SISTEMAS Y BASES DE NUMERACIÓN[1]

Algunas propiedades numéricas en distintas bases

Ana María Porta de Bressan

1.- OBJETIVOS DE ESTE TRABAJO

En su libro 'La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria" (Teide, pag. 57 y ss») Zoltan Dienes expresa: "Para consolidar los fundamentos matemáticos de la numeración., es importante estimular los ejercicios, contar en todas las bases posibles. . * . .a través de estos ejercicios los niños deben familiarizarse con el hecho de que un mismo número puede estar simbolizado por una gran cantidad de figuras.....la forma en que esta propiedad está expresada (refiérase a la propiedad número de un conjunto) depende, entre otras causas de la forma en que se agrupen los elementos del conjunto".

"Todo el proceso de adquisición que acabamos de describir" -continua Dienes- "tiene por finalidad hacer capaces a los niños de insertar la notación decimal corriente en el esquema matemático más general y más extenso que es el agrupamiento en conjuntos medidos por medio de potencias de la misma base".

Motivados por el hincapié que hace este autor en la obra citada(y en general en todos los referidos al número y sus operaciones), en la necesidad de que los niños empleen la multiplicidad de bases para una correcta adquisición del concepto abstracto de numero y de sus posibles formas de simbolización de lo que es un sistema de numeración y del quehacer aritmético en general, nos planteamos las siguientes preguntas: ¿que entendemos por sistema de numeración?; ¿a que llamamos base del mismo?; ¿qué ocurrirá con ciertas propiedades que conocemos en base diez en otras bases?; ¿perdurarán tal cuál o tendrán una propiedad equivalente?.

Eso nos llevo a trabajar con el concepto de sistema y base de numera, cion3 movidos por lo cual investigamos los sistemas numéricos más primitivos y los de uso actual para finalmente detenernos a verificar, dentro de sistemas posicionales, el comportamiento de propiedades numéricas elementales en distintas bases, como la de que todo numero admite una descomposición polinónica unívoca en cada base dada; la referida al numeral de la base y sus potencias; las formas de reconocer las relaciones de igualdad y desigualdad entre numerales escritos en una misma base y en bases diferentes; el concepto de número primo; criterios de divisibilidad en distintas bases; números fraccionarios, fracciones equivalentes a las decimales, números periódicos y sus reglas de transformación a fracciones ordinarias en bases distintas»

2.- SISTEMAS DE NUMERACIÓN - EL CONCEPTO DE BASE

Una de las ideas fundamentales de la Matemática es la idea de número, que en su forma más simple pudo ocurrírsele a pueblos muy primitivos.

Sobre la iniciación del conocimiento matemático solo existen conjeturas pero la mayoría de los historiadores de esta ciencia coinciden que hubo en el hombre, desde épocas remotas un "cierto concepto de número" que posiblemente haya surgido de la observación de su persona y del medio que lo rodeaba y que una mente más privilegiada haya podido llevar a la categoría de lo abstracto cimentando así, el origen de la aritmética»

A este paso fundamental de la mente humana sigue otro tan importante como el anterior y es la invención de un sistema de numeración, que trae aparejada la posibilidad de contar.

Inmediatamente que nos introducimos en la Historia de la Matemática se estudian los pueblos en los comienzos de la civilización y una descripción de sus "sistemas numéricos" en tal o cual "base".

Y aquí encontramos nociones no muy claras. En general, todos admitimos que un <u>sistema</u> es un conjunto de reglas que esquematizan el trabajo con un cierto conjunto de símbolos (en este caso cifras).

"Llámese <u>sistema de numeración en matemática</u>, aquel conjunto de símbolos y reglas que nos permiten clasificar, enunciar y representar racional y ordenadamente los números". (Diccionario Enciclopédico Espasa-Calpe. Edic.1944)

Podemos considerar, entonces, tres aspectos dentro de un sistema:

- i) el conjunto de símbolos que intervienen en la gestación de los numerales,
- ii) las reglas que permiten clasificarlo en aditivo, sustractivo, multiplicativo, posicional o mixto.
- iii) las reglas que permiten clasificarlo en binario, ternario,…. decimal, sexagesimal, etc.

En cuanto a lo primero., los símbolos utilizados para la escritura de los números varían en cantidad y complejidad de trazados como nos lo muestra la historia de la numeración. A pesar de que la cantidad de símbolos utilizables puede ser infinita pues cada número puede identificarse con un carácter determinado, la imposibilidad de memorizar este sistema hizo que pronto se recurriera a un conjunto de símbolos básicos, que combinándose algebraicamen-

[1] Cuadernos Universitarios, Universidad Nacional del Comahue, 1976

te permitían la escritura de cualquier número. Según la operación u operaciones intervinientes los sistemas quedan clasificados en aditivos, sustractivos, multiplicativos, posicionales o mixtos, Y entramos así en el 2°) punto.

Considérense como sistemas aditivos (sustractivos) aquellos que descomponen al número en suma (diferencia) de otros varios, cada uno representado por un símbolo especial, de modo que el valor absoluto del numero se obtiene por la suma (diferencia) de los valores absolutos de 1 o s símbolos componentes.

Un sistema será multiplicativo si el valor absoluto del número se obtiene por la multiplicación sucesiva de cada cifra componente por uno o varios valores dados. Este sistema no se da en forma pura (no podrían representarse en el los números primos ya que no son múltiplos más que del 1 y de sí mismos) debiéndose efectuar la suma de los productos obtenidos para lograr el valor definitivo del número$_s$ es decir$_9$ en general aparece combinado en forma de sistema multiplicativo-aditivo.

Diremos que un sistema es posicional cuando combina un número finito de cifras, de modo que: una misma cifra representa valores distintos según el lugar que ocupa dentro del numeral.

Un sistema será mixto cuando resulta de combinar sistemas anteriores.

En cuanto al punto iii) entramos en un aspecto confuso dentro de lo que a numeración se refiere y que es el concepto de base.
Citando a Sarton (George) en su obra "Historia de la Ciencia"[5] (Ed. Eudeba-1965) leemos: "Toda lengua delata la presencia de aquello que los matemáticos llaman base del sistema numéricos que fue, frecuentemente, cinco (entre muchas tribus americanas), a veces veinte (entre los mayas), pero con mayor frecuencia diez. Tales bases fueron más populares que otras porque casi todos los primitivos usaron la misma máquina de contar, es decir, los dedos de las manos o de los pies…" (pag. 16). "Los pueblos cuyas estructuras culturales estaban destinados a dominar a todos los demás concordaron inconscientemente en el uso del diez" (pag.17).

…"consideremos las palabras egipcias relativas a los números; las palabras para 1, 2, 3, 4, 5 y 10 son africanas; para 6, 7, 8 y 9 son semíticas. ¿Qué significa esto?. Significa que el acervo lingüístico original fue africano, ….también significa... que la base del sistema de numeración de los egipcios primitivos fue cinco. Contactos posteriores con pueblos semíticos del sur y del este introdujeron… , la base diez" pag.30 y 31)

… "120000 prisioneros, 400000 bueyes, y 1.422.000 cabras… estos números grandes, están escritos algo a la manera romana, con símbolos para cada múltiplo decimal hasta el millón" (pag.42).

… "la numeración sumeria fue en sus comienzos una extraña mezcla de ideas decimales y sexagesimales"… "Parecería que sus primeros matemáticos hubiesen partido de una base decimal, pero que de pronto debieron de percatarse de que una base sexagesimal era mejor" (pag.84).

… "Los griegos heredaron el sistema sexagesimal de los sumerios, pero o mezclaron con el decimal usando el primero para los submúltiplos de la unidad y el ultimo para los múltiplos" (pag.142).

En el libro "Historia de la Matemática[3]" de Rey Pastor y Babini (Espasa-Calpe,1947) encontramos: … "Alrededor del perno constituido por la base igual a diez, que es adoptado en la numeración china, hindú, egipcia, griega, etc., se encuentran sistemas de base cinco como el romano, base 60 como el babilónico o base 20 como la cronología maya" (pag.6).

Ahora bien, tratemos de puntualizar el concepto de base:

- para Rey Pastor y Babini "la base está constituida por el numero, o los números mediante cuyas combinaciones aritméticas puede expresarse cualquier numero" (pag.5 del libro citado).

- para Roberto Hernández y coautores, en su obra "Conceptos Básicos de Matemática Moderna" (EdoCodex, 1966) "el cardinal del conjunto de cifras o la cantidad de cifras de un sistema se llama base del mismo" (pag. 263),

- según Ceci, Cosentino y Paglilla en su libro de texto para 1º año de nivel medio "'Matemática I", para crear un sistema de numeración, además de la existencia de ciertas leyes que lo rijan, es necesario "elegir un conjunto de signos llamados cifras o numerales primitivos, a cada uno de los cuales se atribuye un valor, que constituyen el 'conjunto de base' o simplemente la 'base' del sistema" (pag.56)

- según, Sarton (obra citada, pag.17) "La base permite usar en forma periódica el mismo grupo de pocas palabras con leves modificaciones, si las hay; sin ella se requeriría una infinidad de palabras". Acota: "Considérese nuestro propio idioma. Para contar hasta cien, necesitamos diecinueve palabras: uno, dos,… , diez, veinte, …, noventa, cien, aunque debamos recordar algunas modificaciones pequeñas que sufren en la segunda década, como once (para diez y uno)$_s$ doce, trece, …, diecinueve. Para contar hasta 999.999 solo necesitamos una palabra más: mil”.

- la enciclopedia Salvat (Ed.Salvat- Barcelona, 1967) define: “Base de numeración es el número de signos empleados para la representación de los números, y también el número de unidades de un orden cualesquiera que se necesitan para componer una unidad del orden inmediato superior”.

- según el Diccionario Enciclopédico Espasa-Calpe “llámese en aritmética base de un sistema de numeración al número de cifras que en él se emplean para que, convenientemente combinadas, se pueda representar cualquier cantidad. Así es 2 la base en el sistema binario; 3, en el sistema ternario; 4 en el cuaternario, etc.”.

A través de la lectura minuciosa de estos textos llegamos a notar tres acepciones distintas de la palabra base, a saber:

a) cardinal del conjunto de signos empleados para la escritura de cualquier número dentro del sistema.
b) el número de unidades de un orden cualesquiera necesario para formar una unidad de un orden inmediato superior,
c) el ciclo (sobre la sucesión natural) que permite usar en forma periódica los numerales básicos.

Respecto de la acepción a) si estudiamos la mayoría de los sistemas primitivos, vemos que no concuerda para nada el número de caracteres usados con el criterio decimal[5] que en general los sustenta.
Tomemos algunos ejemplos que más adelante veremos en detalle:

- el sistema egipcio: posee siete caracteres, el palote (𓏺), la herradura (𓎆), una letra parecida a nuestra e (𓍢), etc. y no es septenario si no decimal (ver citas anteriores),

- el sistema babilónico posee tres símbolos básicos: 𒁹=1 o 60^n ; 𒌋 = 10 y 𒌋𒁹= 100 o 10.60^n y también es considerado decimal o sexagesimal.

- el maya con el punto (.) para el 1, la raya horizontal (—) para el 5 y el ovalo (𝋠) para el cero, es de base veinte,

- el romano, con sus siete caracteres bien conocidos por todos, no es de base siete.

y así podríamos seguir con Grecia y China, quienes poseyendo 27 y 12 caracteres respectivamente, son considerados ambos como sistemas decimales.
Solo en el sistema indo-arábigo coincide el numero de caracteres (diez) con su rotulo de sistema de base 10, cosa que también pasa en los sistemas posicionales modernos (binarios, ternarios, etc.).

Conclusión: A juzgar por lo expresado, pareciera que la base de un sistema coincide con el número de cifras a utilizar solamente en el caso que el sistema sea posicional.
Veremos más adelante que esto no es generalizable.
Por de pronto dejamos sentado que el termino base bajo la acepción a) no involucraría a los sistemas primitivos conocidos.
Respecto de la acepción b) del término base, pareciera ser lo que caracteriza a todo sistema posicional, es decir que la base pensada como el conjunto de unidades de un orden necesarios para obtener una unidad de orden inmediato superior, sería la condición indispensable para que sea catalogado como posicional un dado sistema.
Inmediatamente damos un contraejemplo, es decir, damos un sistema posicional donde no es posible definir base desde este punto de vista b) y que llamaremos sistema "2-5".
- Signos primitivos: 0, 1, 2, 3, 4.
- Reglas de sistematización:
para los ordenes impares, solo deben usarse al 0 y el 1, en ese orden.
para los ordenes pares deben usarse del 0 al 4 en orden creciente.

- Ejemplo de la sucesión que se obtiene:

Decimal	"2-5"	Decimal	"2-5"	Decimal	"2-5"	Decimal	"2-5"	Decimal	"2-5"
0	0	5	21	10	100	15	121	20	1000
1	1	6	30	11	101	16	130	21	1001
2	10	7	31	12	110	17	131	22	1010
3	11	8	40	13	111	18	140	23	1011

4	20	9	41	14	120	19	141	24	1020

donde la descomposición de cualquier numero es:

$$....edcba = a + b.2 + c.2.5 + d.2^2.5\ 4\text{-}\ e.2^2.5^2 + ...$$

$$\text{Ej,: } 141_{(2\text{-}5} = 1 + 4.2 + 1.2.5 = 19_{(10}$$

Arribamos, pues, a las siguientes conclusiones:

i) Todo sistema numérico admitiría la acepción a) pues todos poseen un conjunto de caracteres básicos, pero no se lo utiliza, por lo menos en los sistemas no posicionales.

ii) Todo sistema que admite la acepción b) de la palabra base es posicional, pero la recíproca no es cierta (véase ejemplo anterior del sistema "2-5").

iíi) Todo sistema posicional que admite la acepción b) de la palabra base; admite la acepción a) y viceversa, pues el número de unidades necesarios para engendrar una de orden inmediato superior coincide con el número de símbolos o cifras que permiten la representación de cualquier numeral.

Como podemos ver, estas dos acepciones del término base no son ni generales ni unívocas, es decir un sistema puede ser posicional o no y no cumplir con ninguna de ambas definiciones y sin embargo ser clasificado como de base diez cinco, doce, etc., tal como lo leemos en todos los textos referidos a los sistemas de numeración primitivos, por ejemplo.

Quizás si estudiáramos estos sistemas y los actuales con una visión más intuitiva, podríamos lograr una definición de base menos confusa y más general.

¿Por qué los historiadores y matemáticos clasifican a los sistemas egipcio, chino, babilónico, griego e hindú como decimales?, ¿qué poseen en común todos estos sistemas aún cuando los símbolos y las operacionales que los conectan son diferentes?.

Poseen en común el que todos admiten una agrupación base de unidades primarias (diez en estos casos) a partir de la cual volverán a crearse numerales expresados como esa agrupación base más los símbolos primitivos que caracterizan a esas unidades primarias.

Así vemos que en los sistemas citados cada diez numerales volverá a usarse el representante del uno, del dos, del tres, etc.; en el romano será cada cinco, en el binario será cada dos, etc.

Se observa así que la operación de contar se torna cíclica, posibilitando el uso de un número limitado de numerales, que debidamente combinados logran la representación de cualquier número.

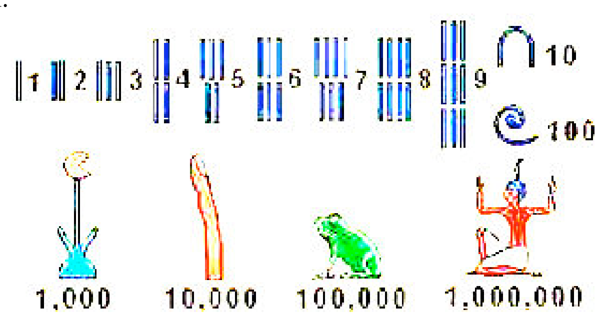
Por lo tanto es la acepción c) del término base la que creemos más general y menos ambigua de las tres, aplicable a cualquier sistema primitivo o actual, independiente de su naturaleza de posicional o no.

3.- LOS ORÍGENES DE LA NUMERACIÓN ESCRITA

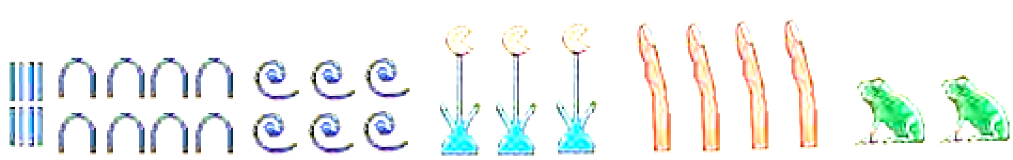
Los orígenes de la numeración escrita están firmemente enraizados con los de la escritura y es en Egipto y la Baja Mesopotamia donde podemos vislumbrar los documentos más antiguos al respecto.

Sistema de numeración egipcio: (3 400 aC) Poseían tres tipos de escrituras jeroglífica, hierática y demótica utilizadas con fines específicos. Las dos últimas son degeneraciones de la primera con algunas adiciones.

Los símbolos jeroglíficos eran:

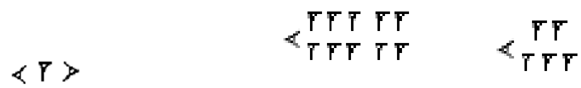


El número 243.688 = $2.10^5 + 4.10^4 + 3.10^3 + 6.10^2 + 8.10 + 8$ se escribiría:



Sistema de numeración babilónico (3 000 aC) En la escritura babilónica, cimentada en la sumeria y acadia, encontrarnos un sistema de numeración mixto en la base (usaron diez, doce y sesenta) y la lectura (donde se mezclan criterios aditivo-sustractivos, multiplicativos y posicional).
Existían tres símbolos tan solo, limitados por las dificultades de la escritura cuneiforme; ellos eran: para el 1 ; para el 10 y para el 100 .
Las unidades mayores que 10 y 100 las escribían adoptando un criterio multiplicativo, anteponiendo el signo (10) a los signos que representaban la unidad anterior.

Ejemplos:



1 000 = 10x100 64 = (10x6) + 4 50 = 10x5

Con estas unidades se constituía un sistema decimal aditivo sustractivo que, para la representación de un numero, se utilizaba de derecha a izquierda y de abajo hacia arriba, en forma creciente la repetición de los signos respectivos.
Ejemplos:

5 23 = 20 + 3

Para escribir pequeños números en lugar de grandes utilizaban un criterio sustractivo, donde el símbolo significaba "quitar a" por ej

19 = 20 - 1 43 = 50 - 2

W. Dampier, en su libro "Historia de la Ciencia" (Técnos, 1 972), habla de que los babilónicos también poseían un sistema duodecimal, que les facilitaba los cálculos fraccionarios y que junto con el decimal fue el motivo de que adoptaran la base 60, como confluencia de los dos sistemas.
El mismo símbolo utilizado para el 1 ( ) también fue usado para el 60 y todas sus potencias,, y el del 10 ( ) se lo utilizaba para escribir las potencias de 60 multiplicadas por 10, de modo que

= 60^n = $10x60^n$

Se percibirán entonces[3] los equívocos a que esta notación daba lugar de manera que el valor real del número debía extraerse del contexto en que figuraba, pues estaba en estrecha relación con él. Esta confusión se acrecentaba pues carecían del cero y la ausencia de unidades de cierto orden la indicaban mediante un espacio en blanco.
En síntesis, el sistema babilónico posee tres símbolos básicos, que se combinan aditiva, sustractiva, multiplicativa o posicionalmente siguiendo un criterio decimal o sexagesimal.

Sistema de numeración griego (1 200 aC) Sus orígenes se encuentran en la numeración Creta y en la influencia fenicia egipcia y babilónica. En Creta se representaba el 10 mediante una raya horizontal el 100 con un círculo y el 1000 con un rombo.
Los griegos tuvieron dos importantes sistemas de numerales, además de la repetición primitiva de las simples barras hasta el nueve y el uso de varios signos diferentes para el 10, que demuestran la influencia de las culturas mencionadas (según cita la Enciclopedia Británica en su artículo "Numbers", ed.1958). Estos sistemas aparecieron muy posteriormente y demuestran, al igual que su alfabeto, una fuerte influencia de origen fenicio.
El primer sistema elaborado identifica el numeral, con la letra inicial con que se nombra al misino. En caracteres modernos sería:

π (Π), pi, para πεντε (pente) = 5
Δ, delta, para AeKa (deka) = 10, aunque también usaron un círculo (o)
H, para Hεκατοω (hekaton) = 100
χ (X), chi, para χιλιοι (chil'ioi) = 1 000
μ (M), mu, para μγριοι (myr'ioi, mur'ioi) = 10 000

numerales que se combinaban frecuentemente para obtener múltiplos, por ejemplo:

Δ	𐅄	H	𐅅	X	𐅆	M	𐅇
10	50	100	500	1000	5000	10000	50000

Otro sistema usado casi en forma paralela al anterior, consistía en asignar nueve letras del alfabeto a los números del 1 al 9; nueve letras a los números 10, 20, 30, . . . 90 y nueve letras al 100, 200, . . . 900. Pero como el alfabeto tiene 24 letras solamente, tomaron de los fenicios.
Los caracteres eran:

alpha	Α	α	ksi	Ξ	ξ
beta	Β	β	omicron	Ο	ο
gamma	Γ	γ	pi	Π	π
delta	Δ	δ	koppa	-	-
epsilon	Ε	ε	rho	Ρ	ρ
digamma	-	-	sigma	Σ	σ
zeta	Ζ	ζ	tau	Τ	τ
eta	Η	η	upsilon	Υ	υ
theta	Θ	θ	phi	Φ	φ
iota	Ι	ι	chi	Χ	χ
kappa	Κ	κ	psi	Ψ	ψ
lambda	Λ	λ	omega	Ω	ω
mu	Μ	μ	san	-	-
nu	Ν	ν			

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

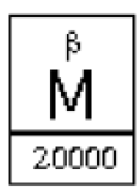
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ͳ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Las potencias de 1 000 se indicaban añadiendo un subíndice o un superíndice *iota* a los símbolos del 1 al 9.

͵Α	͵Β	͵Γ	͵Δ	͵Ε	͵Ϛ	͵Ζ	͵Η	͵Θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

La M (del primer sistema) se combina con otros símbolos de este sistema para múltiplos de 10 000, por ej.:



El número 20000

2 x 10 000= 20 000

El número 1230000

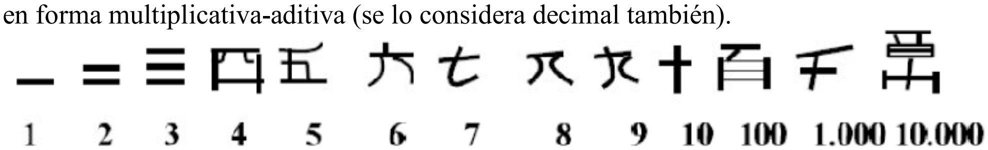
(100 + 20 + 3) x 10 000

De acuerdo a lo anterior en Grecia se utilizaron tres sistemas:

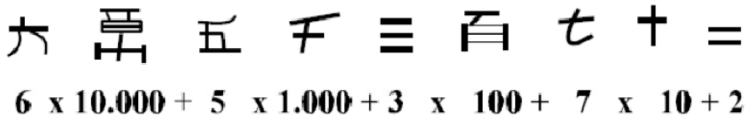
1. Con 2 símbolos básicos, decimal aditivo;
2. Con 5 símbolos básicos; cuasi decimal multiplicativo;
3. Con 27 símbolos básicos aditivo y aditivo multiplicativo, con una clara estratificación simbólica decimal.

Cabe hacer notar que los hebreos utilizaron un sistema análogo a este último, pero expresado en letras de su propio abecedario.

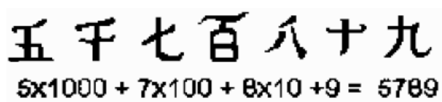
Sistema de numeración chino (300 a C) Poseían 10 símbolos del 1 al 10, otro para el 100 y otro para el 1000 que combinaban en forma multiplicativa-aditiva (se lo considera decimal también).



Por ej.:



para el número 65 372

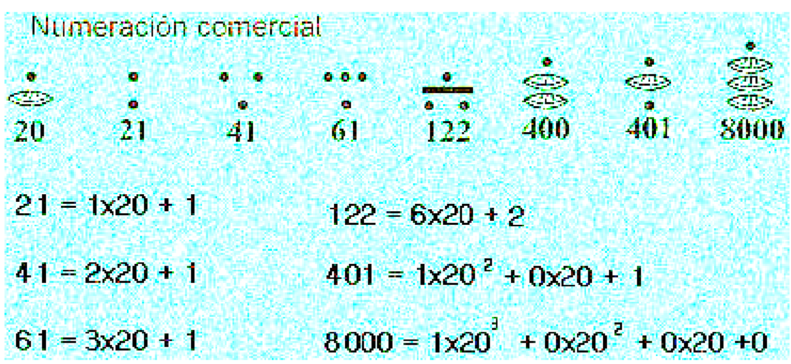


Sistema de numeración maya (300 a C) En el uso común aplicaban un sistema posicional de base 20 en forma pura₉ teniendo dos tipos de símbolos»

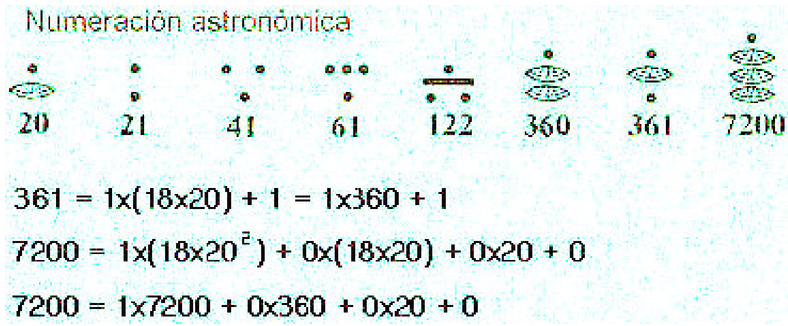
- uno de cabezas de deidades para representar del 0 al 19
- y otro, un sistema sobre la base de puntos para cada unidad y barras para cinco unidades.

Para el cero utilizaban un símbolo semejante a una concha () escribiendo los números de abajo hacia arriba.

Ejemplos:



Pero los científicos mayas eran a la vez sacerdotes ocupados en la observación astronómica y para expresar los números correspondientes a las fechas usaron unas unidades de tercer orden irregulares para la base 20. Así la cifra que ocupaba el tercer lugar desde abajo se multiplicaba por 20x18=360 para completar una cifra muy próxima a la duración de un año.



El año lo consideraban dividido en 18 *uinal* que constaba cada uno de 20 días. Se añadían algunos festivos (*uayeb*) y de esta forma se conseguía que durara justo lo que una de las unidades de tercer orden del sistema numérico. Además de éste calendario solar, usaron otro de carácter religioso en el que el año se divide en 20 ciclos de 13 días. Al romperse la unidad del sistema éste se hace poco práctico para el cálculo y aunque los conocimientos astronómicos y de otro tipo fueron notables los mayas no desarrollaron una matemática más allá del calendario.

<u>Sistema de numeración romano</u> (200 a C) Sus orígenes se presentan oscuros al historiador "Los romanos no pueden ofrecernos obras maestras originales... Su sistema de cifras con las decenas I, X, C, y los grupos de cinco, resultantes por bipartición V, L, D, son de origen itálico antiguo" (Historia de la Matemática, Hofmann, Tl. UTEHA, 1960, p.42). Carecen de símbolo para el cero y manejan un principio de orden, pero no posicional. No se pueden repetir más de tres veces los símbolos I, V, X, C, M. y los símbolos V, L y D no se repiten.

1	5	10	50	100	500	1.000
I	V	X	L	C	D	M

Utilizan esos caracteres con un criterio aditivo que en algunas situaciones específicas mezclan con el sustractivo. Ejemplos:

CXVIII = 100 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1
XXIV = 10 + 10 + 5 – 1

Por otro lado además maneja el principio multiplicativo, esto es, que si a un símbolo se le coloca una barra encima aumenta mil veces su valor, una doble barra aumenta un millón de veces su valor.
Por ej.:

$$\overline{\mathrm{M}} = 1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$$

$$\overline{\overline{\mathrm{M}}} = 1\,000 \times 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000$$

$$\overline{\mathrm{L}} = 5 \times 1\,000 = 5\,000$$

Los escasos caracteres para memorizar y lo fácil de su lectura hizo que perdurara por varios siglos en Europa como el sistema de numeración por antonomasia, Cabe, sin embargo., puntualizar dos desventajas fundamentales de este tipo de notación que hicieron que fuera el hindú, y no este, el sistema de numeración que reinara definitivamente.
a) que la notación aditiva impone que cuanto mayor es el número[9] mayor es también el conjunto .de nuevos símbolos necesarios para representarlo.
b) el hecho de que el cálculo se torna tan complicado que solo los especialistas pueden manejar los problemas no triviales (¿Qué es la Matemática? C. Robins, 1964, p.14).

<u>Sistema de numeración hindú</u> (300 a C) Según el testimonio histórico, el país que uso, con la mayor antigüedad que se conoce nuestro tipo de numerales fue la India.
"E1 1, 4 y el 6 se encuentran en las inscripciones de Asoka (300 aC) el 2, 4, 6, 7 y 9 aparecen en las inscripciones de Nana~Ghat, cerca de la ultima centuria antes de Cristo; el 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9 en las cuevas de Nasik, en el primero y segundo siglo de nuestra era. Todos en forma que tienen considerable semejanza con los nuestros" (Enc. Britannica, Numbers, ed.1958).
Nuestros 2 y 3 son bien reconocibles como derivaciones cursivas del antiguo " = " y "≡"
La literatura hindú da alguna evidencia de que el cero pueda haber sido conocido antes de nuestra era[2] pero no contamos actualmente con ninguna inscripción, con tal símbolo[s] anterior al siglo IX

La primera referencia definida de los numerales hindúes es una nota de Severus Sebokt[9] un obispo que vivió en la Mesopotamia alrededor del 550 de nuestra era. Como habla de nueve símbolos es posible que el "0" no fuera conocido por él; sin embargo, a fines del 800 unas tablas astronómicas indias fueron traducidas al árabe y eran conocidas por los estudiantes de esa lengua.
Alrededor del 825, Al Joarismí[9] escribió un pequeño libro sobre este tema, traducido al latín en 1120, con el nombre de "Liber Algorismí de número Indorum"
Existen razones para pensar que nuestros numerales hayan llegado antes a España que a Bagdad, pero el primer manuscrito conteniendo los, aparecido en Europa, data del 976.
"Este sistema fue introducido en Europa en la Edad Media por comerciantes italianos, quienes lo habían aprendido de los árabes" dice Comant Robins en su libro ¿Qué es la Matemática? (Espasa Calpe, 1964, p. 14).
Como bien sabemos el sistema de numeración indo-arábigo consta de 10 símbolos básicos que se organizar, en forma posicional y decimal.
Con respecto a. los sistemas usados en la actualidad y distintos del decimal, podemos decir que:

i) Fue Gottfried W. Leibniz (l646-1716) quien, hacia fines del siglo XVII, sugirió el uso de la base dos (aunque tribus antiguas de Australia, África, Nueva Guinea y América del Sur ya lo habían manejado según lo de muestran estudios etnológicos).
Esta idea de Leibniz está profundamente unida a su concepción religiosa. Dice Laplace "Leibniz veía en el sistema diádico la imagen de la creación. Consideraba que la unidad representaba a Dios, y el cero, la nada; que el Ser Supremo creaba todos los seres de la nada, del mismo modo que la unidad y el cero expresaban todos los números de un sistema de numeración" (¿Qué es la Matemática? C. Robins, 1964, p.16).
Este sistema que pierde valor muerto Leibniz, renace por un lado con el álgebra de Boole (1874), quien consigue expresar la lógica median te un cálculo algebraico basándose en el conjunto {O , 1}, dotado de una suma y producto lógico (iniciando así la moderna lógica matemática); y por otro con el cálculo electrónico, quien mediante parámetros puede indicar el numero 1 (circuito abierto, voltaje positivo, magnetización, etc.) o el cero (caso contrario).

ii) Son muchos los matemáticos de hoy día que proponen una base de numeración distinta de la diez, criticando entre otras cosas la poca cantidad de divisores que admite este número (2 y 5) o La base doce, sería más adecuada según Rey Pastor, pues no posee tal desventaja ya que sus divisores duplican en número a los de la base 10.
Parece ser que un naturista francés, Georges Buffon (1707-1788) fue quien propicio la adopción universal de la base duodecimal.
Otra ventaja que tendría el uso de esta base es que solucionaría los problemas que ocasiona la enseñanza de decena y docena, y que los maestros saben bien a cuanta confusión da lugar.
Además de hecho esta base la utilizamos a diario en el comercio (docena, gruesa, etc.) y en la medición del tiempo y de ángulos.

4.- BREVE ESTUDIO DE PROPIEDADES NUMÉRICAS EN DISTINTAS BASES
No nos detendremos en detallar el uso de la base 10, pues nos es familiar a todos; lo que sí trataremos de hacer ahora será señalar que existen muchas propiedades que se atribuyen <u>particularmente</u> como ventajas de la misma[3] en tanto que podemos demostrar que no son privativas de la base 10 sino del sistema posicional y del cero en forma explícita.
Para la verificación posterior de algunas de esas propiedades necesitamos del <u>teorema de la descomposición polinónica de un número</u> en una base dada que a continuación demostramos:
Teorema: Dada una base k > 1, todo número natural que formalmente caracterizamos como (h g … d c b a) puede descomponerse de modo único en la forma

$$A = hg\ldots dcba = a + bk + ck^2 + dk^3 + \ldots + gk^{n-1} + hk^n$$

Demostración: Dado un número A le aplicamos sucesivas divisiones por la base:

$$\begin{array}{llllllll}
A & \underline{|\,k} & & & & & & \\
a & C_1 & \underline{|\,k} & & & & & \\
 & b & C_2 & \underline{|\,k} & & & & \\
 & & c & C_3 & \underline{|\,k} & & & \\
 & & & d & C_4 & \ldots & & \\
 & & & & & & C_{n-1} & \underline{|\,k} \\
 & & & & & & g & h
\end{array}$$

y como cada vez dividimos por una constante (k) a un resto menor, hemos de llegar necesariamente a un $C_n = h < k$ donde culminan las divisiones enteras o Aplicando la definición de división entera tenemos que:

i) $A = C_1\,k + a$
ii) $C_1 = C_2\,k + b$
iii) $C_2 = C_3\,k + c$
iv) $C_3 = C_4\,k + d$
……
v) $C_{n-1} = h\,k + g$

y reemplazando ii) en i)» iii) en ii), etc. Obtenemos:

$A = C_1\,k + a = (C_2\,k + b)\,k + a = \{k(k\,C_3 + c) + b\}\,k + a = = k^3.C_3 + k^2.c + k.b + a$

Con reemplazos sucesivos llegamos a que:

$$A = hg...dcba = h.k^n + g.k^{n-1} + ... + d.k^3 + c.k^2 + b.k + a$$

Demostraremos ahora que esta descomposición es <u>única</u>. Admitamos a tal fin que el número A pueda ser descompuesto en forma polinónica para otros valores *a', b', c', d',* etc., menores que la base k, por lo tanto:

$$A = h'\ \ k^n + g'\ \ k^{n-1} + ... + c'\ \ k^2 + b'\ \ k + a'$$

Extraemos factor común k de los n-1 primeros términos

$$A = k\ (h'\ \ k^{n-1} + e'\ \ k^{n-2} + \ ...\ + c'\ \ k + b') + a'$$

lo que expresaremos como $A = k.X + a'$, pero por definición de división a' es según lo obtenido el resto de dividir A por k, por lo tanto resulta $a' < k$ y dado que la división tiene resultado único, <u>X</u> no podrá ser otro que <u>C_1</u> y <u>a'</u> que <u>a</u>. Aplicando un razonamiento similar con $X = (h'\,k^{n-1} + g'\,k\ + ... + c'\,k + b')$ obtendremos que b = b' y quedará un valor X' que resultara nuevamente factoreable por k en sus primeros (n-1) términos, lográndose demostrar así que c = c' hasta h = h', con lo cual quedará en evidencia la unicidad del desarrollo de A.

<u>Prop. 1°</u> La base de un sistema siempre quedará indicada con el numeral 10 (que se leerá "uno - cero" y no "diez", salvo en esta base)

La demostración de esta propiedad es obvia. Llamemos k a nuestra base; por el teorema anterior el número "k" admitirá la siguiente descomposición única.

$k = 1.k^1 + 0$ = suma que podrá escribirse como 10 por definición de sistema posicional.

<u>Prop. 2:</u> Toda potencia de la base será expresable como la unidad seguida de tanto ceros como indique el exponente

$$10^n = k^n = \underbrace{100.....0}_{n}$$

Por el teorema anterior admitirá una descomposición polinónica única de la forma

$$k^n = 1.k^n + 0.k^{n-1} + \ldots + 0.k^2 + 0.k + 0 = \underbrace{100.....0}_{n}$$

por convención de escritura posiciona!₉ con lo cual queda demostrada la propiedad 2.

Base$_{(dos)}$		Base$_{(diez)}$	Base$_{(tres)}$		Base$_{(diez)}$
$10^1 =$ 10	$\leftrightarrow$	$2^1 = 2$	$10^1 =$ 10	$\leftrightarrow$	$3^1 = 3$
$10^{10} =$ 100	$\leftrightarrow$	$2^2 = 4$	$10^{10} =$ 100	$\leftrightarrow$	$3^2 = 9$
$10^{11} =$ 1000	$\leftrightarrow$	$2^3 = 8$	$10^{11} =$ 1000	$\leftrightarrow$	$3^3 = 27$
$10^{100} =$ 10000	$\leftrightarrow$	$2^4 = 16$	$10^{100} =$ 10000	$\leftrightarrow$	$3^4 = 81$

Nota: De ahora en más adoptaremos la notación de Rey Pastor para inicialar la base. Un número 'n' en base 'k' será $n_{(k}$

<u>Relaciones de orden</u>

Pueden darse las siguientes situaciones:

i) Que busquemos comparar números en una misma base₉ con lo que valdrán las definiciones que se aplican a la base 10, es decir: será b > a o a < b sí y solo sí existe un n tal que a + n = b

Así en base seis? 25 > 15 o 15 < 25 pues existe 10, tal que 15 + 10 = 25

En base cuatro, 30>22 o 22<30 pues existe 2, tal que 22 + 2 = 30

También podremos afirmar que a < b siempre y cuando "a" aparezca antes que "b" en la sucesión numérica elaborada en la base en que se baja.

Ejemplos: $13_{(4} < 20_{(4}$; $12_{\ (10} < 21_{\ (10}$

ii) Que busquemos comparar números en distintas bases, lo que dará lugar a comparar:

a) números de numerales iguales en bases distintas: con lo que se evidencia que será mayor el número que pertenezca a la base más grande si los numerales son de 2 o más dígitos y serán iguales si los numerales son de un dígito.

Ejemplos: $11_{(3} < 11_{(2}$; $7_{(8} = 7_{(9}$
$23_{(6} > 23_{(4}$; $2_{(3} = 2_{(12}$

b) números de numerales distintos en bases distintas, con lo que puede acontecer en síntesis:

NUMERALES	BASES	NUMEROS	EJEMPLOS
"a" > "b"	base de a > base de b	a > b	$32_{(6} > 30_{(5}$
"a" < "b"	base de a > base de b	a $\lesseqgtr$ b	$20_{(7} < 32_{(5}$ $10_{(6} = 12_{(4}$ $10_{(5} > 120_{(3}$
"a" > "b"	base de a < base de b	a $\lesseqgtr$ b	$4_{(5} < 42_{(6}$ $120_{(4} = 40_{(6}$ $102_{(3} > 21_{(4}$
"a" < "b"	base de a < base de b	a < b	$100_{(2} < 111_{(4}$

En los casos de duda aconsejamos que, dado que el sistema en base diez es de dominio común[9] se lleven los números a comparar a esta base (podría ser cualquier otra) quedando así en evidencia su relación de igualdad y desigualdad. Esto se hace casi imprescindible en el segundo y tercer caso.

Ejemplo: Comparar $46_{(7}$ y $320_{(4}$
$46_{(7} = 34_{(10}$; $320_{(4} = 20_{(10}$
$\therefore \quad 46_{(7} > 320_{(4}$

Concepto de Numero Primo

El concepto de número primo definido como el número que siendo distinto de 0 y 1, es divisible tan solo por 1 y por sí mismo también es otra propiedad trascendente a la base 10, es decir, es válido para cualquier base.
Por ejemplo podemos comprobar que los siguientes números primos en base 10, lo son en cualquier base:

BASE 10	BASE 2	BASE 5	BASE 6
2	10	2	2
3	11	3	3
11	1011	21	15
17	10001	32	25

En cuanto al encuentro de una ley que permita engendrar números primos o identificarlos constituye uno de los más antiguos desafíos matemáticos aun no resueltos. Nos valga por el momento la regla práctica que dice que para reconocer *si* un numero es primo se lo dividirá sucesivamente por los números primos menores que él (ordenados de menor a mayor). Si se *llega* a una división en la cual el cociente es menor que al divisor, sin haber obtenido resto cero$_s$ el número es 'primo'.
Ejemplo: Verificar si 17,,,. es primo

$$\begin{array}{r|l} 17 & 2 \\ \hline 1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline 2 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

y habiendo obtenido un cociente 3 menor que el divisor 5, aseguramos que $17_{(10}$ es primo. Notar que no necesitamos dividir por 7, 11 y 13, que son los primos que completan la sucesión de los menores que 17.
Lo mismo podemos comprobar en cualquier otra base, por ejemplo en la base dos, donde $17_{(10} = 10001_{(2}$

$$\begin{array}{r|l} 10001_{(2} & 10_{(2} \\ \hline 0001 & 1000_{(2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10001_{(2} & 11_{(2} \\ \hline 0101 & 101_{(2} \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10001_{(2} & 101_{(2} \\ \hline 111 & 11_{(2} \\ 10 & \end{array}$$

Criterios de paridad en las distintas bases

Admitiendo que un numero será para siempre y cuando sea divisible por dos, deberemos demostrar su posibilidad de reconocimiento en las distintas bases, puesto que la regla práctica utilizable en base 10: "Todo número que termina en 0 o en cifra par es divisible por 2” no es válida en bases como la tres (donde por ejemplo el $4_{(10}$ se escribe el $8_{(10} = 22_{(3}$; el $16_{(10} = 121_{(3}$; el $20_{(10} = 202_{(3}$; o en la base cinco, donde $8_{(10} = 13_{(5}$; $16_{(10} = 31_{(5}$; $20_{(10} = 40_{(5}$; etc.
Veremos, pues, de demostrar una regla general que permita la clasificación de números pares e impares cualquiera sea la base en que trabajemos.
Sea el numeral A = abcde, que tomamos de cinco cifras por ejemplo. Según el teorema de descomposición polinónica, en base 10 y en base 3 este numeral vale$_s$ respectivamente:

$abcde_{(10} = e + d.10 + c.10^2 + b.10^3 + a.10^4$
$abcde_{(3} = e + d.\ 3 + c.\ 3^2 + b.\ 3^3 + a.\ 3^4$

generalizando para cualquier base, podemos poner:

$abcde_{(2n+h} = e + d.(2n+h) + c.\ (2n\text{-}hh)^2 + b.(2n\text{-}fh)^3 + a.\ (2n+h)^4$ (1)

siendo (2n+h) la base, que cuando h=l será impar y cuando h=2 será par (con n= 0,1,2, ...)

Desarrollando ec.(l) obtenemos

$abcde_{(2n+h} = e + 2nd + hd + 4n^2c + 4nhc + ch^2 + 8n^3b\ 4\text{-}\ 12n^2hb + 6nh^2 + bh^3 + 16n^4a + 32n^3ha + 24n^2h^2a + 8nh^3 + ah^4$

donde:
i) si h=2 todos los términos posteriores a “e” serán pares y por lo tanto bastara demostrar que "e" también lo sea para que el número sea par 5 de lo que se deduce que: si la base es par, la cifra de las unidades simples debe ser divisible por dos para que el número sea par
ii) si h =1 deberá verificarse que:

$$e + d.h + c.h^2 +.\ b.h^3 + a.h^4 = a + b + c + d + a$$

sea divisible por dos, de lo que deducimos: si la base es impar$_9$ la suma de las cifras debe ser divisible por 2 para que el número sea par

Observaciones: A raíz de la demostración anterior queremos señalar un error que se comete con cierta frecuencia en la enseñanza y que es no puntualizar suficientemente la distinción entre una definición o propiedad y la regla práctica para su reconocimiento o verificación, como acontece en el caso de la paridad.
A menudo si preguntamos a. un alumno “¿cuando un numero es par?", nos contestará “cuando la cifra de la unidades es 0 o múltiplo de 2", en lugar de darnos la definición de paridad (enunciada más arriba).

Criterio de divisibilidad por tres en distintas bases
Verificaremos con otro ejemplo la distinción del criterio .de divisibilidad por 3 restringido a base 10 y el criterio general verificable para cualquier base.
Se pueden presentar dos situaciones:
a) que la base k sea múltiplo de 3 (o sea k = 0 modulo 3)
b) que la base k no sea múltiplo de 3 (k = 1 modulo 3 o bien k = 2 modulo 3), que pasaremos a analizar.
a) Si la base k es 0 modulo 3 el desarrollo polinomio de cualquier número será de la forma:

$$abcde = e + d.k + c.k^2 + b.k^3 + a.k^4 + \dots$$

donde siendo k un múltiplo de 3, cualquier k^n también lo será; por lo tanto, todos los productos donde figura la base serán múltiplos de 3 y podremos enunciar la siguiente consecuencia.
- Si la base es múltiplo de 3 (k = O módulo 3); para que el numero sea divisible por 3, la cifra de las unidades simples deberá ser 0 o múltiplo de 3.
Ejemplos:

$20_{(3}$; $13_{(6}$; $30_{(6}$; $123_{(9}$ serán divisibles por 3.

b) En caso de que la base no sea múltiplo de 3 podrá ser de forma
i) k = 1 mod. 3 y podrá escribirse como k = (3.m + 1) donde m vale 0, 1, 2, etc. Por ejemplo: $b_{(4}$; $b_{(7}$; $b_{(10}$; etc.
ii) k = 2 mod. 3 y podrá escribirse como k = (3,n - 1) donde n vale 1, 2, 3, etc. Por ejemplos $b_{(2}$; $b_{(5}$; $b_{(11}$; etc.

Para i) tendremos el siguiente desarrollo

$. ..abcde = e + d(3m + 1) + c(3m +1)^2 + b(3m + 1)^3 + a(3m + 1)^4 +... = e + 3md + d + 3^2m^2c + 2.3mc + c + 3^3m^3b + 3.3^2\ m^2b + 3.3mb + b + 3^4\ m^4\ a + 4.3^3\ m^3\ a + 6.3^2\ m^2\ a + 4.3ma + a +...$

de donde deducimos que: para que un numero escrito en una base k = 1. mod. 3 sea divisible por 3 bastará comprobar que la suma de sus cifras sea múltiplo de 3
Ejemplos

$12_{(4}$; $24_{(7}$; $72_{(10}$ serán divisibles por 3

Para ii) al desarrollo será:

$\ldots abcde = e + d(3n - 1) + c(3n - 1)^2 + b(3n - 1)^3 + a(3n - 1)^4 + \ldots = e + 3nd - d + 3^2m^2c - 2.3mc + c + 3^3m^3b - 3.3^2m^2b + 3.3mb - b + 3^4m^4a - 4.3^3m^3a + 6.\ 3^2m^2a + 4.3ma + a + \ldots$

de donde inferimos que: para que un numero escrito en "una base k = 2 mód. 3, sea, divisible por 3 bastará comprobar que la suma de las cifras que ocupan lugares impares, menos la suma de las cifras que ocupan lugares pares, sea 0 o múltiplo de 3.
Ejemplos.

$11_{(2}$; $30_{(5}$; $63_{(8}$, son divisibles por 3.

Siendo la demostración análoga a la anterior, hacemos notar que al criterio de <u>divisibilidad por $11_{(10}$</u> será formalmente igual al criterio de divisibilidad por el numero base más 1 ($k + 1 = 10_{(k} + 1$), en cualquier base.
Análogamente, el criterio de <u>divisibilidad por $9_{(10}$</u> será formalmente igual al criterio de divisibilidad por el número base menos 1 ($k-1 = 10_{(k} - 1$)3 en cualquier base.

<u>Números fraccionarios en las distintas bases. Fracciones “n-ales”</u>
Dejaremos de lado las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entera en cada base por guardar total afinidad con la forma de trabajo en base diez, pasando a considerar los números racionales$_9$ especialmente en la noción de fracción decimal y su equivalente en las distintas bases.
Por similitud con la base$_{(10}$ definiremos como fracción “n-al” (binal, ternal, cuaternal, quintal, ..., decimal, etc.) en cada base, a aquella que tiene por denominador la base o potencia de ella, es decir, la que tiene por denominador la unidad seguida de ceros. Por ejemplo:

- En $b_{(2}$ serán fracc. "bínales": $\frac{11}{100}$; $\frac{110}{1000}$
- En $b_{(5}$ serán fracc. "quinales": $\frac{132}{10}$; $\frac{44}{100000}$
- En $b_{(12}$ serán fracc. "duodecimales" : $\frac{48}{100}$; $\frac{AB}{1000}$

Admitiremos que estas fracciones pueden ser expresadas bajo la forma de "números n-ales", como (respectivamente):

$0{,}11_{(2}$; $0{,}110_{(2}$
$13{,}2_{(5}$; $0{,}0044_{(5}$
$0{,}48_{(12}$; $0{,}0AB_{(12}$

Nos interesa saber cuáles de las fracciones no "n-ales" pueden ser transformadas en "n-ales".
Al igual que se verifica en base$_{(10}$ no será posible tal transformación sino tan solo en aquellas fracciones cuyo denominador pueda expresarse como producto de los distintos factores de la base, elevado o no $_5$ cada factor, a cualquier potencia entera.
De lo que se deduce que en las bases dos, tres, cinco y en general en todas las bases primas no serán fracciones “n-ales”, ni posibles de ser transformadas en tales, salvo aquellas fracciones cuyo denominador sea la propia base o potencia entera de 1a misma.
Ejemplos:

$\frac{111}{1100_{(2}}$ no será posible de ser transformada a binal, pues 1100 no es potencia de la base, ni habrá forma de multiplicarlo de modo de obtenerla. (Esta fracción en $b_{(10}$ representa 7/12 y no existe ningún n que multiplicado por 12 de una potencia de 2 , ya que 12 no solo es divisible de 2, sino de 3 también).

$\frac{2}{122_{(3}}$ no tendrá fracción equivalente ternal (en $b_{(10}$ representa a 2/17 y ningún múltiplo de 17 coincidirá con una potencia entera de 3).

En las bases factoreables como cuatro, seis, nueve, diez, etc. podremos encontrar posibilidades de transformación de fracciones ordinarias en fracciones "ni-ales”, siempre y cuando el denominador esté constituido tan solo por factores o potencias de factores de la base, según puntualizamos oportunamente.
Ejemplos:

La fracción ordinaria $\frac{3}{2_{(4}}$ admitirá la transformación a fracción cuaternal multiplicando numerador y denominador por 2:

$$\frac{3}{2_{(4}} = \frac{3}{2_{(4}} \times \frac{2}{2_{(4}} = \frac{12}{10_{(4}}$$

Análogamente:

$$\frac{33}{20_{(4}} = \frac{33}{20_{(4}} \times \frac{20}{20_{(4}} = \frac{1320}{1000_{(4}}$$

$$\frac{15}{30_{(6}} = \frac{15}{30_{(6}} \times \frac{2}{2_{(6}} = \frac{30}{100_{(6}}$$

En el siguiente cuadro daremos ejemplos donde se visualiza que fracciones convertibles a “n-ales” en una base, no lo son en otras.

FRACC.	b(2	b(3	b(4	b(5	b(6	b(7	b(8	b(9	b(10	b(11
ordin.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
"n-al"	$\frac{1}{10}$	-	$\frac{2}{10}$	-	$\frac{3}{10}$	-	$\frac{4}{10}$	-	$\frac{5}{10}$	-
ordin.	$\frac{10}{11}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
"n-al"	-	$\frac{2}{10}$	-	-	$\frac{4}{10}$	-	-	$\frac{6}{10}$	-	-
ordin.	$\frac{1011}{11}$	$\frac{102}{10}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{21}{3}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{10}{3}$
"n-al"	-	$\frac{102}{10}$	-	-	$\frac{34}{10}$	-	-	$\frac{36}{10}$	-	-
ordin.	$\frac{1101}{11001}$	$\frac{111}{221}$	$\frac{31}{121}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{21}{41}$	$\frac{16}{34}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{12}{23}$
"n-al"	-	-	-	$\frac{23}{100}$	-	-	-	-	$\frac{52}{100}$	-

<u>Nota:</u> Cualquier fracciones “n-al” en una base, lo será en cualquier base múltiplo de la misma.

<u>Números periódicos en las distintas bases</u>

Nos resta preguntarnos ¿qué acontece con las fracciones no reducibles a “n-ales”?. Las fracciones no reducibles a “n-ales” nos enfrentan con los números o expresiones periódicas y ya podemos deducir de lo anterior que así como una fracción que es “n-al” en una base no lo es en otra, también pasara que fracciones que dan lugar a expresiones periódicas en una base no lo serán en otras.

Ejemplos: Tomando ejemplos del cuadro anterior, obtenemos:

$$\frac{1}{2_{(3}} = 0{,}111\ldots = 0,\hat{1}_{(3} \qquad \frac{10}{11_{(2}} = 0{,}101010\ldots = 0,\widehat{10}_{(2}$$

$$\frac{21}{3_{(5}} = 3{,}313131\ldots = 3,\widehat{31}_{(5} \qquad \frac{1}{2_{(5}} = 0{,}222\ldots = 0,\hat{2}_{(5}$$

$$\frac{12}{3_{(3}} = 0,\hat{2}_{(3} \qquad \frac{21}{41_{(6}} = 0,\overline{304153}_{(6} \quad \frac{1}{2_{(7}} = 0,\hat{3}_{(7}$$

$$\frac{2}{3_{(5}} = 0,\widehat{31}_{(5} \qquad \frac{111}{221_{(3}} = 0,\overline{112001002011022122 02}_{(3}$$

$$\frac{1}{2_{(9}} = 0,\hat{4}_{(9} \qquad \frac{2}{3_{(7}} = 0,\hat{4}_{(7} \qquad \frac{31}{121_{(4}} = 0,\overline{2011013223}_{(4}$$

$$\frac{1}{2_{(11}} = 0,\hat{5}_{(11} \qquad \frac{2}{3_{(10}} = 0,\hat{6}_{(10} \qquad \frac{3}{22_{(10}} = 0,\overline{136}_{(10}$$

<u>Reglas de transformación de números periódicos a fracciones ordinarias</u>

Finalmente demostraremos *a* continuación las reglas generalizadas de transformación de un numero "n-al" periódico puro y periódico mixto a fracción ordinaria para cualquier base.

i) Periódico puro: Sea un número "a" dividido por otro "b", y cuyo período sea de m cifras. Y como ejemplo, supongamos que m = 3.
Expresado como acostumbramos:

$$\begin{array}{l|l} a_{(k} & b_{(k} \\ \cline{2-2} -\ - & 0{,}cde_{(k} \\ \ \ -\ - & \\ \ \ \ a & \end{array}$$

En consecuencia reconstruyendo la formula de división entera, obtenemos que $a_{(k} = b_{(k} \,.\, 0{,}cde_{(k} + 0{,}00a_{(k}$. Multiplicando por la base elevada al cubo:

$$1000_{(k} \,.\, a_{(k} = b_{(k} \,.\, cde_{(k} + a_{(k}$$
$$(1000_{(k} - 1)a_{(k} = b_{(k} \,.cae_{(k}$$
$$\therefore \quad \frac{a_{(k}}{b_{(k}} = \frac{cde_{(k}}{1000_{(k} - 1}$$

formula que nos dice que la fracción de la cual se obtiene un numero periódico puro se forma poniendo en el numerador el período y en el denominador $k^m - 1$ que es igual al mayor número menor que la base repetido tantas veces como cifras tenga el período.
Ejemplos:

$$0,\overline{10}_{(2} = \frac{10}{11_{(2}} \qquad (\text{Obs.: } 2^2 - 1 = 11_{(2})$$
$$0,\overline{31}_{(5} = \frac{31}{44_{(52}} = \frac{2}{3_{(5}} \qquad (\text{Qbs.: } 5^2 - 1 = 44_{(5})$$

ii) Periódico mixto: Supongamos un número "a" dividido por otro "b" y cuyo cociente sea una expresión mixta de la forma 0.,cdedede.... = 0,cde; tendremos entonces que $a_{(k} = b_{(k} \,.\, 0{,}cde + 0{,}00r$ (donde r es el resto después de haber obtenido el cociente 0,cde .
Multiplicando por $1000_{(k}$ ambos miembros:

$$1000_{(k} \,.\, a_{(k} = b_{(k} \,.\, cde_{(k} + r_{(k}$$

además sabemos que

$$10_{(k} \,.\, a_{(k} = b_{(k} \,.\, c_{(k} + r_{(k}$$

restando la expresión (2) a la (1) y factoreando obtenemos:

$$(1000_{(k}\text{-}10_{(k}).a_{(k} = b_{(k} \,(cde_{(k} - c_{(k})$$
$$\frac{a_{(k}}{b_{(k}} = \frac{cde_{(k} - c_{(k}}{1000_{(k} - 10_{(k}}$$

lo que indica que todo numero periódico mixto puede expresarse como una fracción cuyo numerador es la diferencia entre la parte no periódica seguida del per yodo, menos la parte no periódica, y el denominador está formado por la mayor cifra menor que la base en que se trabaja repetida tantas veces como cifras tenga el período, seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.
Ejemplos:

$$0{,}7\overline{3}_{(10} = \frac{73-7}{90_{(10}} = \frac{66}{90_{(10}} = \frac{11}{15_{(10}} \qquad\qquad 0{,}45\overline{3}_{(6} = \frac{453-45}{500_{(6}} = \frac{403}{500_{(6}}$$

Se deduce de lo anterior que aquellas expresiones periódica puras de período menor que la base en una unidad, son iguales al número entero que se obtiene sumando 1 a su parte entera.
Ejemplos:

$$0,\overline{4}_{(5} = \frac{4}{4_{(5}} = 1_{(5}$$

$$2,3\overline{4}_{(4} = 2_{(4} + \frac{3}{3_{(4}} = \frac{21}{3_{(4}} = 3_{(4}$$

APENDICE 1: Tabla de Numerales en distintas bases

b(2	b(3	b(4	b(5	b(6	b(7	b(8	b(9	b(10	b(11	b(12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3
100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4
101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5
110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6
111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7
1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8
1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9
1010	101	22	20	14	13	12	11	10	A	A
1011	102	23	21	15	14	13	12	11	10	B
1100	110	30	22	20	15	14	13	12	11	10
1101	111	31	23	21	16	15	14	13	12	11
1110	112	32	24	22	20	16	15	14	13	12
1111	120	33	30	23	21	17	16	15	14	13
10000	121	100	31	24	22	20	17	16	15	14
10001	122	101	32	25	23	21	18	17	16	15
10010	200	102	33	30	24	22	20	18	17	16
10011	201	103	34	31	25	23	21	19	18	17
10100	202	110	40	32	26	24	22	20	19	18
10101	210	111	41	33	30	25	23	21	1A	19

5. CONCLUSIONES:

A través de los puntos anteriormente expresados, queden como síntesis de los mismos las siguientes observaciones:

i) La necesidad de diferenciar las tres acepciones de la palabra base, ya que son varios los autores de texto de escuela secundaria y matemática elemental que definen base como el "cardinal del conjunto de símbolos gráficos", pero sin puntualizar que esa definición se torna correcta porque ellos la están dando dentro del concepto de sistema posicional decimal, binario o “n-al” de uso actual, pero que no lo es si englobarnos sistemas de numeración primitivos (y ellos suelen tomarlos como ejemplos de sistemas aditivos, multiplicativos o posicionales).

ii) La necesidad de propiciar una definición más general del término "base" independiente de la naturaleza posicional o no del sistema y fácilmente desentrañable de la observación del mismo.

iii) La necesidad de puntualizar el hecho de que existen propiedades que se presentan como ventajas de la base diez, pero que no son tales, pues se manifiestan también en el uso de otras bases.

6.- BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

David BERGAMINI: "Matemáticas" (Colección científica de Life-1965)
CECI, COSENTINO, PAGLILLA: "Matemática I" (Sd.Guadalupe-1967)
W.C.DAMPIER: "Historia de la Ciencia" (Ed,Tecnos-1972) Diccionario Enciclopédico "Espaca-Calpe" (Ed.Espasa-Calpe-1950)
Zoltán DIENES: "La Construcción de las Matemáticas" (Ed.Vicens-Vives.-1970)
Zoltan DIENES: "La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria" (Ed. Teide-1970)
Enciclopedia 'Salvat" (Salvat Editores-1967) Encyclopaedia "Britannica" (Eds.1958 y 1968)
R.HERNÁNDEZ y coautores: "Conceptos Básicos de Matemática Moderna" (Sd.Codex-1966)
J.E.HOFMANN: "Historia de la Matemática" (Ed.UTEHA-1960)
Eutimio MERINO: "Didáctica de.la Nueva Matemática" (Ed.Gram-1973) George PAPY: "Matemática II" (EUDEBA,1970)
J.REY PASTOR y BABINI: "Historia de la Matemática" (Ed.Espasa-Calpe -1950)
J.REY PASTOR, PI CALLEJA y C.TREJO: "Análisis Matemático" Tomo I (Ed. Kapelucz-1960)
Courant ROBINS: "Que es la Matemática" (Ed.Aguilar-1964) George SARTON: "Historia de la Ciencia" (EÜDEBA-T 1 y 2-1965)