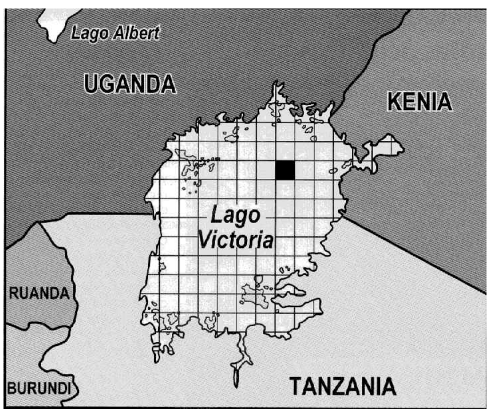
Cualidades y aplicaciones de la potenciación

Potencias de 3 (Búsqueda de regularidades. Generalización)
Sabiendo que:
$3^0 = 1$
$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$
$3^6 = 729$
¿Qué puedes decir con certeza acerca del último dígito de 3^8? ¿Y de 3^{10}? ¿Y cuál es el último dígito de 3^{20}? Escribe una regla o fórmula que permita saber cuál es el último dígito de las potencias de 3.

Planta sobre el Lago Victoria



Un alga sobre el Lago Victoria duplica el área que cubre cada año.
Un cuadrado de esta cuadrícula está coloreado para representar el área cubierta por el alga en un año, por ejemplo, el actual. ¿Cuánto quedará cubierto al año siguiente? ¿Y al otro?....
Ángela usó color diferente para representar el crecimiento de cada año. Ella dice: “El número de cuadrados que coloreo para un cierto año es exactamente igual que el número ya coloreado para TODOS los años anteriores juntos”.

- ¿Es cierto lo que dice Ángela? Comprobarlo en el dibujo.
- ¿Cuántos años demorará en quedar cubierta la mitad del lago?
- ¿Cuántos años demorará el lago en quedar totalmente cubierto? (Extraído y adaptado del módulo Growth de Mathematics in Context (MIC). Encyclopædia Britannica, Inc. 1998).

<u>**Nota:**</u> En la solución de los problemas se hace una distinción entre las respuestas dadas por docentes de nivel primario y de nivel secundario, para destacar las distintas estrategias según las herramientas matemáticas disponibles por los mismos. Las ponemos para que los docentes las analicen y las sometan a la discusión de los alumnos, si lo consideran oportuno.

Soluciones

Potencias de 3:
Docentes de nivel primario:
Observaciones y procedimientos

Regularidades que se observan:

- *Se reiteran las terminaciones en 1-3-9-7*
- *Se observa que 3^8 termina en 1; 3^{10} termina en 9; 3^{20} termina en 1*
- *Los números elevados a 0-4-8-12 terminan en 1*
- *Los números elevados a 1-5-9-13 terminan en 3*
- *Los números elevados a 2-6-10-14 terminan en 9*
- *Los números elevados a 3-7-11-15 terminan en 7*

Comentarios que surgen:

- *Para lograr una regla tenemos que saber cuál es el último dígito de las potencias de 3*
- *Para llegar a una generalización tenemos que usar "n"*
- *Los dígitos posibles son 1-3-7-9*
- *Las diferencias son de 4 y hay coincidencia en las terminaciones*
- *A la base le sumás 4*
- *Te tenés que aprender las primeras potencias*

- *Considerando el exponente n, si hacemos **n – 4** tenemos el último dígito.*
  Sea n = 4, 4 - 4 = 0 y termina como 3^0 en 1
  Sea n = 6, 6 - 4 = 2 y termina como 3^2 en 9

Anda para valores pequeños. Al manejar potencias mayores que al restar 4 no den un dígito: por ejemplo 3^{10} haríamos 10 – 4 = 6, termina como 3^6 en 9.

- *No, es n/4 y hay que mirar el resto.*

3^{10} --------→ 10 : 4 = 2 ---→ resto 2 ----→ termina en 9

Hay que pensar en los múltiplos de 4

r = (n – c) / 4 , siendo r = último dígito; n = exponente dado y c = cociente

Para confirmar estas respuestas resulta útil hacer una tabla con exponentes de 3^n en base a los restos de dividir n por 4 y asociarlos con las terminaciones de los resultados de efectuar la potenciación:

0	4	8	12	16	**1**
1	5	9	13	17	**3**
2	6	10	14	18	**9**
3	7	11	15	19	**7**

Procedimientos trabajados por docentes de nivel secundario

Una forma: *Si el exponente es:*

0-4-8………..termina en 1

1-5-9………..termina en 3

2-6-10………termina en 9

3-7-11………termina en 7

3^8 termina en 1 ; 3^{10} termina en 9 ; 3^{20} termina en 1.

El resto queda expresado como el numerador en una fracción de denominador 4:

(n – múltiplo de 4 menor que n) / 4

Sea 3^{14}, (14 – múlt.4) / 4 = (14 – 12) / 4 , da resto 2 , $3^{14} \equiv 3^{2} = 9$

Otra forma:
Si el exponente es múltiplo de:

- *4, la potencia termina en 1*
- *4 + 1, termina en 3.*
- *4 + 2, termina en 7.*
- *4 + 3, termina en 9.*

Planta sobre el Lago Victoria

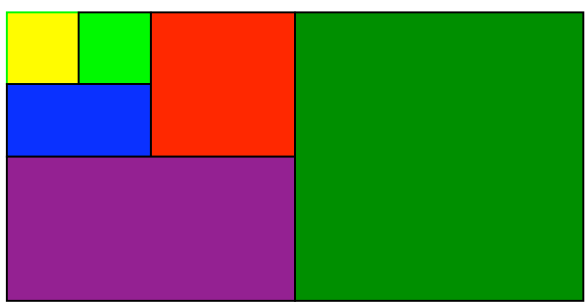
En docentes de primaria aparecen las siguientes tablas:
Tabla 1

Año	1	2	4	8	18
Duplicación	2	4	8	16	32

Tabla 2

Año	1°	2°	3°	4°	5°
Potencia	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5

3) Una maestra fue pintando:



Y traduce numéricamente lo que fue pintando en la siguiente tabla:

Año	0	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Cuadraditos	1	2	4	8	16	32	64	128

+ 16 + 32 + 64

Su respuesta: La superficie del lago es aproximadamente de 76 cuadraditos, por lo tanto demora más de 6 años.

Procedimientos trabajados por docentes de nivel secundario

Los docentes de nivel medio asocian rápidamente al problema de doblar en dos en forma sucesiva una hoja, y dicen la fórmula $y = 2^n$.

Sus respuestas son:

- Ángela tiene razón.
- Demora un poco más de 5 años. La mitad del lago tiene aproximadamente 47 cuadraditos. Por lo tanto $2^n = 47 \Rightarrow n = 5,\ldots$ años. ($2^5 = 32$ y $2^6 = 64$).
- Demora un año más.