Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo
Noviembre de 2009, Saltillo (CUA)

Recursos para procesar, aprender, enseñar el cálculo: nuevos modos de concepción y difusión

Luc Trouche, Institut National de Recherche Pédagogique, Lyon (France),
Luc.Trouche@inrp.fr, http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire

Resumen. *Debido al desarrollo de lo numérico, en particular de la red Internet y de los recursos en línea, mudan las condiciones en las cuales los seres humanos comunican y aprenden. Los cambios se evidencian en las instituciones y profesiones dedicadas al aprendizaje – las escuelas y los docentes. Nos proponemos aquí estudiar los cambios en el contexto de la enseñanza del cálculo, localizando nuestro enfoque sobre tres evoluciones: de las herramientas, de los programas curriculares, de la labor docente, esta última vista desde la evolución de los recursos diseñados o puestos en uso.*

1) Nuevos contextos tecnológicos: de las herramientas matemáticas individuales a las redes de herramientas multifuncionales

Siempre ha sido el cálculo dependiente de herramientas para ayudar al trabajo de la memoria y de la inteligencia. Al contemplar los artefactos diseñados por con este objetivo a una distancia de 4000 años en el tiempo, nos llaman la atención rasgos comunes (Figura 1) entre tablillas de arcilla de la época babilonia, con listas arborescentes muy compactas de problemas y métodos, y calculadoras actuales: Ambas son herramientas dedicadas al cálculo, individuales, insertadas en una cubierta bien identificable (ábaco o calculadora); también son utensilios de tamaño reducido, muy estructurados, abarcando conocimientos y adecuados para la construcción de nuevos conocimientos. Condicionan en gran parte el trabajo y los aprendizajes matemáticos de los que los usan (Trouche, 2005).

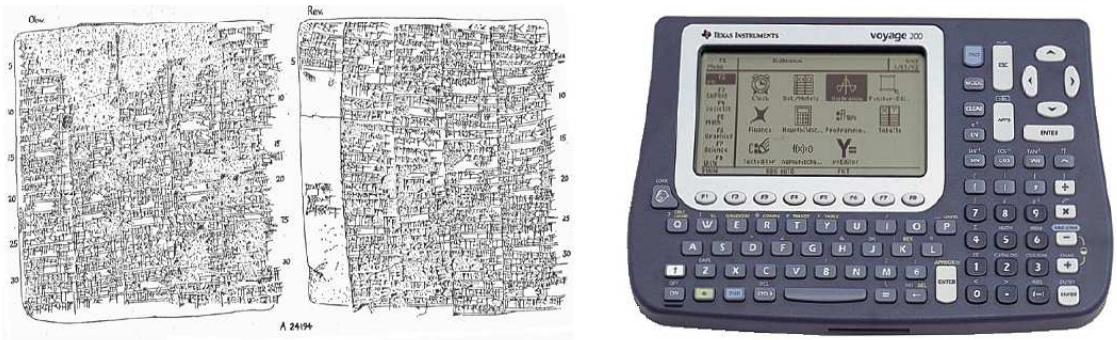

Figura 1. Dos utensilios para procesar cálculos, 4000 años de distancia en el tiempo, mismas dimensiones *(10 cm x 10 cm)*

Por ejemplo se mostró (Guin *et al.* 2005) hasta qué punto las calculadoras gráficas favorecen los fenómenos de *zapping* (pasar de una imagen a otra sin analizar la retroalimentación de la máquina) e influyen en la conceptualización (al atribuir a los conceptos matemáticos propiedades de sus representaciones). Las herramientas de cálculo también reflejan el estado de las ciencias y técnicas de una época dada. Entonces evolucionan continuamente, y, por la razón de que la apropiación de nuevas herramientas no es inmediata, en cada momento lo nuevo coexiste con lo antiguo durante fases de transición que pueden ser largas. Así (Figura 2), durante siglos, tanto los matemáticos como los comerciantes hicieron cálculos por escrito (lo nuevo) o mediante ábacos (lo antiguo). Y la misma regla prevalece en la situación actual: Usan en el aula y para la labor docente un conjunto de herramientas de diferentes generaciones.

Figura 2. *Cálculo escrito (con plumas) vs cálculo con ábaco, cohabitación y competencia entre lo nuevo y lo antiguo*

Para calcular tenemos a disposición un conjunto de herramientas: Algoritmos que desarrollar con papel y lápiz, calculadoras, hojas de cálculo, software de cálculo formal a veces diseñado para la enseñanza y a veces no. El desarrollo de lo numérico, en particular de la red Internet y de los recursos en línea, cambia la naturaleza de las herramientas puestas a disposición, marcando una ruptura con las características anteriores de las herramientas para procesar matemáticas:
- la *miniaturización* de los soportes permite tener a su disposición herramientas portátiles que proporcionan aplicaciones de naturaleza muy diferente, aplicaciones para hacer matemáticas entre muchas otras (por ejemplo se pueden trazar curvas en teléfonos celulares, Figura 3);
- hay *disociación* entre aplicaciones y medios: una misma aplicación se puede encontrar en máquinas diferentes (por ejemplo, el mismo software puede funcionar en una calculadora y en una computadora, que pueden intercambiar archivos, véase la Figura 3);
- Ahora, las herramientas se conectan en redes (en la Figura 3, la imagen de derecha es la representación, diseñada por el Ministerio de Educación de Francia, de un salón de clase con pizarrón blanco interactivo, en el que el trabajo se organiza en grupos y en red).

Por estos cambios tecnológicos, hace falta repensar las situaciones matemáticas y su *orquestación* (Drijvers et Trouche 2008).

Gráficas sobre un *smartphone*

Mismo software en dos máquinas

Red de herramientas en el aula

Figura 3. *Tres aspectos de las evoluciones inducidas por las tecnologías*

Para ilustrar las evoluciones, presentamos dos casos observados en clases francesas. El primer caso se observó por casualidad en el contexto de una clase conectada a la red Internet, a través de un pizarrón blanco interactivo (Figura 4). En un ejercicio se necesitaba calcular un producto (3.35 × 5.7). Los estudiantes sorprendieron mucho al observador cuando propusieron usar Google, y ¡Google dio el resultado! Uno se puede imaginar los efectos de tal procedimiento sobre la conceptualización: el resultado

de una multiplicación no aparece como el producto de una construcción, sino de una búsqueda (se buscaría de la misma manera la capital de Radjastan o la longitud de un rio).

Figura 4. *Google explotado como "herramienta de búsqueda de resultados matemáticos"*

El segundo caso procede de un experimento de un grupo de investigación (Hoyles *et al.* 2009), cuyo objetivo es la explotación de un entorno (TI-Navigator) que vincula en una red las calculadoras individuales de los estudiantes (Figura 5). La situación matemática la diseñó el grupo de investigación: se trata determinar el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm. El objetivo es la introducción de la noción de función: el área función de la longitud de la base. Se diseñó cuidadosamente a orquestación de la situación. Resultó de elecciones entre numerosas posibilidades (como superponer todos los resultados de los estudiantes en el mismo sistema de ejes, o enseñar en la pantalla común las ventanitas de las calculadoras individuales). En un primer tiempo, el profesor escogió la primera posibilidad. El trabajo estudiantil se desarrolla a través de varias etapas:

- Al usar herramientas "antiguas", compas y regla graduada, los estudiantes construyen triángulos ABC de bases diferentes, miden la altura y obtienen el área del triángulo mediante las fórmulas que conocen. Con esto se tienen parejas de números (base y área del triángulo), que los estudiantes localizan en su sistema de ejes, y que el profesor introduce en la pantalla común.
- Se abre una discusión: ¿se debe obtener una nube de puntos o una "curva"?
- Los estudiantes cuestionan la precisión de las medidas; la toma de nuevas medidas produce una nube de dispersión menor.
- Por ser pesada la toma de medidas, unos estudiantes proponen una automatización del procedimiento, al indagar una fórmula que permita dar el área del triángulo a partir de su base.
- Se obtienen varias fórmulas, y la validación proviene naturalmente del ajuste gráfico de los puntos ya situados con la curva producida por una fórmula (Figura 5).

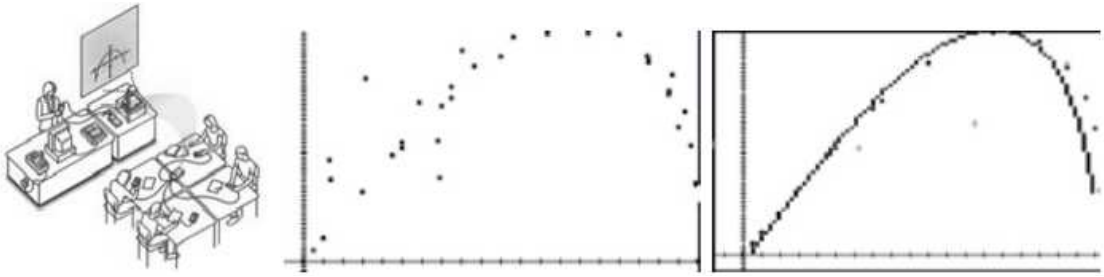

Figura 5. *El entorno TI-Navigator y dos imágenes de la pantalla común de la clase durante la resolución del problema*

Aparece con claridad en este ejemplo la fuerte renovación de las condiciones de emergencia de una nueva noción matemática, misma que resulta de una construcción conjunta de los estudiantes, en la que las potencialidades del entorno tecnológico ocupan un lugar crucial. La clase funciona como un pequeño *laboratorio* de investigación, en el que cada uno participa en la construcción de los nuevos objetos del saber. Se imagina también la complejidad de la labor del profesor, que no siempre puede tener en cuenta, cuando no los ha anticipado, los resultados de los alumnos (muchedumbre de resultados que aparecen en la pantalla común de la clase). Por ejemplo (primera copia de pantalla en la Figura 5), el profesor sólo puede darse cuenta *a posteriori* que una nube de puntos propuesta no conviene para el problema estudiado: No es posible que dos triángulos de mismos lados tengan áreas diferentes, y entonces no se pueden encontrar dos puntos diferentes de misma abscisa.

Eso evidencia que, por las evoluciones tecnológicas, se deben repensar los recursos de la enseñanza, tanto para los estudiantes como para los docentes.

2) Nuevos contextos curriculares: del salón de clase a la metáfora del laboratorio

La metáfora de los *laboratorios matemáticos*, que acabamos de considerar para describir las condiciones de indagación en el contexto de una red de clase, se usa con regularidad desde 1908 (Maschietto & Trouche online, Kuntz 2007). Surge en particular cuando se propone una revitalización de la enseñanza de las matemáticas. Eso pasó en Francia, con la creación de la comisión CREM (Commission de Réflexion pour l'Enseignement des Mathématiques). Jean-Pierre Kahane, primer presidente de la CREM, escribía:

> "Los *Lycées* (equivalente francés de las Preparatorias) podrían albergar laboratorios de matemáticas al lado de los de ciencias físicas. Estudiantes y profesores encontrarían ahí documentos, materiales de computación, software […]. Horarios específicos se podrían reservar a los profesores para su actualización" (Kahane, 2000).

Esta temática de los laboratorios tiene una nueva actualidad en los entornos tecnológicos "comunicantes". Hoy numerosos proyectos de investigación proponen la explotación de estos entornos para articular, en la práctica de las matemáticas, una fase de investigación con una fase de construcción de pruebas[1]. Y ahora proyectos sobrepasan el estado de programas de investigación para constituir las bases sobre las que se diseñaron los nuevos programas curriculares en Francia (2009), donde las temáticas de experimentación que se apoyan sobre las TIC están ampliamente presentes:

> "El uso de software (calculadora o computadora), de herramientas de visualización y de representación, de cálculo (numérico o formal), de simulación, de programación desarrolla la posibilidad de experimentar, abre ampliamente la dialéctica entre observación y prueba, y cambia profundamente la naturaleza de la enseñanza[2].".

Se acostumbra decir, cuanto menos en Francia donde el bachillerato, examen final de la preparatoria que da acceso a la enseñanza superior, tiene un lugar sumamente importante, que la evaluación de los estudiantes es a la vez el criterio y la fuente de las evoluciones institucionales. Entonces es verdaderamente notable que le Ministerio de la Educación Nacional ha tomado la decisión de experimentar desde el año 2007 una nueva prueba, denominada "práctica" en el marco del bachillerato actual:

> "El objeto de la prueba es evaluar las competencias de los estudiantes en el uso de las calculadoras y de algunos software específicos de matemáticas. Se trata de evaluar la capacidad de los estudiantes a movilizar las tecnologías de la computación y de la comunicación para la enseñanza (TICE) para resolver un problema matemático. Los enunciados propuestos a los candidatos son ejercicios matemáticos en los que el uso de las TICE (calculadora graficadora programable, computadoras y software específicos, de preferencia libres, hoja de cálculo, graficador, geometría dinámica, cálculo formal) puede servir de forma significativa en la resolución del problema planteado (Inspection Générale de mathématiques[3]).

Los enunciados propuestos a los estudiantes en el marco de esta prueba práctica, reflejan una evolución importante de las prácticas matemáticas escolares (Tabla 1).

---

[1] Véase en particular el proyecto e-CoLab (experimentación colaborativa de laboratorios matemáticos), que explota plataformas matemáticas interactivas (Aldon *et al.* 2008).

[2] http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/20/1/pgm2nde2009_109201.pdf

[3] http://eduscol.education.fr/cid47793/epreuve-pratique-de-mathematiques-du-baccalaureat-serie-s.html

Sea f la función definida sobre R por

$$x \mapsto f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$$

Se denota C su curva representativa en un sistema de ejes ortogonales. Sea *a* un número real cualquiera, M y N los puntos de C de abscisas *a* y –*a*.
1) Trazar la figura con la ayuda de un software de su elección
Llamar al examinador para verificar la figura
2) Cambiar *a* e expresar conjeturas sobre la recta (MN) y la intersección I de las tangentes a C en M y N.
Llamar al examinador para verificar las conjeturas
3) Determinar en función de *a* las coordenadas de los puntos M y N. Justificar las conjeturas propuestas en 2).
Producción esperada de los candidatos:
- visualización en la pantalla del lugar del punto I
- respuestas argumentadas a la pregunta 3

Tabla 1. *Ejemplo de enunciado para la prueba práctica del bachillerato*

Al leer este enunciado particular, uno se da cuenta de la importancia de las evoluciones en juego:

- No es sólo el resultado final obtenido por el estudiante que se evalúa, sino su actividad de indagación, a lo largo de la prueba.
- Se combina la evaluación con una tutoría del examinador en varios momentos importantes de la actividad.
- Se atribuye el mismo valor al razonamiento y a las habilidades a movilizar las tecnologías para trazar figuras o curvas, la habilidad a cambiar parámetros, buscar invariantes, conjeturar…

Es cierto que es grande la distancia entre este tipo de situación matemática y las situaciones matemáticas ordinarias, que los profesores ponen por obra en sus clases. Es por eso que los inspectores crearon grupos de trabajo, encargados de concebir nuevas situaciones matemáticas adaptadas a esta prueba práctica. Luego la institución subió en línea repertorios de tareas posibles, para acompañar la preparación de los estudiantes a esta prueba por los profesores. La prueba práctica se aplicó de forma experimental, y los inspectores generales presentaron un primer reporte de la experimentación, que aparece muy positivo[4].

[Estas novedades] inducen una relación diferente de los estudiantes con las matemáticas, porque:

- esta prueba da un lugar a lo que se puede considerar como una actividad experimental por el hecho de que el estudiante tiene la posibilidad de hacer varios intentos al usar las TIC en el marco del enunciado,
- la calificación pone énfasis en el tratamiento, favorece formulaciones análogas a las de las preguntas abiertas, puesto que la observación conduce usualmente al estudiante a proponer una conjetura, lo que no es frecuente durante la escolaridad,
- el examinador acompaña al candidato durante la prueba,
- se incita a los docentes en cumplir con prácticas de enseñanza diferentes, que permiten dar un sitio más importante a la pesquisa,
- se ponen en juego prácticas de calificación diferentes: se trata de evaluar al candidato cuando está en actividad, de apreciar sus procedimientos, sus calidades para experimentar, su perseverancia o su gusto en indagar, tomar iniciativas.

Además esta experimentación recibió un juicio positivo de la comunidad educativa;

- su organización tanto pedagógica como material no generó ningún problema particular;
- en las escuelas que participaron, interesó a los profesores de matemáticas, que en ella vieron, entre otras cosas, la oportunidad de actualizar sus prácticas,
- suscitó un entusiasma real en los estudiantes, que descubrieron otras aproximaciones de la actividad matemática;
- no generó ninguna oposición de parte de la Asociación de los Profesores de Matemática de la Educación Pública, al contrario esta Asociación expreso gran interés.

[…] La generalización de esta prueba, que no desborda del marco de los programas curriculares, debería de hacer evolucionar la enseñanza de las matemáticas hacia una coherencia más fuerte con

[4] http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/rapportep

sus objetivos: Cómo la matemáticas, con las herramientas que se tienen hoy a disposición, permiten la resolución de problemas, el desarrollo de la experimentación, el gusto y la práctica de la investigación.

A pesar de este balance institucional ampliamente positivo, no es antes del 2013 que se considera la generalización de esta prueba experimental… Es probable que esta prudencia de la institución sea el indicio de problemas profundos:

- indicio de la complejidad de poner en marcha de forma controlada procedimientos experimentales en la enseñanza de las matemáticas;
- indicio de la complejidad de la renovación por los profesores de los recursos para su enseñanza. No basta entregar a los profesores repertorios de situaciones novedosas, es preciso hacerlos capaces de construir, para ellos mismos y para sus colegas, situaciones de este tipo, y eso supone pensar en nuevos modos de creación y puesta en común de recursos.

3) Nuevos contextos de desarrollo profesional: de la temática de las *tecnologías* a la temática de los *recursos*

La palabra "tecnología" es polisémica. En Francia, incorporada en muchos casos en las iniciales TICE (Tecnologías de la Información y de la Comunicación para la Enseñanza), ha designado diferentes realidades: las mismas computadoras, en la época del plan Computación para Todos (1985), luego los software. En la práctica, si se consideran la variedad de los objetos que los docentes y los estudiantes usan en su trabajo en el aula o fuera del aula (Figura 6), es muy difícil decidir de lo que pertenece a la familia de las tecnologías: ¿regla y compas? ¿Internet? ¿el pizarrón blanco interactivo? ¿las simulaciones que se pueden activar en Internet? ¿el mismo texto de los recursos en línea? Es indudable que el desarrollo de lo numérico impulsa una evolución del vocabulario, entonces de los conceptos: Ha favorecido la emergencia del concepto de *recursos* (por ejemplo se dice "recursos en línea"), que tiende a sustituirse al concepto de *tecnologías*.

Figura 6. ¿Hablar de tecnologías, o de recursos, para designar todo lo que docentes y estudiantes usan?

Por supuesto se debe cuestionar este concepto de recursos. Este cuestionamiento no es nuevo. Chevallard (1992) ya lo expresaba cuando planteaba el interrogante de la viabilidad de los objetos computacionales. Declaraba que esta viabilidad supone, más allá del software y de las situaciones que permiten su puesta en marcha, *sistemas de explotación didáctica* de estas situaciones. Más generalmente, esta perspectiva conduce a delimitar los recursos *necesarios* para la realización del proyecto de enseñanza del profesor. Gueudet et Trouche (2009) proponen una definición aun más amplia, al considerar como recurso todo lo que es disponible, lo que permite al profesor re-fundamentar su actividad, lo que abarca recursos materiales (libros de texto, software, preparaciones de cursos, recursos en línea, pizarrón blanco interactivo) y no materiales (por ejemplo las interacciones con otros profesores o con estudiantes). Los recursos aparecen entonces como un resorte y un producto de la actividad docente, la cual se puede considerar como una labor de desarrollo de recursos en el aula y fuera del aula, labor que Gueudet y Trouche (ibidem) llaman la *labor de documentación*.

Por la transición de la tecnología a los recursos se necesita ampliar la visión del desarrollo profesional de los docentes. Los problemas de integración tecnológica obligaban por ejemplo a cuestionar los resultados obtenidos con herramientas de cálculo (Figura 7). El control de las herramientas, de la calidad de los resultados que proporcionan, es algo esencial, que necesita el desarrollo de competencias complejas, tanto de los docentes como de los estudiantes (CAME 2003).

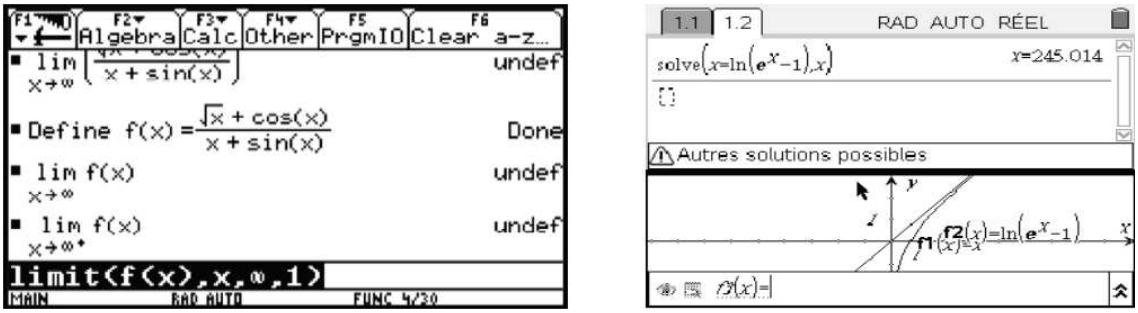

Figura 7. *Resultados falsos entregados por una calculadora simbólica*

La perspectiva "*recursos*" conlleva un cuestionamiento más amplio que la mera pregunta sobre la exactitud de un resultado. Si buscamos en Internet, por ejemplo por Google, recursos a disposición para la enseñanza de la derivada, obtenemos 1,150,000 respuestas (Figura 8). ¿Cómo asegurarse de su interés, de su calidad (didáctica, matemática, etcétera)? Y una vez que un profesor comprobó el interés de un recurso en circunstancias definidas, ¿cómo compartirlo con colegas?

Figura 8. *Controlar la calidad (epistemológica, didáctica, matemática) de un recurso en un contexto de proliferación*

Estas preguntas son esenciales en un momento de proliferación de recursos sobre el web. Para contestarlas, varias aproximaciones se pueden hoy considerar, en particular:

- una aproximación fundamentándose sobre el desarrollo de normas y estándares, es decir un conjunto de criterios que recursos deben verificar para poder apoyar la enseñanza y los aprendizajes[5],
- una aproximación fundamentándose en el desarrollo de repertorios de recursos bien descritos y garantizados; es por ejemplo lo que se hace en el sitio Educnet[6] del Ministerio francés de la Educación Nacional, con la propuesta para cada disciplina de recursos propuestos por docentes y filtrados y validados por inspectores.

Sin embargo, ninguna de estas dos aproximaciones es plenamente satisfactoria en la práctica:

- No se pueden concebir en abstracto normas y estándares, estos sólo pueden emerger en referencia a esperas y necesidades de usuarios, a procesos efectivos de desarrollo de recursos y usos.
- A menudo, los repertorios bien descritos y garantizados no satisfacen a los usuarios potenciales: Después de haber llenado cuidadosamente un formulario descriptivo del recurso deseado, uno obtendrá en muchos casos la respuesta "Ningún recurso cumple con los criterios", y cuando por

[5] Véase una buena ilustración en el proyecto canadiense *Normetic* (http://www.normetic.org/), cuyo objetivo es "la creación de un patrimonio educativo".

[6] Educnet (http://www.educnet.education.fr/), "para enseñar con las TIC".

acaso se obtenga un recurso que cumpla con los criterios, este no necesariamente se integra en el sistema de recursos del docente usuario del repertorio.

Una tercera aproximación nos parece naturalmente traída por uno de los más importantes efectos de lo numérico (Pédauque 2006), el desarrollo de comunidades en línea que da una nueva dimensión a la labor colectiva de los docentes. Es así que, desde 2003 en Francia, se manifiesta particularmente el desarrollo de comunidades de docentes "diseñadores y compartidores de recursos". La asociación más numerosa se encuentra en matemática: Sesamath (http://www.sesamath.net/), cuyo objetivo es "las matemáticas para todos" y la divisa "trabajar juntos, ayudar unos a otros, comunicar" (Figura 9, un extracto de la portada del sitio), agrupa una centena de miembros en la asociación y más de 5000 profesores de matemáticas en una federación de grupos de proyectos.

Figura 9. *El trabajo colaborativo, un medio para pensar la calidad de los recursos y el desarrollo profesional*

En una primera etapa, Sesamath puso en común los recursos de sus miembros; en una segunda etapa, formó grupos de proyectos que juntos diseñaron recursos, lo que culminó con un repertorio de varias centenas de recursos, *Mathenpoche*; en una tercera etapa, implementó procedimientos de mejora continua de los recursos, que millares de docentes pusieron a prueba y enriquecieron. En la última etapa (en la fecha de hoy), se implementó una interfaz colaborativa, *LaboMep* (Laboratorio de Mathenpoche), que permite a los docentes, individual o colectivamente, de usar recursos de la asociación, experimentarlos, apropiárselos, enriquecerlos y eventualmente subirlos de nuevo en el sitio de la comunidad. En este movimiento, mejora de los recursos y desarrollo profesional van de la mano. Por supuesto no se pueden oponer las tres aproximaciones (elaboración de normas compartidas, formación de repertorios garantizados y diseño colaborativo de recursos), hasta que se pueden considerar complementarias. Con esta perspectiva es interesante considerar programas institucionales recientes de varios países:

- En Francia, el programa Pairform@nce[7] propone rutas de formación en línea. El sitio se divide en dos partes: un catálogo de rutas y una "fábrica" donde equipos de formadores diseñan nuevas rutas y revisan antiguas a la luz de la experiencia de los usuarios. En las mismas rutas se proponen conjuntos de recursos al servicio de formaciones por parte presenciales y por parte a distancia.
  Estas formaciones tienen una misma característica: Siempre se trata de acompañar el diseño de recursos para la clase. Los alumno-docentes usan los recursos que se los proponen, diseñan juntos un recurso que cada uno experimentará en su clase, y una retro-alimentación reflexiva les permite revisar el recurso inicial. Es una real cadena de concepción, en la que un conjunto de actores (estudiantes, alumno-docentes, formadores, diseñadores del material inicial) cooperan en un procedimiento de enriquecimiento continuo de los recursos y de las prácticas.
- En México, el programa Enciclomedia parece también tener principios semejantes, por la sinergia entre una voluntad institucional y una creatividad de los profesores involucrados (Trigueros et Lozano, in progress).

A final de cuenta, la metáfora de los laboratorios es muy fructífera: Invita a echar una nueva mirada sobre el trabajo conjunto del profesor y de los estudiantes en el aula, e invita también a considerar nuevamente el trabajo colectivo de los profesores entre ellos. En fin, cambia la visión del trabajo de los investigadores, o más bien sobre el trabajo mutuo de investigadores y profesores. En un periodo de evolución rápida de los recursos de la enseñanza, surge un conjunto de preguntas complejas interrelacionadas: Se trata de esclarecer las articulaciones

[7] Programa desarrollado por el Ministerio: http://national.pairformance.education.fr

entre sistemas de recursos individuales y colectivos, entre sistemas de actividades de los profesores y sistemas de recursos, entre el desarrollo de comunidades y el desarrollo de su repertorio de recursos. En esta situación, los profesores no son objetos de estudio de los investigadores, también son sus socios, sujetos activos de procesos en los que están metidos y que también tienen que entender.

Referencias

Aldon G. *et al.* (2008), Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab, *Repères-IREM 72, French and English version at* http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/lecture/dossier_mutualisation/

CAME 2003, le site de la communauté scientifique internationale Computer Algebra in Mathematics Education http://www.lkl.ac.uk/research/came/index.html, Proceedings of the 2003 symposium, *Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment* http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims/

Chevallard, Y. (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques, le problème de l'ingénierie didactique, in B. Cornu (dir.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 183-203), PUF, Paris,

Drijvers, P., Trouche, L. (2008), From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 363-392), *Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives*

Gueudet, G., Trouche, L. (2009), Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218, http://springerlink.metapress.com/content/6600hx1254664n74/

Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (eds.) (2005), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument,* Springer, New York

Hoyles, C., Kalas, I., Trouche, L., Hivon, L., Noss, R., Wilensky, U. (2009), Connectivity and Virtual Networks for Learning, in J.-B. Lagrange, C. Hoyles (eds.), *Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain, Proceedings of the 17th ICMI studies* (pp. 439-462), Springer, New York

Kahane, J.-P. (dir.) (2000), *Informatique et enseignement des mathématiques*, en ligne http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportInfoMath/RapportInfoMath.pdf

Kuntz, G. (dir.) (2007), Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques, in *Dossiers de la VST*, en ligne http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm

Maschietto, M., Trouche, L. (online), Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* http://www.springerlink.com/content/48045470220u4073/

Pédauque, R.T. (2006), *Le document à la lumière du numérique*, C & F éditions, Caen.

Trigueros, M., Lozano, D. (in progress), Teachers teaching mathematics with Enciclomedia, in G. Gueudet, B. Pepin, L. Trouche (eds.), Mathematics curriculum material and teacher documentation: from textbooks to shared living resources, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281-307

Trouche, L. (2005), Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer l'usage des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques, *Actes de l'Université d'été « Le calcul sous toutes ses formes »*, Ministère de l'Education Nationale, en ligne http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm