Aprender de *didactikids*

UN IMPULSO PARA VOLVER A REVISAR LA LÍNEA NUMÉRICA ABIERTA (VACÍA)*

Primera parte

Marja van den Heuvel-Panhuizen[1]

En este artículo analizo las percepciones de los estudiantes como una fuente para comprender la educación. Se refiere a lo que los niños didácticamente experimentados, llamados *didactikids*, nos han enseñado acerca de la línea numérica abierta (vacía) como un modelo didáctico para enseñar cálculos con números naturales. También informa acerca de un estudio de consulta a estudiantes que se llevó a cabo en los Países Bajos. Los descubrimientos son similares a los que reveló una investigación australiana. En ambos se explica qué puede resultar erróneo cuando la línea numérica se aplica tanto rígida como incorrectamente.

La línea numérica abierta o vacía (una línea sin números o marcas) es un modelo didáctico para enseñar cálculos con números naturales en los primeros años de la escuela primaria. Los niños, a quienes llamo *didactikids*, impulsaron una reflexión sobre el tema. Se trata de verdaderos expertos didácticos cuya manera de comprender la enseñanza tal vez se deba a un padre o pariente que trabaja en educación. Todos los niños, no obstante, tienen el potencial para convertirse en *didactikids* cuando se les da la oportunidad de reflexionar sobre la educación. Como se mostrará en este trabajo, los maestros, los formadores

* Este artículo es una versión extendida de: Van den Heuvel-Panhuizen, M., "Learning from 'didactikids': An impetus for revisiting the empty number line", en *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 6-31, 2008.

[1] Traducción de Nora Da Valle y Fernanda Gallego (Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. www.gpdmatematica.org.ar).

de maestros, los investigadores y quienes desarrollan la educación matemática pueden aprender mucho de los *didactikids*.

Analizaremos algunos aspectos importantes que tienen que ver con el uso de la línea numérica abierta (vacía), basándonos en lo que estos expertos didácticos pusieron en primer plano sobre su experiencia con esta línea y con lo que puede resultar mal cuando este modelo didáctico no se implementa de la manera en que fue originalmente conceptualizado. En otras palabras, este artículo tiene dos focos: la cuestión del aprendizaje de los niños y la línea numérica abierta (vacía).

En el pensamiento habitual sobre la educación matemática, las contribuciones de los niños para el desarrollo de la enseñanza de la matemática son altamente valoradas. En los Países Bajos, Freudenthal sentó las bases para esta apreciación con las observaciones inspiradoras de sus hijos y nietos. Su meta fue construir conocimiento sobre el desarrollo cognitivo de los niños y generar pautas para la educación a través de su observación.

La creación del conocimiento didáctico fue también el objetivo de un *estudio de consulta a alumnos* que llevé a cabo hace poco. Sin embargo, en él, las pautas que se idearon para enseñar matemática fueron adquiridas de una manera diferente. En lugar de observar el desarrollo de los niños, yo les pregunté directamente acerca de su experiencia didáctica. La parte principal de este artículo es precisamente un informe de este estudio, donde entrevisté a dos niñas sobre sus pensamientos acerca de algunos temas de aprendizaje determinados y del enfoque que ellas elegirían si enseñaran a otros niños.

Uno de los tópicos que conversé fue la línea numérica abierta (vacía). Para ellas, la línea numérica parecía ser un factor limitante, y la entrevista aclaró por qué. Luego de un cuestionamiento mayor, se descubrió que la forma en que se les había enseñado la línea numérica había contribuido a sus ideas negativas sobre la utilidad de dicha línea. Más adelante en la entrevista, estos *didactikids* revisaron su opinión y dieron una propuesta útil.

Después de conducir la consulta a estudiantes en los Países Bajos, me enteré de un estudio similar realizado en Australia en el cual Janette Bobis entrevistó a su hija sobre la línea numérica abierta (vacía).[2] Los resultados de ambos estudios son llamativamente similares. Ambos apoyan la conclusión de que la forma en que se les pide a los niños trabajar con la línea puede ser perjudicial en el desarrollo de su habilidad para operar con números. Tomé las experiencias de estos estudios como punto de partida para revisar los resultados de otras investigaciones y enfoques de la línea numérica abierta (vacía) a fin de llegar a una

[2] Bobis, J. y E. Bobis, "La línea numérica abierta (vacía): Haciendo visible el pensamiento de los niños", en M. Coupland, J. Anderson y T. Spencer (eds.), *Haciendo la matemática vital: Procedimientos de la 20ª conferencia bienal de la Asociación Australiana de Profesores de Matemática* (pp. 66-72), AAMT, Sydney, 2005.

mejor comprensión de los aspectos clave del uso de esta línea como un modelo didáctico para enseñar cálculos con números naturales. En este artículo resumo mi proceso de investigación.

Las percepciones de los niños como una fuente de comprensión de la educación

Desde el comienzo del proyecto de reforma en 1968, *Wiskobas*, que luego se transformó en la Educación Matemática Realista (EMR),[3] siempre ha habido una gran cantidad de contribuciones desde los niños en el desarrollo de la educación matemática holandesa. De acuerdo con La Bastide-Van Gemert,[4] observar a los niños podría considerarse como el aspecto más innovador del trabajo desarrollado por *Wiskobas*.

El fundamento para este enfoque fue realizado por las observaciones que Freudenthal hizo de sus hijos y sus nietos. Él dio un buen ejemplo a otros. No fue sólo el nieto de Freudenthal, Bastian,[5] quien mostró cuán altas están las nubes en el cielo en un día soleado en comparación con las nubes que son precursoras de lluvia, sino también el hijo de Streefland, Coen,[6] quien pensó que la ballena en un póster fue representada demasiado grande.

Las observaciones que se llevaron a cabo de Bastian y Coen abrieron nuestros ojos a las entradas cualitativas del concepto de razón, la relación entre razón y medida, y las raíces visuales de la razón. Todos estos aspectos son muy importantes para la enseñanza de la razón y constituyeron descubrimientos didácticos en los días de la enseñanza mecánica de la matemática.

Freudenthal no sólo dio un buen ejemplo para consignar "observaciones incidentales",[7] también indicó el punto crucial de estas observaciones: "Lo que cuenta (en los procesos reales de enseñanza), son las discontinuidades, los saltos".[8] Esto es, son los descubrimientos propios de los niños los que marcan los saltos en su desarrollo. Freudenthal creía que tenemos que observarlos individualmente para seguir las huellas de estos descubrimientos.

---

3 *Ver* para una visión concisa Van den Heuvel-Panhuizen "La Educación Matemática Realista en los Países Bajos", en J. Anghileri (ed.), *Principios y prácticas en la enseñanza de la aritmética: Enfoques innovadores para las aulas primarias*, pp. 49-63, Universidad de Prensa Abierta, Buckingham, Filadelfia, 2001a.

4 La Bastide-Van Gemert, S., *"Elke positieve actie begint met critiek". Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde ("La crítica es el comienzo de toda la acción positiva". Hans Freudenthal y la didáctica de la matemática)*, Uitgeverij Verloren, Hilversum, 2006.

5 *Ver* Freudenthal, H., "Aprendiendo procesos", conferencia en una presentación de la reunión de NCTM en Boston, 18 de abril de 1979; Van der Velden, B., "Entre 'Bastiaan ou de l'éducation' y 'Bastiaan unddie Detektive'", en *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, núm. 6, pp. 201-202, 2000.

6 *Ver* Van den Brink, J. y L. Streefland, "Niños pequeños (6-8): Razón y proporción", en *Estudios Educacionales en Matemática*, núm.10, pp. 403-420, 1979.

7 *Ver* Freudenthal, *Appels en peren / wiskunde en psychologie (Manzanas y peras / matemática y psicología)*, Van Walraven, Apeldoorn, p. 101, 1984,

8 *Idem.*, p.103.

> Si tomamos el promedio de un número de niños, achatamos los saltos. El niño promedio, en realidad, muestra un desarrollo continuo. Pero si miramos más detenidamente al individuo, veremos los saltos, y en cuanto a mí concierne, ellos son lo único que interesa.[9]

Al respecto, Freudenthal, en contra de las ideas de la época, expuso la fuerza de la evidencia del pequeño caso cualitativo como objeto de investigación.[10] Y, además, encontró la confirmación para esto en la ciencia: "Sólo un péndulo de Foucault fue suficiente para demostrar la rotación de la Tierra".[11] En alguna otra parte él enfatizó: "Una buena observación puede ser más valiosa que cientos de tests o entrevistas".[12] En ocasión del cumpleaños 75 de Freudenthal, Van der Brink[13] se refirió a los niños que estaban siendo observados como a "niños que enseñan".

La investigación de Freudenthal consistió mayormente en observaciones incidentales. Él rara vez realizó experiencias intencionales[14] y no le gustaban las encuestas o listas de opiniones para maestros y alumnos.[15] Según él, éstas sólo producían reacciones inútiles, poco confiables o predecibles. Aunque comprendo su punto de vista y comparto su escepticismo, pienso que Freudenthal habría emitido un juicio diferente si hubiese entrevistado a niños *sobre* educación. A pesar de todos los argumentos a favor de hacer uso del conocimiento de los alumnos, la investigación de sus percepciones no es una práctica de investigación bien establecida.[16] De todas maneras, como mostraremos en lo que sigue, los estudios que se han realizado revelaron que las perspectivas de los niños acerca de la educación podrían traer un nuevo conocimiento de las aulas.

Algunos descubrimientos generales acerca de las percepciones de los alumnos acerca de la educación

Esta apelación directa a las destrezas de los alumnos en el área de la educación es lo que yo tenía en mente con mi estudio de consultas a alumnos. Pero antes

---

9 *Idem.*, p.103. (Algunas citas en este artículo son traducciones de la autora del holandés del texto original).
10 Freudenthal, H., 1979, *op. cit.*
11 Freudenthal, H., 1984, *op. cit.*, p. 101.
12 Freudenthal, H., 1984, *op. cit.*, p. 19.
13 Van den Brink, J. y L. Streefland, "Onderwijzende kinderen" ("Niños que enseñan"), en IOWO, *Kijk op Hans (Una mirada a Hans)*, IOWO, Utrecht, p. 6, 1980.
14 Freudenthal, H., 1984, *op. cit.*
15 Freudenthal, H., *Sacando malezas y sembrando. Prefacio de una ciencia de la educación matemática*, Reidel, Dordrecht, 1978; Freudenthal, H., "Ontwikkelingsonderzoek" ("Investigación para el desarrollo"), en K. Gravemeijer y K. Koster (eds.), *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek (Investigación, desarrollo e investigación para el desarrollo)*, OC&OW, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1988.
16 Keitel, C., "Los valores en la práctica de la enseñanza de la matemática: La perspectiva de los alumnos", trabajo presentado en la Conferencia del Estudio de la Perspectiva del Alumno, Equipo Internacional de Investigación, Universidad de Melbourne, 1 a 3 de diciembre de 2003.

de describir este estudio, me gustaría explorar más lo que se sabe acerca de las percepciones de los alumnos respecto de la educación. Mi objetivo especial en esta reseña es ver si las percepciones de los alumnos se utilizan como sugerencias sobre cómo enseñar. Descubrí que los estudios que investigan cómo los alumnos perciben la educación matemática son escasos, por lo que esta reseña incluye estudios de otras materias, no sólo de matemática. Este trabajo comprende todos los niveles de alumnos desde preescolar y jardín de infantes (kínder) hasta la universidad.

Para comenzar, es importante comprender que hay diferentes interpretaciones de las percepciones de los alumnos. Por ejemplo, Fraser[17] hace una distinción entre las percepciones de la enseñanza real o experimentada de las percepciones de la enseñanza ideal o preferida, mientras que McRobbie, Fisher y Wong[18] distinguen entre las percepciones de los alumnos respecto de la clase completa en contraste a las percepciones de la enseñanza en cuanto a los papeles personales de los alumnos o los subgrupos en situaciones de aprendizaje.

Lo que tienen en común todos estos estudios es que reportan que investigar las interpretaciones de los alumnos en cuanto a lo que sucede en las aulas proporciona, tanto a practicantes como a investigadores, información valiosa. Por ejemplo, Dahlberg, Moss y Pence, que investigaron la calidad del cuidado en la primera infancia, dicen "los niños tienen una voz propia, y deberían ser escuchados como un medio de tomarlos en serio, involucrándolos en un diálogo democrático y en la toma de decisiones y comprensión de la niñez".[19] Spratt[20] resaltó el papel que los alumnos pueden desempeñar en el diseño de materiales y currículo.

El patrón principal que surge es que las percepciones de los alumnos difieren claramente de las de los maestros. A menudo, estos últimos se sorprenden cuando se enteran de los pensamientos y sentimientos de sus discípulo.[21] En algunos casos, en especial en lo que concierne a las evaluaciones de las innovaciones educativas, estas discrepancias son alarmantes. Por ejemplo, en una investigación que llevó a cabo a nivel de secundaria, Hagborg[22] encontró diferen-

---

17 Fraser, B. J., "Ambientes para la enseñanza de la ciencia: Evaluación, efectos y determinantes", en B. J. Fraser y K. G., Tobin (eds.), *Manual internacional de la educación de la ciencia*, Parte uno, pp. 527-564, Kluver, Londres, 1988.

18 McRobbie, C. J., D. L. Fisher y A. F. L. Wong, "Formas personales y de la clase de los instrumentos ambientales del aula", en B. J. Fraser y K. G. Tobin (eds.), *Manual Internacional de la educación científica*, Parte uno, pp. 581-594, Kluwer, Londres, 1998.

19 Dahlberg, G., P. Moss y A. Pence, *Más allá de la calidad de la educación y el cuidado en la primera niñez: Perspectivas Posmodernas*, Falmer, Londres, p. 49, 1999.

20 Spratt, M., "How good are we at knowing what learners like?", en *System*, núm. 27, pp. 141-155, 1999.

21 Barkhuisen, G. P., "Descubriendo las percepciones de la clase de ESL (alumnos que aprenden inglés) de las actividades de enseñanza-aprendizaje en el contexto Sudafricano", en *TESOL Quarterly*, núm. 32 (1), pp. 85-107, 1998.

22 Hagborg, W. J., "Las percepciones de los alumnos y maestros de los métodos de instrucción en las clases y procedimientos de evaluación", en *Evaluación y Planificación del Programa*, núm. 17 (3), pp. 257-260, 1994.

cias notables entre maestros y alumnos cuando se examinaron los métodos de instrucción. A menudo las apreciaciones de alumnos y maestros revelaron que los primeros veían los métodos de instrucción como limitados en su visión y centrados en el maestro (por ejemplo: conferencias y trabajos en los cuales los alumnos debían permanecer sentados), mientras que los maestros consideraron que sus propios métodos de instrucción abarcaban una amplia variedad de métodos y requerían una participación activa de los alumnos (por ejemplo: trabajo en grupos pequeños).

Otra demostración de una diferencia clave entre las percepciones de maestros y alumnos se describe en un estudio japonés llevado a cabo en el marco del *Estudio de la perspectiva del que aprende* (LPS).[23] Como reportó Clarke,[24] la estructura distintiva de la investigación del LPS fue la grabación en video de una secuencia de diez lecciones seguidas de entrevistas posteriores a las lecciones en las cuales los estudiantes y maestros vieron los videos individualmente y se les preguntó al respecto. Se pidió a los sujetos que fueron investigados que avanzaran en el video a partes de la lección que parecieran importantes para ellos y explicaran qué había sido notable. En el estudio de Shimizu[25] que utilizó este procedimiento, los datos fueron recolectados en tres escuelas secundarias públicas en Tokio, y muchos de los estudiantes fueron llevados a avanzar en lo que sus maestros consideraban la esencia ("Yamaba") de la lección.

Un aspecto que tal vez tenga un papel preponderante en las discrepancias entre las percepciones de alumnos y maestros es el de las diferentes preferencias respecto a las actividades en el aula. Spratt[26] observó que los maestros no tienen una idea clara de las preferencias de los alumnos por determinadas actividades. Cuando Spratt[27] investigaba a estudiantes que aprendían inglés a nivel terciario en Hong Kong, encontró que los maestros fueron capaces de evaluar las preferencias de los estudiantes con precisión en sólo 50% de las actividades. Según el autor, este hallazgo tiene consecuencias de largo alcance para la toma de decisiones informadas en educación por parte de los maestros, y para aquellos que están involucrados en el diseño educacional. Esto podría eventualmente tener implicancias considerables para la efectividad de la instrucción. Como expresó Kumaravadivelu,[28] "cuanto más angosta sea la brecha entre la intención del

---

[23] *Ver:* www.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lps.

[24] Clarke, D. J., Comunicación personal, 2005.

[25] Shimizu, Y. , "Las discrepancias en las percepciones de la estructura de las lecciones entre el maestro y los alumnos en el aula de matemática", trabajo presentado en el simposio *Perspectivas Internacionales en las Aulas Matemáticas*, en la Reunión Anual de la Asociación Americana de Investigaciones Educacionales, Nueva Orleans, 1 a 5 de abril de 2002.

[26] Spratt, M., 1999, *op. cit.*

[27] *Idem.*

[28] Kumaravadivelu, B., "Tareas de aprendizaje de la lengua: La intención del docente e interpretación del alumno", en *Periódico de Aprendizaje del Idioma Inglés*, núm. 45(2), p. 98, 1991.

docente y la interpretación del alumno, mayores serán las oportunidades de lograr los objetivos de aprendizaje deseados". Spratt[29] también planteó la cuestión de las preferencias de los estudiantes por un trabajo de aula más tradicional y mencionó otros tres que llegaban a esta misma conclusión. En el área de la educación matemática, este conservadorismo de los estudiantes impide a los maestros cambiar su práctica, como demostraron Desforges y Cockburn.[30]

Los niños pequeños son también muy capaces de dar una muy buena descripción de lo que sucede en las aulas. Wing[31] estudió un jardín (kínder) y un aula de 1° y 2° grado durante un año de clases. Durante este tiempo ella entrevistó a 14 niños de cada grupo. El estudio mostró que "en contraste con la máxima de la primera infancia que 'el juego es el trabajo de un niño', en las mentes de los niños, el juego no es trabajo".[32] Los niños tenían una visión clara acerca del trabajo y del juego, y no los engañaban las actividades de trabajo disfrazadas de juegos. El juego y el trabajo "representaron diferentes experiencias para los niños, a pesar del hecho de que sus maestros intentaron hacer el trabajo como si fuera un juego incorporando materiales manipulables, dando a los niños la posibilidad de elegir, y fomentando la exploración y el descubrimiento".[33] En un estudio posterior de Wiltz y Klein,[34] se investigaron las percepciones de niños en guarderías. Wiltz y Klein encontraron que los niños de 4 años demostraban una conciencia y comprensión de los procedimientos y las actividades, y verbalizaban esta información con precisión en formas secuenciales y descriptivas.

La impresión general de los estudios mencionados es que el conocimiento de los niños de lo que está sucediendo en el aula podría ser una fuente valiosa para comprender la enseñanza y encontrar cómo podemos enseñarles matemática de la mejor manera posible. Para estudiar los procesos complejos en las aulas, los investigadores han desarrollado diseños de una complejidad creciente y métodos de recolección de datos y análisis, pero una mejor comprensión podría encontrarse más cerca. Este enfoque resalta la experiencia y destreza didáctica de los niños. El darles el papel de asesores educacionales no es frecuente en la investigación de la educación matemática. Para referirme a esta negligencia, llevé a cabo el estudio que se describe en la siguiente sección.

---

29 Spratt, M., 1999, *op. cit.*

30 Desforges, C. y A. Cockburn, *Comprendiendo al maestro de matemática. Un estudio de la práctica en primeras escuelas*, Falmer, Londres, 1987.

31 Wing, L. A., "El juego no es el trabajo del niño: Las percepciones de los niños pequeños del trabajo y el juego", en *Publicación Trimestral sobre La Primera Niñez*, núm. 10, pp. 223-247, 1995.

32 *Idem.*, p. 227.

33 *Ibidem*.

34 Wiltz, N. y E. L. Klein, "¿Qué se hace en el jardín maternal? Las percepciones de los niños de las aulas de alta y baja calidad", en *Publicación Trimestral de la Investigación sobre la Primera Infancia*, núm. 16, pp. 209-236, 2001.

El estudio de consulta a los alumnos

El objetivo del estudio de consulta que conduje consistió en pedir a dos alumnas un consejo detallado sobre una amplia gama de temas con determinado papel en la educación matemática. Se tomó el enfoque de un caso de estudio con dos alumnas a quienes se les realizó una consulta acerca de sus opiniones y preferencias sobre varios aspectos de la educación matemática. Las niñas son gemelas de 11 años, Ylja y Joni, que asisten a la misma escuela. Ambas cursan 5° grado, aunque no están en el mismo grupo.

Figura 1. Ylja y Joni señalan cuáles problemas les gustan y cuáles no.

Ylja y Joni fueron invitadas a participar en esta consulta a estudiantes. Su participación en investigaciones anteriores las había involucrado en probar una serie de problemas; éstos se crearon para investigar con qué grado de corrección los niños que son buenos en matemática se desempeñan en la resolución de problemas tipo rompecabezas.[35] Ylja y Joni no sólo disfrutaron de la resolución de estos problemas sino que espontáneamente proveyeron muchas sugerencias para una mejor manera de enseñar a alumnos destacados.

Ylja y Joni no son alumnas promedio, pero eso no significa que sean participantes de investigación inadecuadas. El objetivo de esta consulta a estudiantes no sólo fue extraer conclusiones generales válidas sobre lo que los alumnos

[35] *Ver:* Van den Heuvel-Panhuizen, M. y C. Bodin-Baarends, "Todo o nada: La resolución de problemas por niños con logros altos en matemática", en *Periódico de la Sociedad Coreana de educación Matemática*, núm. 8(3), pp. 115-121, 2004.

piensan acerca de la educación matemática, sino también comprender mejor el aprendizaje y la enseñanza de la matemática escuchando lo que los niños tienen que decir acerca de la práctica de enseñanza.

Para este estudio de consulta, se entrevistó a Ylja y Joni dos veces: una entrevista exploratoria y una más extensa. Los temas de las entrevistas incluyeron resultados recientes de investigación y nuevas cuestiones relacionadas con la educación.

Primera entrevista

La primera entrevista duró una hora y media, y se hizo con intenciones exploratorias. Aquí Ylja y Joni pudieron hablar libremente acerca de sus experiencias con la educación matemática. Como introducción, les dije que yo quería encontrar la mejor manera de enseñar matemática a los niños y cómo mejorar la educación matemática. La respuesta de Ylja y Joni a esta introducción fue notable, pero totalmente de acuerdo con la manera en la cual me dirigí a ellas. No se sintieron intimidadas. No hubo risitas entre ellas. Las traté como expertas y ellas reaccionaron en consecuencia.

La primera entrevista no fue grabada en audio o video: tomé algunas fotografías y escribí notas. Estas notas no son un informe completo palabra por palabra.

Un tema central en la primera entrevista fue ver si Ylja y Joni pensaban que la matemática era o no una materia divertida y por qué. La siguiente es una impresión de lo que se dijo respecto a este tema.

Gusto/disgusto por la matemática. Aunque Ylja y Joni eran buenas en matemática, ninguna de ellas expresó gusto por esta materia.

> YLJA: *Lo que a mí no me gusta es que uno siempre tiene que hacer los mismos problemas como 84 x 62. Otra cosa que no es divertida tampoco es cuando los chicos en la clase no entienden determinados problemas y el maestro comienza a explicar estos problemas nuevamente a todo el grupo. Entonces se empiezan a oír las quejas de los niños. Siempre hay niños que tienen dificultades para entender los problemas. Eso no es tan malo. Todos tenemos cosas particulares que nos resultan difíciles, dificultades.*

> JONI: *Sería bueno si hubiera un arreglo particular (como) los que lo entienden puedan hacerlo solos; los que no, puedan obtener más explicación. La regla ahora es que todos recibimos más explicación.*

Otra razón que dieron Ylja y Joni para explicar por qué no les gustaba la matemática fue que no era lo suficientemente retadora. Una cosa que les disgustaba en especial era escribir mucho para resolver los problemas matemáticos.

> YLJA: *Me gusta que existan las abreviaturas* (sic.).

Además, a ellas les disgustaba tener que resolver muchos problemas. Los problemas no deberían llevar mucho tiempo. De todas maneras, a ellas les gustaba pensar sobre problemas. Extendiéndose en esto, Joni dijo:

JONI: *El docente siempre está explicando cómo resolver un problema, pero no porque esto sea verdad.*

YLJA: *Uno no puede comprobar todo; por ejemplo 1 + 1 = 2. He leído acerca de esto en "El demonio del número."*

JONI: *Los niños de la clase se preguntan unos a otros a menudo por qué no se permite determinada estrategia o por qué es correcta, también.*

Ylja aclaró que ella no sabe por qué los niños se hacen estas preguntas entre ellos y por qué no le preguntan al docente.

YLJA: *Ésa es una pregunta difícil.*

Como Ylja y Joni estaban muy ansiosas por decirme lo que pensaban acerca de las series de libros de texto, se decidió tomar el uso del libro de texto como uno de los puntos a discutir más a fondo en la segunda entrevista.

Segunda entrevista

La segunda entrevista fue más estructurada y se les pidió que reaccionaran ante un número de hallazgos de la investigación o nuevas cuestiones sobre la educación matemática o educación en general. Las niñas fueron consultadas en diez aspectos en total:

1. ¿Cuál es la mejor manera de enseñar a los niños que no son fuertes en matemática?
2. ¿Es posible aprender algo cuando uno está dormido?
3. ¿Ayuda mascar chicle durante una prueba de matemática?
4. ¿Cuáles son tus ideas acerca de una escuela de vacaciones?
5. ¿Cómo debería usar un maestro la serie de textos *Pluspunt*?
6. Suponiendo que fueras a iniciar una escuela, ¿cómo sería esta escuela?
7. ¿Es la matemática una materia escolar rara? ¿Por qué?
8. ¿Cuáles son tus ideas sobre la práctica?
9. ¿Ayuda una línea numérica abierta a resolver problemas?
10. ¿Qué opinas de las lecciones de matemática? ¿Qué harías diferente?

Los temas se presentaron en *PowerPoint*. En cada punto, primero se dio información a los niños, después de la cual se los invitó a dar sus opiniones. Por ejemplo, en el caso de la pregunta 1, se mostró un recorte de periódico acerca de investigaciones realizadas en la educación especial. Luego se explicó el resultado de la investigación más importante, es decir, que enseñar una particular estrategia para la resolución de problemas numéricos resultó ser la mejor estrategia para los alumnos con dificultades. Después, se les preguntó a Ylja y Joni qué pensaban de este hallazgo. Se grabó la entrevista completa en video, que llevó alrededor de dos horas, y el sonido de la grabación de video se transcribió al pie de la letra.

La visión de Ylja y Joni acerca de la línea numérica abierta

De los diez puntos que fueron presentados a Ylja y Joni, sólo uno se analiza en este trabajo: el uso de la línea numérica abierta (vacía).

La línea numérica abierta (vacía) como un modelo didáctico
Una breve reflexión antes de la investigación

La línea numérica abierta (vacía) es uno de los modelos didácticos más importantes para enseñar cálculos con números hasta 100 y 1000 dentro de la *Educación Matemática Realista.*[36] Este modelo ha sido aceptado ampliamente en los Países Bajos. Los que realizan el desarrollo del currículo, los maestros y los investigadores enfatizan su importancia. Su uso es un modelo mental flexible para apoyar la suma y la resta, más que una línea para medir en la cual se puede leer los resultados exactos de las operaciones. Las líneas numéricas también se hallan en todas las versiones nuevas de los textos de matemática, aunque no siempre se usan como se concibieron.

Entrevista, pregunta 9

Para introducir el tema, se presentó a las niñas el siguiente problema:

$$386 + 298 = \_\_\_\_\_$$

El problema se presentó con una representación horizontal. Sin otra instrucción acerca de cómo resolverlo, Ylja y Joni fueron invitadas a encontrar la respuesta. Sin dudar, ambas comenzaron a hacer el algoritmo que se muestra en las figuras 2a y 2b. Las dos usaron el método algorítmico de cifrado.

[36] *Ver, por ejemplo:* Treffers, A., "El trasfondo didáctico de un programa matemático para la educación primaria", en Streefland (ed.), *La Educación Matemática Realista en la Escuela Primaria* (pp. 21-56 Prensa CD-β/ Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.), *Los niños aprenden matemáticas. Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria*, Correo del Maestro y La Vasija, México, 2010.

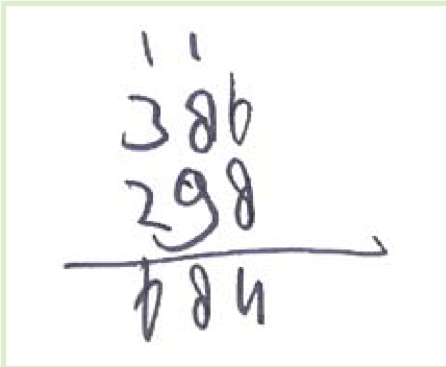

Figura 2a. El trabajo de Ylja.

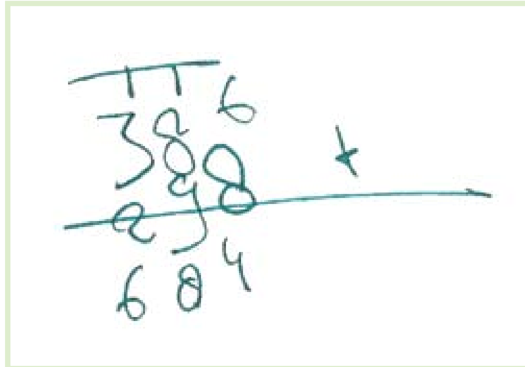

Figura 2b. El trabajo de Joni.

Cuando les pregunté si había otra manera de hacerlo, ellas mencionaron la estrategia de cálculo en columna. Ésta es más o menos estándar en los Países Bajos como la primera etapa en una estrategia escrita de cifrado.[37] En ella, los números se procesan como números completos más que como dígitos individuales (*ver* fig. 3). Ylja y Joni consideraron esto más sencillo que realizar una resolución de algoritmo cifrado.

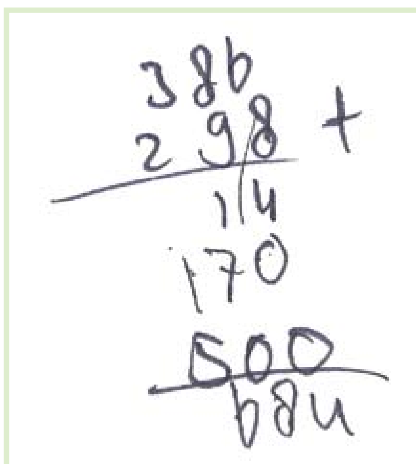

Figura 3. La demostración de Ylja de una estrategia de cálculo en columnas.

Cuando se preguntó a las niñas si este problema podría haber sido resuelto usando la línea numérica, emergió su frustración.

JONI: *Puede ayudar, si uno no entiende todas las demás formas que pueden usarse para la resolución de estos problemas.*

[37] *Ver:* Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.), 2010, *op. cit.*

YLJA: *En realidad, de todos los años de matemática, el más tonto es 2° grado porque sigue insistiendo sobre la línea numérica…*

JONI: *Uno tiene que hacer casi todo con la línea numérica.*

YLJA: *No se te permite usar cualquier otra manera. Tienes que usar la línea numérica.*

JONI: *Por lo que sé, la línea numérica es para niños que no son tan buenos en matemática.*

YLJA: *Ves, para ellos es muy fácil, una línea numérica, para calcular algo paso por paso.*

JONI: *…para algunos niños la línea numérica es más rápida que calcular uno debajo de otro, simplemente porque ellos no entienden cómo calcular uno debajo de otro…*

Luego intenté impulsarlas a considerar la opción de aplicar una estrategia de cálculo ingenioso en la cual 386 más 298 se cambia a 386 más 300 menos 2, la cual no funcionó:

YO: *Pero mira los dos números.*

Joni e Ylja comenzaron a explicar su percepción del itinerario longitudinal de aprendizaje:

JONI: *(…) nosotros aprendemos, por ejemplo, la línea numérica primero. En tercer grado nos colocamos entre barras. (Esto significa con líneas de posición que dividen unidades, decenas y centenas). En 4° grado aprendemos uno debajo de otro, así (cálculo en columna). En 5° grado aprendemos así, uno debajo de otro (ella se refiere al cálculo algorítmico del método de cifrado). Para mí, esto podría ir más rápido (…)*

YLJA: *En 3° tienes que calcular entre barras. Yo realmente no sé más cómo funciona eso. Entonces no lo puedo mostrar. O con una línea numérica (…).*

Se hizo otro intento más para llevarlas a considerar la estrategia ingeniosa.

YO: Mira los números. ¿Qué tienen de especial? Si tuvieras que hacer una estimación de la respuesta de esta suma.

JONI: *Entonces haría trescientos más trescientos…*

YO: Pero también puedes mantener el 386 intacto, y luego decir…

JONI: *Yo hago eso, pero luego de repente se transforma en algo mucho más fácil, entonces es sólo 686 menos 2.*

JONI: *(…) en 4° grado, cuando los niños quieren hacer trucos con ceros, por ejemplo, en la suma, no, con la multiplicación o división (el maestro dice) "ahora* *ustedes van a aprender cómo debería hacerse" (…) y en 5° grado uno aprende trucos para sacarlo correctamente.*

JONI: *Y éste, por ejemplo, es uno de esos trucos.*

YO: ¿Es un truco?

YLJA: *Bueno, sí, en realidad es más fácil calcularlo con un truco.*

JONI: *(Éste es) un truco para un cálculo más simple. Excepto cuando estamos aprendiendo –algunos niños ya han descubierto este truco, ya lo están usando en su cabeza– pero estamos aprendiendo otras cosas primero.*

YLJA: *No estamos aprendiendo realmente esto en la escuela.*

YO: ¿No están aprendiendo esto?

YLJA: *Sí, los niños, muchos niños lo están usando, pero nunca se explica. Entonces los que no piensan en esto no lo pueden usar de una manera rápida y simple.*

YO: Entonces cuando yo les pido "calculen este problema", ¿ustedes están yendo casi automáticamente a poner los números uno debajo del otro y lo calculan?

YLJA: *Sí, pero yo realmente no había mirado bien este problema. Yo por lo general me fijo, "Oh, espera, es más rápido de esta manera."*

JONI: *A menudo dice (en el texto)… Algunas veces dice "calcula" y otras veces dice "calcula de manera ingeniosa".*

YLJA: *Y luego tú cambias. Si dice, "Calcular de manera ingeniosa" inmediatamente tratas de descubrir cómo lo puedes hacer de la manera más fácil.*

Pero Joni todavía no estaba convencida de que usar la línea numérica fuera una manera ingeniosa.

JONI: *Puede ayudar, puede ayudar aún muy bien, pero para los niños que pueden hacer otras cosas buenas también, una línea numérica es sólo una pérdida de tiempo. Es incómoda.*

Luego yo mostré una solución utilizando la línea numérica (*ver* fig. 4).

Figura 4. Solución en una línea numérica abierta (vacía).

YO: (…)tú haces un salto grande de trescientos, y luego dos para atrás.

YLJA: *Sí, pero ésa no es la manera como aprendimos la línea numérica. Nosotros realmente aprendimos que primero sumas doscientos, luego noventa y luego ocho.*

JONI: *Nosotros no…*

YLJA: *Esta manera…*

JONI: *(Realmente no usamos esto demasiado.) Muy ocasionalmente puede ser.*

YLJA: *En el momento en que nosotros como que le tomamos la mano a esto, ya estábamos haciendo estos pasos de memoria.*

Yo volví a las experiencias frustrantes de Ylja y Joni con la línea numérica.

YO: ¿Pero no tienen buenos recuerdos de esto?

AMBAS NIÑAS: *No…*

YO: ¿Me podrían explicar por qué?

YLJA: *Porque tú siempre tenías que usarla, siempre (…) Entonces tenías un problema frente a ti y te decían: "Debes usar la línea numérica."*

JONI: *Y había tan poca variación. Casi siempre cuando teníamos un problema de suma o resta, siempre teníamos que usarla.*

YO: Entonces, ¿ustedes lo hubieran hecho de manera diferente?

YLJA: *Sí. (…) Porque la línea numérica misma es muy útil. La línea es muy clara para algunos niños, (…) pero tan pronto como sabes otra manera de calcular esos números, esa clase de problemas, ya no la necesitas más. Porque hay tantas maneras diferentes de hacerlo…*

JONI: *…y que son más rápidas.*

YO: (…) rápido también, cuando ya no necesitas dibujar la línea numérica pero la tienes en tu cabeza, como si ahí estuviera.

AMBAS NIÑAS: *¡Sí!…*

JONI: *Pero entonces tú todavía la estás usando.*

YLJA: *Entonces, como que, primero aprendes la línea numérica. Después te la aprendes de memoria, y luego, como que puedes explicar lo que hiciste en tu cabeza. Es realmente lo mismo que la línea numérica. Y tan pronto como los niños entienden eso, ellos cambian, "Hey, yo puedo hacer la línea numérica en mi cabeza", ellos usan esa línea numérica en su mente.*

Volviendo a mirar la pregunta 9 de la entrevista

La primera cosa que resaltó con las respuestas de las dos niñas es lo profesionales que fueron Ylja y Joni al discutir la didáctica de la matemática, pues a veces sonaban como maestras calificadas. Con poco esfuerzo, ellas marcaron el itinerario de aprendizaje recomendado para cálculos con números naturales –algo que los maestros no son siempre capaces de hacer. En la Evaluación Nacional de Logros en la Educación más reciente (PPON), que se llevó a cabo en los Países Bajos, cerca de 20% de los maestros de 2° y 3er grado indicaron que ellos no sabían cuándo se comenzaba a enseñar el cálculo en columnas.[38]

La respuesta a la pregunta 9 de la entrevista es también reveladora en cuanto a la aplicación de estrategias ingeniosas de cálculo como 386 + 300 - 2. Estas estrategias pueden caer en la categoría de "trucos" y parecería que no se enseñan en la escuela, sino sólo se aplican cuando se piden. Lograr que los niños recurran a estrategias ingeniosas de cálculo requiere colocarlos en el camino correcto primero.

Lo que hace a esta situación más preocupante es que, en este caso, las entrevistadas fueron dos niñas buenas en matemática, quienes tienen conocimiento numérico y habilidades que les permiten usar estrategias de cálculo ingeniosas, pero que aparentemente no han desarrollado esta habilidad en la escuela. Esto coincide con los resultados del estudio mencionado que investigaba cómo niños de 4° grado con alto rendimiento resolvían problemas matemáticos tipo rompecabezas. Aunque los alumnos participantes habían sido identificados como de alto rendimiento en matemática, no tuvieron mucho éxito al resolver problemas de este tipo[39] y no les fue tan bien como se esperaba en todos los aspectos de la resolución de problemas. No sabemos el papel que desempeña la enseñanza cuando los niños no aplican espontáneamente su conocimiento sobre los números y las propiedades de las operaciones, pero los pensamientos de Ylja y Joni acerca de la línea numérica nos dan una pista.

Claramente, Ylja y Joni encontraron que para ellas la línea numérica abierta (vacía) es algo forzado. Esto es preocupante porque la línea numérica abierta (vacía) se concibió como un modelo flexible que debería dar a los alumnos mucha libertad, y esto incluye tanto flexibilidad en la forma de registrar los resultados como en los saltos que los niños hacen para resolver problemas. Sin embargo, Ylja y Joni no experimentaron realmente esta libertad. En 2° grado no tuvieron más opción que usarla de una manera prescrita, lo cual les disgustaba. Para ellas, trabajar con la línea numérica significó hacer cálculos paso a paso, y los atajos no estaban permitidos.

---

[38] *Ver:* Kraemer, J. M., J. Janssen, F. van der Schoot y B. Hemker, *Balans (31) van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4 (Reporte (31) de la educación matemática en la mitad de la escuela primaria).* Cito, Arnhem, 2005.

[39] Van den Heuvel-Panhuizen, M. y C. Bodin-Baarends, 2004, *op. cit.*

También llama la atención que Ylja y Joni no se dieron cuenta de que dichos atajos son posibles en una línea numérica. Ellas eligieron el cálculo algorítmico de operar con dígitos porque es más rápido. Pero no habían considerado un cálculo mental fácil. Aquí nuevamente podemos pensar sobre la influencia que tiene la enseñanza.

Desde la introducción de la línea numérica en la educación matemática holandesa a finales de la década de 1980, el modelo ha sido enseñado tanto de manera prescriptiva como no prescriptiva.[40] Treffers[41] está de acuerdo con esta última, que es también el enfoque que sostiene la mayoría de los especialistas en didácticas de la matemática en los Países Bajos. A pesar de esto, el uso flexible de una línea numérica abierta (vacía) no siempre se ve reflejado en los libros de texto. Más aún, no todos los libros de texto usan la línea numérica abierta (vacía) como el primer modelo para guiar las operaciones hasta 100. Por ejemplo, la primera edición de la serie de textos *Pluspunt*[42] enfatizó la descomposición decimal (en unidades y decenas) y el uso de materiales concretos que se pueden manipular para presentar y procesar los números. En este enfoque es posible reconocer exactamente el procedimiento de cifrado que Ylja y Joni eligieron para resolver el problema. Por otra parte, en la nueva versión de *Pluspunt*, la posición didáctica de la línea numérica abierta (vacía) ha sido fortalecida.[43] De todas maneras, esto no fue de gran ayuda para Ylja y Toni, a quienes se les enseñó con esta versión.

Experiencias de un didactikid *australiano*

Por supuesto, Holanda no es el único país que tiene sus *didactikids*; en Australia también hay. Janette Bobis me contó de un intercambio de opiniones que tuvo con su hija de 9 años, Emily, acerca de la enseñanza de la matemática. El tema que discutieron fue precisamente la línea numérica abierta (vacía), y en particular los escollos en la instrucción conectados a este modelo. Estas reservas se hacen claras en sus escritos conjuntos y su trabajo presentado.[44] Al igual que Ylja y Joni, Emily habló de sus experiencias negativas cuando trabajaba con la línea numérica abierta (vacía). En 3^er^ grado, comparable con el 2° holandés, donde Ylja y Joni tuvieron sus desafortunadas experiencias, se esperaba que Emily usara líneas numéricas pre-estructuradas en las cuales el cero y las decenas

---

[40] Menne, J. J. M., *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rakenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment (Saltando hacia adelante. Un programa productivo para alumnos con logros bajos en el dominio de los números hasta 100)*, Instituto Freudenthal, Utrecht, 2001.

[41] Treffers, A., 1991, *op. cit.*, siguiendo a Whitney, H., "Tomando responsabilidad en la educación matemática en la escuela", en L. Streefland (ed.), *Los Procedimientos de la Novena Conferencia Internacional de Psicología de la Educación Matemática*, vol. 2, pp. 123-141, OC&OW, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1985.

[42] Menne, J. J. M., 2001, *op. cit.*

[43] *Idem.*

[44] Bobis, J. y E. Bobis, 2005, *op. cit.*

estaban indicados. Este enfoque hizo pensar a Emily que su maestra quería que ella comenzara siempre de cero, el primer número que estaba marcado en esa línea (*ver* fig. 5).

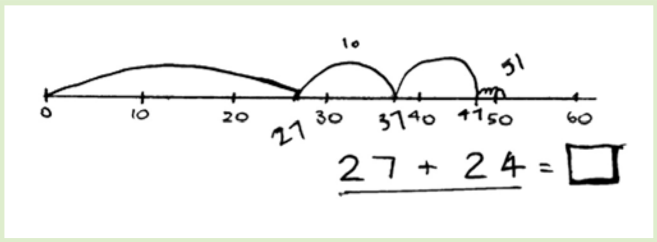

Figura 5. Comenzando de cero (de Bobis y Bobis, 2005, p. 71).

En 4° grado, Emily tuvo otra experiencia confusa. Una línea numérica pre-estructurada con intervalos de uno, dibujada en el texto, llevó a Emily a volver a una estrategia de contar de a uno (*ver* fig. 6).

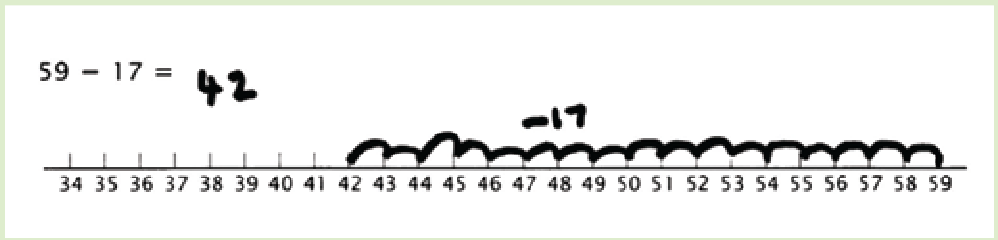

Figura 6. Una línea numérica pre-estructurada provoca determinada estrategia de conteo (de Bobis y Bobis, 2005, p. 71).

La conclusión de Bobis y Bobis fue que si se aplica la línea numérica de una manera demasiado rígida o se entiende incorrectamente como un modelo didáctico, esto puede ir en detrimento de la comprensión de los niños y su destreza en el cálculo mental. ◆

Aprender de *didactikids*

UN IMPULSO PARA VOLVER A REVISAR LA LÍNEA NUMÉRICA ABIERTA (VACÍA)*

Segunda parte**

Marja van den Heuvel-Panhuizen[1]

El uso de modelos didácticos en educación es una cuestión delicada. Su empleo incorrecto puede tener efectos dañinos y ser antididáctico. Freudenthal[2] utilizó esta palabra alrededor de hace 30 años, cuando comentó la tendencia de tomar la estructura científica de la disciplina como el principio guía y presentar a los niños una matemática "ya hecha", más que darles la oportunidad de desarrollar conceptos y métodos por ellos mismos.

Las regresiones antididácticas no sólo amenazan a la educación matemática en un nivel macro: también lo hacen en un nivel micro. A manera de ejemplo, una serie de un libro de texto "enseña" primero la descomposición decimal como la base para sumar y restar, y luego pone a los niños a trabajar en la línea numérica. Una directiva como ésa va en contra de la estructura didáctica del dominio de cálculos hasta el 100. Estos números no se prestan para cálculos algorítmicos basados en los dígitos, sino son más adecuados para aplicar una estrategia de números naturales sustentada por el modelo didáctico de la línea

* Este artículo es una versión extendida de: Van den Heuvel-Panhuizen, M., "Learning from 'didactikids': An impetus for revisiting the empty number line", en *Mathematics Education Research Journal,* 20(3), 6-31, 2008.

** *Ver*: Marja van den Heuvel-Panhuizen "Aprender de *didactikids*. Un impulso para volver a revisar la línea numérica abierta (vacía). Primera parte", *Correo del Maestro*, núm. 170, año 15, julio de 2010.

[1] Traducción de Nora Da Valle y Fernanda Gallego (Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. www.gpdmatematica.org.ar).

[2] Freudenthal, H., *La matemática como una tarea de la educación,* Reidel, Dordrecht, 1973.

numérica abierta (vacía). Tales aplicaciones se ven reflejadas en la trayectoria de aprendizaje-enseñanza para números naturales desarrollada en el proyecto TAL.[3]

Las características definitorias para la estructura didáctica son tres estrategias básicas: *secuencial, de descomposición* y *variada.*

En el caso de la *secuencial*, un problema como 34 + 27 se resuelve así: 34 + 10 → 44 + 10 → 54 + 6 → 60 → 61 o, aún más rápido, 34 + 20 → 54 + 7 → 61. La secuencial tiene su raíz en el conteo y se relaciona con el aspecto ordinal del número. Usar una estrategia secuencial en problemas de suma y resta significa mantener el primer número intacto y sólo descomponer el segundo número en decenas y unidades. Los componentes del segundo número luego se suman o restan del primer número en partes. Modelos lineales como el collar de cuentas (*ver* fig. 1) o la línea numérica abierta (vacía) (*ver* fig. 2) son adecuados para apoyar esta estrategia.

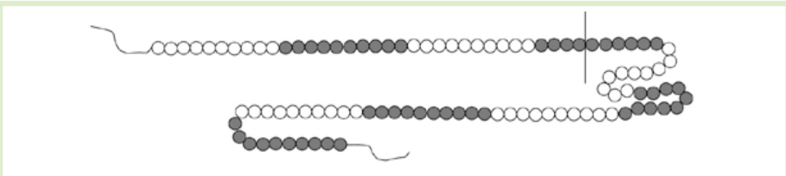

Figura 1. Collar de cuentas.

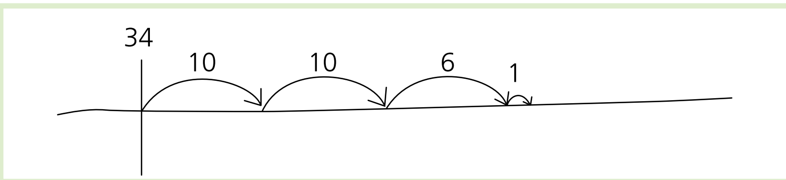

Figura 2. Línea numérica abierta.

En el caso de la *descomposición*, un problema como 34 + 27 se resuelve así: 30 + 20 = 50 y 4 + 7= 11 y 50 + 11 = 61. Los números se descomponen en decenas y unidades, y se procesan de manera separada cuando las operaciones se llevan a cabo. Los modelos de grupos formados por cuentas, palitos, bloques (*ver* fig. 3), contadores o monedas son los modelos numéricos que apoyan esta estrategia.

[3] El acrónimo TAL es la sigla de Objetivos Intermedios en las Trayectorias de Aprendizaje-Enseñanza. El objetivo del proyecto TAL es el desarrollo de las trayectorias para matemática en la escuela primaria. El desarrollo de la trayectoria para números naturales fue una empresa conjunta del Instituto Freudenthal y el Instituto Nacional para el Desarrollo del Currículo, y refleja los principios de la EMR (Educación Matemática Realista). *Ver:* Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.), *Los niños aprenden matemáticas. Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria*, Correo del Maestro y La Vasija, México, 2010.

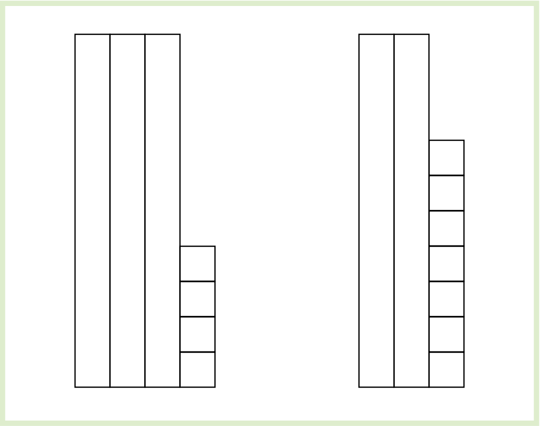

Figura 3. Bloques.

Esta estrategia de descomposición se basa fuertemente en la comprensión del valor posicional y es un predecesor del algoritmo escrito de cifrado.

La diferencia esencial entre los dos tipos de modelos es la manera en la cual representan los números, que consecuentemente también influye en cómo se llevan a cabo las operaciones. Ambos tipos de modelo tienen afinidad por una estrategia particular para operar con los números.

La tercera estrategia, *variada*, se vincula con el conocimiento de los niños de las relaciones numéricas y las propiedades de las operaciones. Incluye toda clase de estrategias de cálculo ingeniosas, como el usar 6 + 6 para resolver 6 + 7. Cubre estrategias en las cuales los niños juegan con números. Ejemplos de estrategias variadas son reordenar (3 + 69 se transforma en 69 + 3); reagrupar basándose en la propiedad asociativa y hacer uso de números "fáciles" como 25 (26 + 27) se transforma en [25 + 1] + [25 + 2] que se convierte en (25 + 25 + 3); usar relaciones inversas (la respuesta de 52 - 49 se encuentra contando a partir de 49); y compensar (74 - 38 se transforma en 74 - 40 + 2 =, o se transforma en 76 - 40). Aquí, ambos modelos, los de grupo o lineales, pueden usarse como un soporte, pero en especial cuando los alumnos son capaces de jugar con los números han llegado a una etapa en la cual un modelo concreto no es necesario. En este punto, una imagen mental de dicho modelo será suficiente, o los niños resolverán los problemas sin un modelo de apoyo.

Equiparar modelos con estrategias

Si se considera la línea numérica abierta (vacía) como un modelo adecuado para resolver problemas numéricos, esto depende mucho de la estrategia que se aplique. Las estrategia de conteo y saltos en el conteo son apoyadas mejor por un modelo lineal, y las estrategias en las cuales los números se descomponen en decenas y unidades son apoyados mejor por un modelo grupal como los bloques aritméticos, que consisten de barras que representan decenas y unidades.

La eficiencia de las estrategias aplicadas depende de los números involucrados en la operación. El conocimiento numérico que el niño posee también es crítico. La secuenciación en las estrategias es también evidente, la secuencial emergente del conteo, antes de descomponer y el uso de estrategias ingeniosas de compensación.

Los libros de texto y otros recursos de enseñanza a menudo no aclaran que los modelos didácticos están conectados estrechamente con diferentes estrategias y un modelo en particular puede producir el uso de una determinada estrategia. Por ejemplo, "la línea directriz" en el Marco Numérico de Nueva Zelanda (Ministerio de Educación, 2005) para el cálculo 43 + 35 podría ser muy confusa para los niños (*ver* fig. 4).

(ii) Descomposición posicional estándar
Ejemplo: 43 + 35 es (40 + 30) + (3 + 5) = 70 + 8.

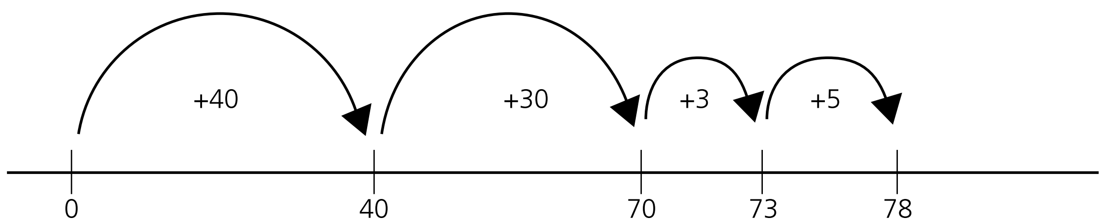

Figura 4. "Línea directriz" del Marco Numérico de Nueva Zelanda (Ministerio de Educación, 2005, libro 1, p. 4).

Cuando se supone que los niños tiene que usar una estrategia de descomposición (por ejemplo, en el caso de 43 + 35 resulta en 40 + 30 y 3 + 5; 70 + 8 = 78), sería mejor si se utilizara un modelo de agrupamiento como el de la figura 5.

Figura 5. Modelo de agrupamiento confeccionado con bloques que apoyan una estrategia de descomposición.

En el caso de 43 + 35 también podría utilizarse la línea numérica abierta (vacía). Sin embargo, esto no debería sugerir que el cálculo comienza en cero porque la idea de la línea numérica abierta (vacía) es que los niños sólo marquen los números que necesitan para su cálculo (*ver* fig. 6).

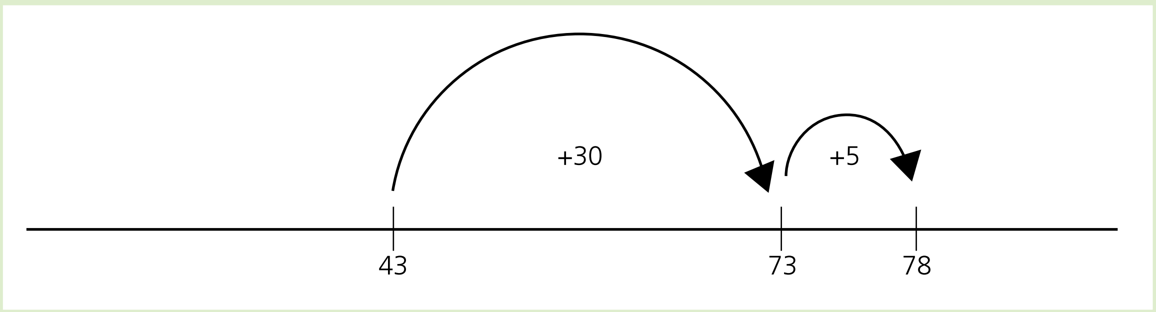

Figura 6. Uso de la línea numérica abierta (vacía) para encontrar la respuesta a 43 + 35.

Aquí no me voy a referir a los desarrollos posteriores en grados más adelantados que van de la línea numérica hasta una línea doble y una barra de fracción o porcentaje.[4] Tampoco voy a discutir las posibilidades de "hacer zoom" en la línea numérica abierta (vacía) para obtener unidades más refinadas y llegar a los decimales, pero es claro que la línea numérica es un modelo muy rico que posee diferentes representaciones. El peligro es que estos diferentes aspectos podrían confundir a los alumnos. Por ejemplo, un niño en un estudio realizado por Stacey y Steinle[5] dijo: "Se mezclan mis líneas numéricas". Creo que esta confusión es muy probable que suceda si no se comprendió bien la naturaleza del modelo de la línea numérica y los aspectos constituyentes de su naturaleza no son claramente reconocidos. La falta de coincidencia entre el modelo y la estrategia de cálculo que se intenta realizar llega a producir esta confusión.

También está la posibilidad de confusión cuando la línea numérica abierta (vacía) que se utiliza como una línea de conteo (refiriéndose a cantidades discretas) se usa como una línea para medir (refiriéndose a cantidades continuas). En este último caso, la línea numérica generalmente tiene un cero como punto de partida y los números se colocan a intervalos iguales. Hacer un cálculo basado en una línea como ésta significa "leer de corrido" el número al cual se llega al

---

4 *Ver*: Van den Heuvel-Panhuizen, M., "La Educación Matemática Realista como trabajo en progreso", en F-L. Lin (ed.), *El sentido común en la educación matemática. Procedimientos de 2001. La Conferencia de los Países Bajos y Taiwán sobre la Educación Matemática,* Universidad Normal Nacional de Taiwán, Taipei, 2002.

5 Stacey, K., S. Helme y V. Steinle, "Las confusiones entre decimales, fracciones y números negativos: Una consecuencia del espejo como una metáfora conceptual en tres formas distintas", en M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Los Procedimientos de la 25ª Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática,* vol. 4, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, p. 223, 2001.

llevar a cabo la operación, mientras que la línea numérica abierta tiene el propósito de estructurar los pasos consecutivos de un cálculo y su registro.

El hecho de que la línea numérica abierta (vacía) se refiere a cantidades continuas fue claramente expresado por Whitney[6] cuando utilizó palillos de dientes para indicar los números o, más correctamente, la cantidad de cuentas (*ver* fig. 7).

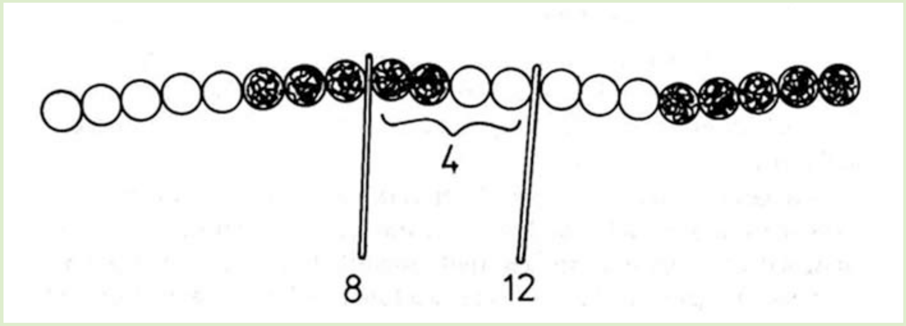

Figura 7. Collar de cuentas de Whitney con palillos (Whitney, 1985, p. 134).

Al utilizar palillos, Whitney[7] combinó los dos tipos de números (números que se refieren a cantidad y números para medir) en un modelo. Más importante, este modelo aclaró la diferencia entre estos dos tipos de números. El ocho "que mide" (al final del primer palillo de dientes) indica que hay ocho cuentas a su izquierda. Sin embargo, al mismo tiempo, el modelo aclara que este "ocho que mide" no coincide con la "cantidad" ocho, el intervalo luego de la octava cuenta. Esto podría resolver las dificultades que hasta ese punto han obstruido el uso de líneas numéricas.[8] No era claro, a menudo, tanto para alumnos como para maestros qué debía contarse: las cuentas o los intervalos. Los palillos de Whitney[9] aclararon la diferencia entre los dos y, al mismo tiempo, indicaban su conexión. Al introducir a los niños en el uso de este collar de cuentas que utilizaba palillos o clavijas para marcar ciertas cantidades, se generó la base para la línea numérica abierta (vacía) como un modelo soporte para el cálculo con números naturales.

---

6 Whitney, H., "Tomando responsabilidad en la educación matemática en la escuela", en L. Streefland (ed.), *Los Procedimientos de la Novena Conferencia Internacional de Psicología de la Educación Matemática,* vol. 2, pp. 123-141, OW&OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1985.

7 *Idem*.

8 Treffers, A., "El trasfondo didáctico de un programa matemático para la educación primaria", en Streefland (ed.), *La Educación Matemática Realista en la Escuela Primaria* (pp. 21-56 Prensa CD-β/ Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1991.

9 Whitney, H., 1985, *op. cit.*

En la trayectoria de aprendizaje-enseñanza desarrollada para este dominio matemático,[10] el collar de cuentas (estructurado en grupos de diez cuentas) se usa principalmente para contar y estructurar actividades y no para realizar operaciones. Se les preguntó a los alumnos dónde se encuentran ciertos números en particular y cómo pueden saltar hacia esos números de diferentes maneras.[11] Después de que se familiarizan con la línea numérica y la relación entre números, hacen lo mismo en una línea numérica abierta (vacía), sin las cuentas. El próximo paso es usar esta línea numérica abierta (vacía) como un modelo de apoyo para realizar sumas y restas. Las marcas en la línea numérica abierta representan, entonces, un número en particular (de cuentas). Una característica importante de este modelo de línea numérica abierta es que permite apoyar y registrar los pasos del cálculo de una manera flexible. No se les pide a los niños, de ninguna manera, que coloquen los números en la línea numérica abierta de un modo proporcionalmente correcto. Como señalé, la línea numérica abierta (vacía) no es una línea de medición.

Las numerosas líneas numéricas con intervalos iguales y que comienzan en cero se encuentran en documentos curriculares y bibliografía de investigación, y demuestran claramente una interpretación diferente. Una revisión de la educación matemática por Owens y Perry[12] hace la observación que hace ya unos años que se ha estado produciendo un debate acerca del uso de las líneas numéricas en la escuela primaria temprana. "Una dificultad en el uso de la línea numérica es que su longitud representa el tamaño del número, pero que sólo el orden de los números es transparente con la distancia a cero o a otro punto no es tan obvio".[13] En otras palabras, ellos transmitieron una preocupación de que la línea numérica a menudo no cumple con los requerimientos de una línea para medir. Mi respuesta a esta preocupación sería que nosotros deberíamos usar la línea numérica abierta (vacía) como un modelo didáctico para apoyar la suma y resta con números hasta el 100 y más allá, pero que no debería tratarse como una línea de medición.

Para concluir esta reflexión sobre la línea numérica abierta, impulsada por lo que descubrí al entrevistar a las dos *didactikids*, me gustaría mencionar el peligro de la *instrumentación*. El hecho de no estar familiarizado con la naturaleza de la línea numérica abierta puede iniciar un uso prescriptivo de ella. Ese tipo

---

[10] Treffers, A. y De Moor, E., *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool Deel 2 Basisvaardgheden en ciiferen (Diseño de un currículo nacional para la educación matemática en la escuela primaria Parte 2. Habilidades básicas y algoritmos)*, Tilburg, Zwijsen, 1990; Van den Heuvel-Panhuizen, M., 2001b, *op. cit.*

[11] *Ver*, por ejemplo, el programa desarrollado por Menne, J. J. M., en *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rakenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment (Saltando hacia adelante. Un programa productivo para alumnos con logros bajos en el dominio de los números hasta 100)*, Instituto Freudenthal, Utrecht, 2001.

[12] Owens, K. y B. Perry, *Matemática K -10 Reseña Literaria para el Concejo de Estudios NSW*, 2001.

[13] *Idem.*, p. 72.

de enseñanza indica qué números incluir y cómo dibujar los saltos y todos los otros símbolos que deberían acompañar las actividades con la línea numérica. Enseñar a los alumnos este "contrapeso didáctico"[14] no sólo consume mucho tiempo, sino también es antididáctico, porque priva a los niños de cualquier oportunidad para matematizar: encontrar sus propias estrategias, incluidos los atajos, y llegar a sus propias notaciones.

Conclusión

Aunque otros investigadores también habían llegado a la conclusión de que la experiencia de los niños debería tomarse más seriamente en la investigación y el desarrollo de la educación, los hallazgos de esta pequeña consulta a alumnas fueron sorprendentes. Gracias a sus ideas acerca de la línea numérica abierta (vacía) como un modelo didáctico y sus pensamientos sobre otras cuestiones educacionales que analizaron en otras partes de su entrevista, Ylja y Joni ilustraron por qué deberíamos recurrir más a menudo a las cualidades didácticas de los niños. Los niños que observan cuidadosamente cómo un maestro explica algo, cómo estructura el currículo, organiza la clase, maneja las diferencias, asiste a los alumnos con mayores dificultades y hace uso del libro de texto contribuyen a la comprensión de los investigadores y las personas que desarrollan el currículo. La perspectiva que ofrecen estos niños realza nuestra visión de lo que está sucediendo en las aulas. Es necesario que haya más investigación para averiguar cómo podemos explorar ese conocimiento y cómo identificar a estos *didactikids*.

Lo que Freudenthal[15] (1984a) mostró acerca de observar el desarrollo de los niños es, en mi opinión, válido para consultar con ellos. El conocimiento que ganamos aquí puede también ser útil en el desarrollo de la educación matemática. Más aún, y aquí existe un paralelismo con la observación de Freudenthal:

> …no es algo que queremos reservar exclusivamente para el investigador y el que desarrolla currículos. Propagamos esto (consultar a los niños) a otros, a maestros, formadores de maestros y a aquéllos que están siendo entrenados, y les ofrecemos material para promover esta mentalidad.[16] ◆

[14] Van den Heuvel-Pnahuizen, M. "Het rekenonder-wijs op de lom-school opnieuw ter discussie" ("La educación matemática en la educación especial otra vez en discusión"), en *Tijdschrift voor orthopedagogiek (Periódico para la Educación Especial)*, núm. 25(3), pp. 137-145, 1986.

[15] Freudenthal, H., *Appels en peren / wiskunde en psychologie (Manzanas y peras / matemática y psicología)*, Van Walraven, Apeldoorn, 1984.

[16] *Idem*., p. 106.

Referencias:

BARKHUISEN, G. P., "Descubriendo las percepciones de la clase de ESL (alumnos que aprenden inglés) de las actividades de enseñanza-aprendizaje en el contexto Sudafricano", en TESOL *Quarterly*, núm. 32 (1), pp. 85-107, 1998.

BERGEN, D. (ed.), *Jugar como un medio de aprendizaje y desarrollo: Un manual de teoría y práctica,* Heinemann, Portsmouth, 1988.

BOBIS, J. y E. Bobis, "La línea numérica abierta (vacía): Haciendo visible el pensamiento de los niños", en M. Coupland, J. Anderson y T. Spencer (eds.), *Haciendo la matemática vital: Procedimientos de la 20ª conferencia bienal de la Asociación Australiana de Profesores de Matemática* (pp. 66-72), AAMT, Sydney, 2005.

CLARKE, D. J., Comunicación personal, 2005.

DAHLBERG, G., P. Moss y A. Pence, *Más allá de la calidad de la educación y el cuidado en la primera niñez: Perspectivas Posmodernas*, Falmer, Londres, 1999.

DESFORGES, C. y A. Cockburn, *Comprendiendo al maestro de matemática. Un estudio de la práctica en primeras escuelas*, Falmer, Londres, 1987.

FREUDENTHAL, H., *La matemática como una tarea de la educación*, Reidel, Dordrecht, 1973.

———, "Aprendiendo procesos", conferencia en una presentación de la reunión de NCTM en Boston, 18 de abril de 1979.

———, *Sacando malezas y sembrando. Prefacio de una ciencia de la educación matemática*, Reidel, Dordrecht, 1978.

———, *Appels en peren / wiskunde en psychologie (Manzanas y peras / matemática y psicología),* Van Walraven, Apeldoorn, 1984a.

———, "Onderzoek van onderwijs: Voorbeelden en voorwaarden" ("Investigación de la educación: Ejemplos y condiciones"), en P. G. Vos, K. Koster y J. Kingma (eds.), *Rekenen. Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek (Aritmética. Balance de los puntos de vista en la generación de teoría e investigación empírica),* Swets & Zeitlinger, Lisse, 1984b.

———, "Ontwikkelingsonderzoek" ("Investigación para el desarrollo"), en K. Gravemeijer y K. Koster (eds.), *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek (Investigación, desarrollo e investigación para el desarrollo),* OC&OW, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1988.

FRASER, B. J., "Ambientes para la enseñanza de la ciencia: Evaluación, efectos y determinantes", en B. J. Fraser y K. G, Tobin (eds.), *Manual internacional de la educación de la ciencia,* Parte uno, pp. 527-564, Kluver, Londres, 1988.

HAGBORG, W. J. , "Las percepciones de los alumnos y maestros de los métodos de instrucción en las clases y procedimientos de evaluación", en *Evaluación y Planificación del Programa,* núm. 17 (3), pp. 257-260, 1994.

KUMARAVADIVELU, B., "Tareas de aprendizaje de la lengua: La intención del docente e interpretación del alumno", en *Periódico de Aprendizaje del Idioma Inglés,* núm. 45(2), pp. 98-107, 1991.

KEITEL, C., "Los valores en la práctica de la enseñanza de la matemática: La perspectiva de los alumnos", trabajo presentado en la Conferencia del Estudio de la Perspectiva del Alumno, Equipo Internacional de Investigación, Universidad de Melbourne, 1 a 3 de diciembre de 2003.

KRAEMER, J. M., J. Janssen, F. van der Schoot y B. Hemker, *Balans (31) van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4 (Reporte (31) de la educación matemática en la mitad de la escuela primaria).* Cito, Arnhem, 2005.

LA BASTIDE-VAN GEMERT, S., "*Elke positieve actie begint met critiek". Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde ("La crítica es el comienzo de toda la acción positiva". Hans Freudenthal y la didáctica de la matemática),* Uitgeverij Verloren, Hilversum, 2006.

MALMBERG B. V., *Pluspunt (Punto plus)*, Malmberg B. V. Hertogenbosch, 2000-2003.

MCROBBIE, C. J., D. L. Fisher y A. F. L. Wong, 1998, "Formas personales y de la clase de los instrumentos ambientales del aula", en B. J. Fraser y K. G. Tobin (eds.), *Manual internacional de la educación científica* – Parte uno, pp. 581-594, Kluwer, Londres, 1998.

MENNE, J. J. M., *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rakenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment (Saltando hacia adelante. Un programa productivo para alumnos con logros bajos en el dominio de los números hasta 100),* Instituto Freudenthal, Utrecht, 2001.

Ministerio de Educación, *Libro 1: El marco del número. Proyectos de desarrollo de lo numeración profesional,* Ministerio de Educación, Wellington, 2005.

OWENS, K. y B. Perry, *Matemática K -10. Reseña Literaria para el Concejo de Estudios NSW*, 2001.

www.boardofstudies.nsw.esu.au/manuals/pdf_doc/maths-k10.lit.review.pdf,accessedmarch1,2008.

SHIMIZU, Y. , "Las discrepancias en las percepciones de la estructura de las lecciones entre el maestro y los alumnos en el aula de matemática", trabajo presentado en el simposio *Perspectivas Internacionales en las Aulas Matemáticas*, en la Reunión Anual de la Asociación Americana de Investigaciones Educacionales, Nueva Orleans, 1 a 5 de abril de 2002.

SPRATT, M., "How good are we at knowing what learners like?", en *System*, núm. 27, pp. 141-155, 1999.

STACEY, K., S. Helme y V. Steinle, "Las confusiones entre decimales, fracciones y números negativos: Una consecuencia del espejo como una metáfora conceptual en tres formas distintas", en M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Los Procedimientos de la 25ª Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática*, vol. 4, pp. 217-224, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 2001.

TREFFERS, A., "El trasfondo didáctico de un programa matemático para la educación primaria", en Streefland (ed.), *La Educación Matemática Realista en la Escuela Primaria* (pp. 21-56 Prensa CD-/ Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1991a.

———, "Encontrándose con la no adquisición del concepto de número en la escuela primaria", en *Estudios Educacionales en Matemática*, núm. 22, pp. 333-352, 1991b.

——— y De Moor, E., *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basis-school. Deel 2 Basisvaardgheden en ciiferen (Diseño de un currículo Nacional para la educación matemática en la escuela primaria Parte 2. Habilidades básicas y algoritmos),* Tilburg, Zwijsen, 1990.

VAN DEN BRINK, J. y L. Streefland, "Niños pequeños (6-8): Razón y proporción", en *Estudios Educacionales en Matemática,* núm.10, pp. 403-420, 1979.

———, "Onderwijzende kinderen" ("Niños que enseñan"), en IOWO, *Kijk op Hans (Una mirada a Hans)* (pp. 6-8), IOWO, Utrecht, 1980.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., "Het rekenonder-wijs op de lom-school opnieuw ter discussie" ("La educación matemática en la educación especial otra vez en discusión"), en *Tijdschrift voor orthopedagogiek (Periódico para la Educación Especial),* núm. 25(3), pp. 137-145, 1986.

———, "La Educación Matemática Realista en los Países Bajos", en J. Anghileri (ed.), *Principios y prácticas en la enseñanza de la aritmética: Enfoques Innovadores para las aulas primarias,* pp. 49-63, Universidad de Prensa Abierta, Buckingham, Filadelfia, 2001a.

——— (ed.), *Los niños aprenden matemáticas. Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria,* Correo del Maestro y La Vasija, México, 2010.

———, "La Educación Matemática Realista como trabajo en progreso", en F-L. Lin (ed.), *El sentido común en la educación matemática. Procedimientos de 2001. La Conferencia de los Países Bajos y Taiwán sobre la Educación Matemática,* Universidad Normal Nacional de Taiwán, Taipei, 2002.

——— y C. Bodin-Baarends, "Todo o nada: La resolución de problemas por niños con logros altos en matemática", en *Periódico de la Sociedad Coreana de educación Matemática,* núm. 8(3), pp. 115-121, 2004.

——— "Learning from 'didactikids': An impetus for revisiting the empty number line", en *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 6-31, 2008.

———, "Twee didactikids over de lege getallen-lijn – Freudenthals observaties als inspiratiebron" ("Dos didactikids acerca de la línea numérica abierta (vacía) – Las observaciones de Freudenthal como una fuente de inspiración") en *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk (Educación matemática: investigación, desarrollo, práctica), 24(3) / Nieuwe Wiskrant (Nueva Publicación para la Matemática),* núm. 25(1), pp. 82-89, *Freudenthal 100 – Speciale editie ter gelegenheid van de honderdste geboor-tedag van Professor Hans Freudenthal,* editado por H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer y L. Wesker.

VAN DER VELDEN, B., "Entre 'Bastiaan ou de l'éducation' y 'Bastiaan unddie Detektive'", en *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM),* núm. 6, pp. 201-202, 2000.

WING, L. A., "El juego no es el trabajo del niño: Las percepciones de los niños pequeños del trabajo y el juego", en *Publicación Trimestral sobre La Primera Niñez,* núm. 10, pp. 223-247.

WHITNEY, H., "Tomando responsabilidad en la educación matemática en la escuela", en L. Streefland (ed.), *Los Procedimientos de la Novena Conferencia Internacional de Psicología de la Educación Matemática,* vol. 2, pp. 123-141, OW&OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1985.

WILTZ, N. y E. L. Klein, "¿Qué se hace en el jardín maternal? Las percepciones de los niños de las aulas de alta y baja calidad", en *Publicación Trimestral de la Investigación sobre la Primera Infancia,* núm. 16, pp. 209-236, 2001.