación, hacemos un rectángulo de 20x30:



El área pintada es $25^2 = 20 \times 30 + 25 = 600 + 25 = 625$

Probar con otras potencias de 5.

De otra forma:

$25^2 = 25 \times 25 = (20 + 5)\ (20 + 5) = 400 + 2 \times 20 \times 5 + 25 = (2 \times 2 \times 100) + (2 \times 100) + 25 = 2.100.\ \mathbf{3} + 25 = 625$

$35^2 = 35 \times 35 = (30 + 5)\ (30 + 5) = 900 + 2\times 30 \times 5 + 25 = 3 \times 3 \times 100 + 1 \times 300 + 25 = 3 \times 100 \times \mathbf{4} + 25$

En general:

$(a5)^2 = (10a + 5)\ (10a + 5) = 100.\ a\ .\ a + 2.\ 10a.\ 5 + 25 = 100.\ a.\ a + 100\ a + 25 = 100a\ \mathbf{(a + 1)} + 25$

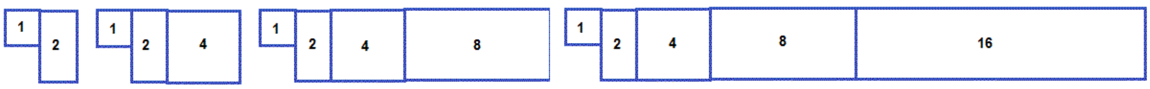
PROBLEMA 2: LAS POTENCIAS DE 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,…) tienen la siguiente propiedad: ***La suma de todos los elementos de esta secuencia para cualquier término es uno menos que el siguiente término.*** **Por ejemplo:**
1 + 2 = 3 = 4 – 1
1 + 2 + 4 = 7 = 8 – 1
1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 16 – 1
1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 32 – 1

Explica por qué sucede esto.

Solución:

Para demostrar esta propiedad se podría utilizar el método de Inducción Completa que sirve para demostrar propiedades de los números naturales (es el principio del "efecto dominó" pero no aparece en este nivel escolar)

Entonces vamos a utilizar otro recurso que es la demostración visual.
En el dibujo, se va duplicando el área al pasar de un rectángulo a otro. Tomando el área del primer cuadradito como unidad, esa área mide $1 = 2^0$, el área del segundo rectángulo es 2x1 = 2 =



2^1, el tercero es $2\times2 = 4 = 2^2$, el siguiente es $4\times2 = 8 = 2^3$ y así sucesivamente. Entonces el área de cada rectángulo es 2^n. Si se quiere calcular el área de todos los rectángulos hasta el 2^n, la suma de todos es:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$$

Comparando la sumatoria anterior con el área del dibujo, otra forma de expresión de la misma es igual a un rectángulo de $2 \times (2^0+2^1+ \ldots\ldots+2^{n-1})$ más un cuadradito de área 1.
Relacionando ambas expresiones se tiene:

$2^0+2^1+ \ldots+2^n = (2^0+2^1+ \ldots+2^{n-1}) \times 2 + 1 = (2^0+2^1+ \ldots+2^{n-1} + 2^n) \times 2 + 1 – 2^{n+1}$ (utilizando la estrategia de agregar dentro del paréntesis 2^n que, como está multiplicado por 2 fuera del paréntesis para compensar hay que restar $2^n\ .\ 2 = 2^{n+1}$)

Relacionando la 1º y 3º expresión y despejando queda: $2^{n+1} - 1 = [(2^0+2^1+ \ldots +2^{n-1} + 2^n) \times 2] – (2^0+2^1+ \ldots+2^n)$. Efectuando la resta en el segundo miembro de la igualdad se obtiene entonces que **$2^0+2^1+\ldots+2^n$ (suma de las potencias de 2) = 2^{n+1} – 1 (lo que queríamos demostrar)**