AREAS Y BROWNIES

Autora: C. Kenneth Fan (ckfan@math.harvard.edu)
Mathematics Teaching in the Middle School-Vol.2-N°3-1997
Traducción: Adriana Rabino

Los brownies son consumidos por los ansiosos alumnos de sexto, séptimo y octavo grado quienes disfrutan de la cálida hospitalidad del Museo de Ciencias en Boston, Massachussets. Los estudiantes se anotan voluntariamente y no se pide ningún requisito de ingreso para el enriquecimiento de las clases. El éxito que tuve con esta ejercitación puede haber tenido mucho que ver con que casi todos los estudiantes de escuela media tuvieron el placer de cortar una torta para sus amigos.

En la última clase cociné brownies. De todos modos, ¡hay una trampa! Nadie come un brownie hasta tanto no descubra cómo cortar la plancha en trozos del mismo tamaño para todos. El resultado siempre fue una hora productiva de creatividad por parte de los alumnos al trabajar duro para ganarse un mordisco de este magnífico regalo relleno de chocolate.

Igualmente, para ejecutar este proyecto en forma exitosa, se requiere de alguna preparación. El éxito o fracaso de este proyecto depende principalmente en elegir una forma apropiada. Y, por supuesto, es importante cocinar un rico brownie!

En este artículo, ofrezco técnicas para hacer realidad este proyecto. Todas las figuras, a excepción de la figura 12, están hechas en escala.

Eligiendo la forma adecuada

El acierto está en elegir una forma que no sea ni muy simple ni muy artificialmente complicada. Los rectángulos no sirven. Pero se debe elegir una forma que tenga una linda solución posible.

En vez de empezar con una forma grande y determinar si se puede dividir en un número determinado de brownies de igual área, tratamos de imaginar pequeñas formas de igual área y construir una forma grande uniendo las partes pequeñas. Empezamos por el polígono más simple, el triángulo. Los triángulos teselan el plano y ofrecen mucho potencial para construir formas interesantes y particularmente lindas de brownies.

Para empezar, usamos el hecho de que la suma de los primeros N números impares es igual a N^2. Así, si el número de alumnos de la clase es un cuadrado perfecto, se puede presentar la clase con un brownie triangular. Ver en la figura 1 la explicación matemática en detalle. Estos triángulos sirven como bloques de construcción.

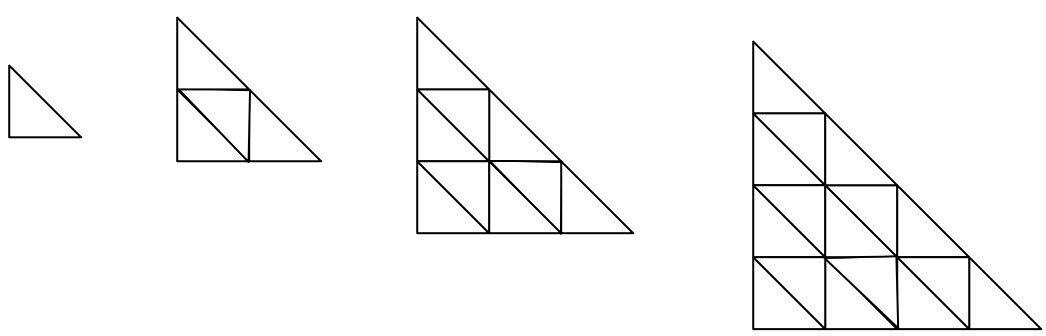

Fig.1: Descomponiendo un triángulo en un número de triángulos que sea un cuadrado perfecto, todos congruentes, funciona para cualquier triángulo, no sólo para triángulos rectángulos como los de la figura. Para ver por qué esta descomposición comprende un número de triángulos que es un cuadrado perfecto, primero se debe notar que esta figura se puede construir dividiendo cada lado en N segmentos iguales, y luego trazando por los puntos divisorios segmentos paralelos a los lados. Dado que los triángulos resultantes pequeños son semejantes al triángulo total por un factor de 1:N, se sigue que las áreas están en una relación de 1:N^2 . Por lo tanto, N^2 triángulos pequeños están dentro del triángulo grande. Este esquema de corte es una representación visual de la identidad aritmética 1 + 3+ 5 + ...+ (2n – 1) = n^2.

De esos triángulos, podemos proceder de dos modos según el tamaño de la clase, que son (1) la suma de dos cuadrados y (2) la diferencia de dos cuadrados. En el lenguaje brownie, estos modos se traducen en unir dos triángulos en un cuadrilátero, o tomar el triángulo y cortarle una "punta" para formar un trapecio. Explicaré luego estas construcciones con más detalle.

Supongamos que el número de alumnos de la clase se puede escribir como la suma de dos cuadrados, por ejemplo $a^2 + b^2$. Entonces hacemos dos triángulos principales del tipo de la figura 1. Uno estará formado por a^2 triángulos y el otro por b^2 triángulos. Nos debemos asegurar que los dos triángulos principales tengan un lado de la misma longitud de tal manera que se puedan unir a través de este lado y obtener un cuadrilátero. Se debe notar que los triángulos que constituyen uno de los triángulos principales no tienen por qué ser semejantes a los que constituyen el otro triángulo principal, pero se debe tener cuidado de que tengan la misma área. En otras palabras, la razón entre las áreas de los dos triángulos principales debe ser a^2: b^2. De forma equivalente, las alturas correspondientes al lado en común, deben mantener la relación a^2: b^2. Por ejemplo, ver figura 2, donde a = 2 y b = 3.

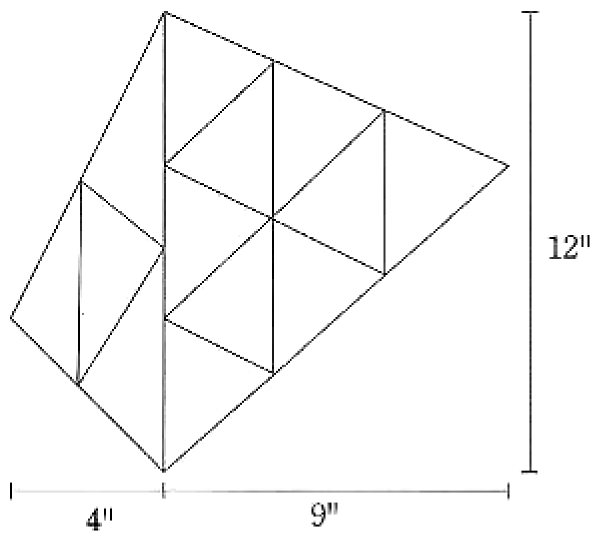

Fig.2: Se forma un cuadrilátero al unir dos triángulos, cada uno consistente en un cuadrado perfecto de triángulos para $13 = 2^2 + 3^2$ de brownimaníacos. Estas dimensiones son algunas sugerencias sobre otras posibles. El punto crucial es que la razón entre las alturas de los dos triángulos, con respecto al lado compartido es 2^2: 3^2.

En teoría, esta técnica del cuadrilátero va a funcionar para cualquier número que se pueda expresar como la suma de dos cuadrados. También se puede expresar cualquier número cuyos factores primos son congruentes a 3 módulo 4 con exponentes pares en la factorización de primos. (Este hecho de la teoría de números fue demostrado por Albert Girard en 1625. Va más allá del alcance de este artículo la demostración. El lector interesado puede recurrir a Davenport [1992, cap. 5]). De todos modos, no todos los números como estos permiten lograr brownies agradables desde el punto de vista estético. Para obtener lindos brownies con este método, los dos cuadrados deben ser cercanos; de otra manera, uno de los triángulos principales será muy delgado con respecto al otro.

Supongamos que el número de alumnos de la clase es una diferencia de cuadrados, digamos a^2-b^2. Imaginamos un triángulo, como el de la figura 1, incluyendo a^2 triángulos. Entonces recortamos una "punta" de tamaño apropiado a este triángulo, a saber, una punta que contenga b^2 de los triángulos pequeños. El resultado es un trapecio. Por ejemplo, la forma de la figura 3, que se obtiene cortando la punta de un triángulo de 6^2 partes, funciona para $27 = 6^2 – 3^2$ personas.

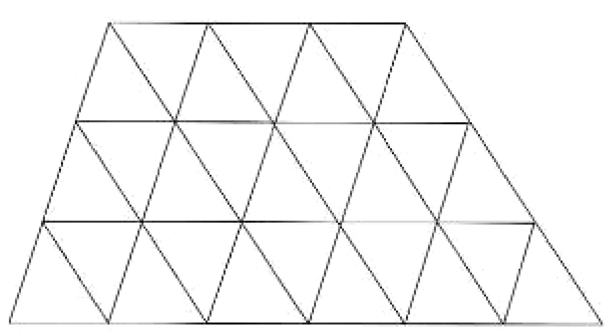

Fig. 3: Usando la técnica trapezoidal para una clase de $27 = 6^2 – 3^2$, las bases son de 3 y 6 unidades y la altura es de 3 unidades. Las longitudes salientes a la izquierda y a la derecha son de 1 y 2 unidades respectivamente. Como en el cuadrilátero de la figura 2, el único punto crucial es que la razón entre las longitudes de las bases sea 3:6.

Todo número impar se puede escribir como la diferencia de dos cuadrados consecutivos, o sea que $2n + 1 = (n + 1)^2 – n^2$. De todos modos, esta técnica trapezoidal tiende a producir brownies virtualmente rectangulares para números impares mayores que 6.

Para otros tamaños de clases, se requiere un poco de ingenio. Usar rectángulos sumados a triángulos ayuda un montón. Consideremos una clase de 17. El número 17 se puede escribir como la diferencia de dos cuadrados sólo de una manera: $9^2 - 8^2$. Por un lado, el método trapezoidal funciona pero es "muy rectangular" (ver figura 4). Por otro lado, $17 = 1^2 + 4^2$, por lo tanto el método del cuadrilátero funciona también, pero queda una porción de brownie horriblemente larga y finita para una persona (ver figura 5).

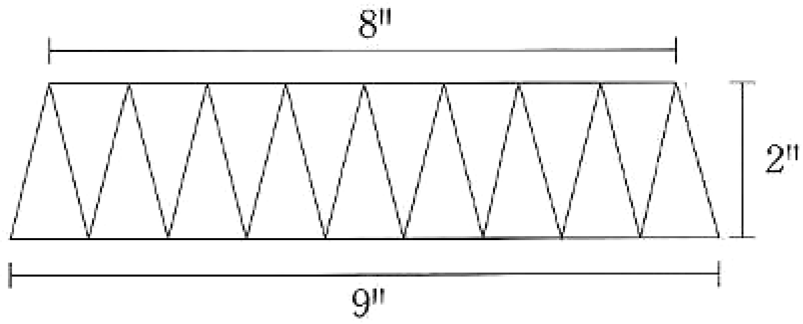

Fig. 4: Para grandes números impares de alumnos, no es conveniente usar el método trapezoidal porque los trapecios se asemejan a rectángulos, como éste para una clase de 17.

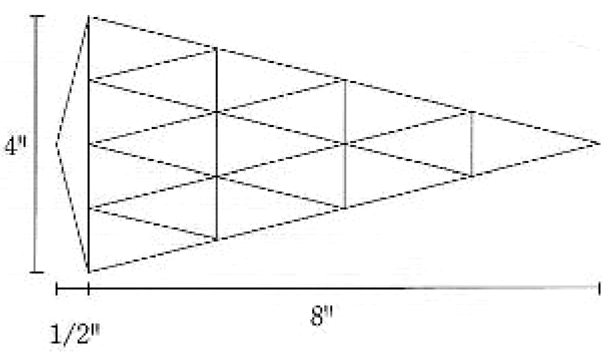

Fig. 5: Para cuadriláteros, los dos triángulos principales deben mantener medianamente la misma cantidad de triángulos. Si no aparecerán formas como ésta. Nótese la porción delgada de la izquierda.

Tal vez se pueda lograr una forma estéticamente más agradable. Acá, hay que ponerse a jugar con los números, y encontramos que $17 = 8 + 9 = (3^2 - 1) + 3^2$. Esta transformación del número 17 se traduce en unir un trapezoide con un rectángulo para producir, en otras palabras, una casa! (ver fig. 6). De hecho ésta no es la única solución. Como 9 es un cuadrado perfecto, podemos hacer una figura formada por un trapezoide y un triángulo, que resultará una loca forma pentagonal!

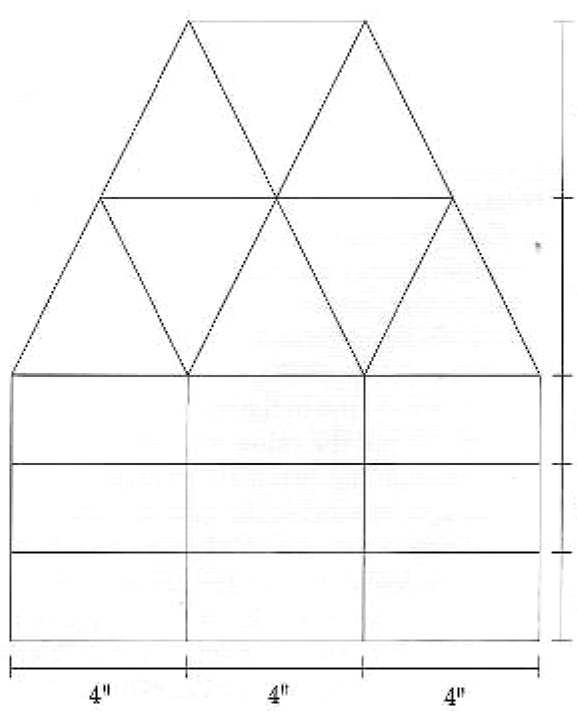

Fig. 6: Una casa de diecisiete piezas, cada una de ocho grandes pulgadas cuadradas!

Fijando las dimensiones exactas

Una vez que se determinó la forma, el próximo paso es seleccionar especificaciones exactas para el brownie. Es importante usar medidas que son razones enteras simples entre ellas, aunque la forma sea elegida con una particular elegancia en la mente, uno se debe permitir una variedad de otros posibles cortes. Si las medidas tienen razones irracionales complicadas, se vuelve dificultoso encontrar esquemas de corte alternativos.

Por ejemplo, consideremos una clase de 16 alumnos. Supongamos que elegimos la forma trapezoidal dado que $16 = 5^2 - 3^2$. En este ejemplo, las dos bases del trapecio forzosamente deben mantener una razón 3:5. Queremos que los brownies tengan un tamaño para consumo humano. Entonces hacemos las bases de 6 y 10 pulgadas. ¿Pero, qué pasa con la altura? Si la altura del brownie es h, entonces cada persona recibirá

$$\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)\right) = \frac{h}{2}$$

pulgadas cuadradas de brownie. Esta área es un número relativamente simple para trabajar, sin tener en cuenta el valor de h, mientras h sea un número entero. Entonces tenemos la libertad de elegir este número de acuerdo al total de brownie que queramos cocinar o según las dimensiones del molde de hornear. Para una clase, elegí $h = 9$ pulgadas.

El trapecio no está completamente determinado. En un trapecio, las bases de abajo y de arriba deben estar alineadas. Si uno dibuja rectas *altitudinales* desde los extremos de la base menor a la base mayor, estas rectas van a intersectar la base mayor no necesariamente a la misma distancia de los extremos de la base mayor. Llamaré a estas distancias *longitudes de exceso a la izquierda y a la derecha.*

Estos excesos se pueden calcular. Necesitamos dos números positivos A y B tales que A + B = 4, la diferencia entre las dos bases. Elegir $\sqrt{2}$ y $4 - \sqrt{2}$ no es una buena idea porque (1) destruye la posibilidad de tener un esquema de corte que use cortes altitudinales desde los extremos de la base menor a la base mayor y (2) los trozos resultantes ya no tendrán áreas que sean múltiplos de 4,5, área del pedazo individual. De todos modos, eligiendo ambos que sean 2 es muy simétrico, y si alguien quiere dibujar estos cortes altitudinales tendrá dos problemas en vez de tres, porque los tres pedazos resultantes consistirán en dos triángulos congruentes y un rectángulo. Por lo tanto, elegimos medidas de 1 y 3 pulgadas (ver figura 7). Más adelante, voy a describir qué ocurre realmente en la clase con este brownie en particular.

Cocinando el Brownie

El tiempo de cocción de un brownie es proporcional a su grosor. Muchos paquetes de brownies incluyen suficiente información para determinar la constante de proporcionalidad. Es importante también usar un grosor uniforme así el proyecto se limita a áreas y no a volúmenes. Es mucho más fácil cocinar un brownie rectangular y luego cortarlo que cocinarlo en un molde con una forma rara. Este último produce bordes salientes que tienden a endurecerse, haciendo que el corte sea difícil. Finalmente es primordial dejar enfriar el brownie antes de cortarlo.

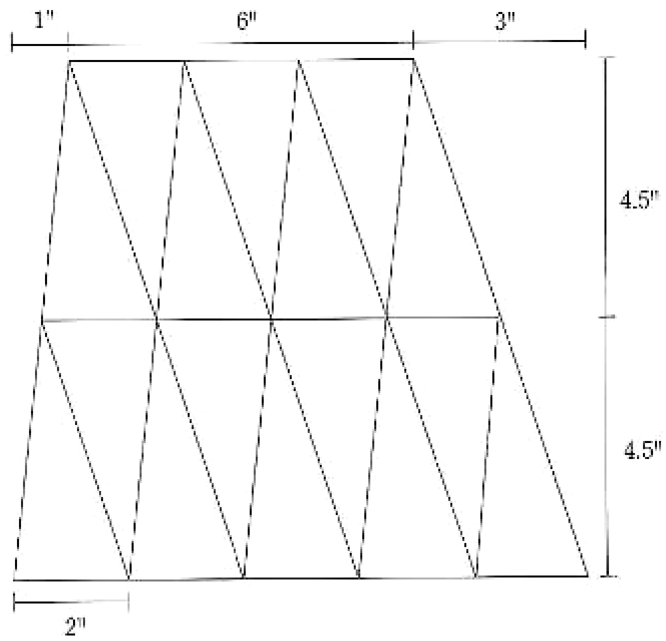

Fig. 7: Se muestra un trapecio de bases 6 y 10 pulgadas y de 9 pulgadas de altura. Las longitudes de exceso a la izquierda y a la derecha son 1 y 3 pulgadas respectivamente

Una observación sobre "antimotivación"

Cuando introduje este proyecto, los alumnos estaban tan ansiosos de llegar al brownie que inmediatamente se pusieron manos a la obra cuando se planteó el problema. Las observaciones hechas no eran soluciones sino desesperados disparos en la oscuridad.

Para evitar este comportamiento, usé las sobras de brownies que se habían recortado durante la cocción. Les dije que todos íbamos a compartir los recortes, pero ninguno de los que dijera que habían llegado a una solución que luego resultara errónea iba a perder el derecho de su parte. Sin tener en cuenta la protesta de los estudiantes, se pusieron directamente a trabajar.

Esta declaración no tenía la intención de desanimar las adivinanzas y conjeturas, que hubieran sido un desastre. En clase, la motivación de obtener un brownie sobrepasa este factor. También, les di a entender a los alumnos que estaba bien que me mostraran sus diseños en progreso. Traté de evitar responder a la pregunta "¿Funcionará esto?", reemplazándola por sugerir algunas preguntas que conduzcan a los estudiantes a responder ellos mismos a esa pregunta. Por ejemplo, típicas respuestas en forma de preguntas eran: "¿Cuál es exactamente esta longitud que dibujaste?", o "¿Me puedes decir cuál es el área de este trozo en tu dibujo?", o "Por favor, explícame lo que dibujaste". La recompensa de contenerme a responder sus preguntas vino cuando un estudiante declaró con absoluta confianza "Lo tengo!".

Dependiendo de las circunstancias, mantuve más o menos la horrible amenaza de que por ahí no podráimos compartir los recortes de brownie.

De la teoría a la práctica

El brownie trapezoidal de la figura 7, para la clase de dieciséis alumnos, dio, en una hora de creatividad, cuatro soluciones diferentes provenientes de seis personas.

Dos jovencitas, una alumna de sexto grado llamada Alexandra y otra alumna de séptimo grado llamada Claire, me sorprendieron al encontrar la solución mostrada en la figura 7, observando que trabajaron en forma independiente. La respuesta de Alexandra puede haber surgido de un proyecto reciente sobre teselado que involucraba el teselado de triángulos en el plano. En el caso de Claire, sólo puedo decir que fue mera inspiración! De igual fascinación fue la otra, realmente una solución inteligente, de las que voy a discutir ambas en detalle.

John, un alumno de séptimo, y Juliet de sexto, resolvieron juntos el problema haciendo una réplica en escala del brownie en una hoja de papel para graficar. John descubrió que cada persona debía comer 4 ½ pulgadas cuadradas de brownie calculando el área total y dividiendo por el número de personas. Cada cuadradito en el papel de graficar es equivalente a 1 pulgada cuadrada en su dibujo a escala. Dedujeron que podían encontrar una solución si de alguna manera podían combinar grupos de 4 y medio cuadraditos. Se encontraron con un problema cuando llegaron a los lados inclinados del trapecio, forzandos a considerar el área de regiones triangulares formadas por los lados inclinados del trapecio y determinadas cuadrículas del papel. Después de media hora de cálculos, encontraron un truco para manipular las orillas inclinadas, cortando varios triángulos rectángulos y trapecios rectángulos cuyos lados inclinados estuvieran incluidos en los lados inclinados del trapecio grande. (Ver figura 8). Estos triángulos y trapecios rectángulos fueron habilidosamente logrados con el área apropiada, dejando atrás una forma cuyos lados se encontraban en ángulos rectos. Agruparon trozos de cuatro y medio cuadraditos hasta que todos los trozos fueron usados. Se llegó a dieciséis trozos de forma despareja a través de un proceso que insinúa una integración, que típicamente se denomina aproximación a un área inscribiendo un número de formas de las cuales se conoce su área.

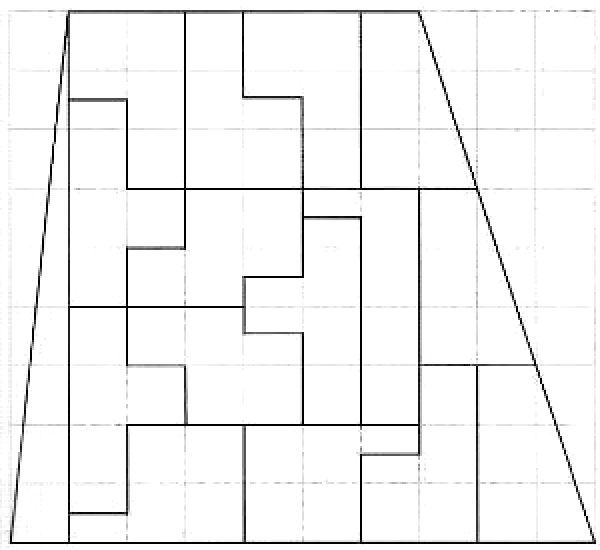

Fig. 8: La figura 7 trapezoidal de John y Juliet se muestra en papel de graficar. La cuadrícula se agrega para la conveniencia del lector.

Philip, de octavo grado, dividió el trapecio en tres partes usando los cortes altitudinales descriptos anteriormente. (Ver fig. 9). Esta aproximación dividió el problema en tres involucrando las formas más sencillas de dos triángulos y un rectángulo. El triángulo más pequeño ya tiene el área apropiada. El rectángulo tiene doce veces el área deseada, así que Philip lo dividió usando una rejilla estandar de tres por cuatro. De todos modos, era tres veces más grande, y por un buen tiempo se sintió confundido al tener que dividir este triángulo en tercios. Dividió la base en tercios y conectó los puntos divisorios al vértice del triángulo, pero su intuición le decía que los triángulos resultantes no tenían la misma área -un error común! Cerca del final de la hora, le pregunté: "¿Cuál es el área de un triángulo?", él respondió "La mitad de la base por la altura", entonces le pregunté "¿Cuáles son las bases y las alturas de los tres triángulos que construiste?" Pensó un momento, y la explosión de alegría lo dijo todo! En esencia, Philip descubrió que el determinante de una matriz permanece constante al agregar un múltiplo de una columna a otra columna. Después de todo, el determinante puede interpretarse como el volumen de un paralelepípedo definido por la columna de vectores de la matriz. Cuando algún día vea determinantes, estoy seguro de que el concepto lo comprenderá mucho más fácilmente.

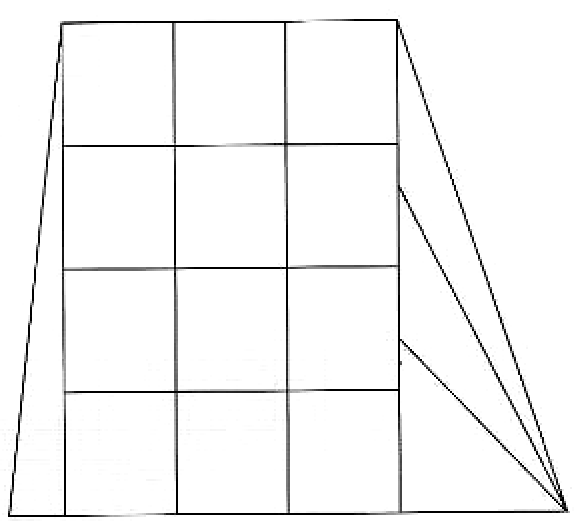

Fig. 9: El esquema de corte divide y conquistarás de Philip del trapecio de la figura 7. La división del triángulo de la derecha da la falsa impresión de que los tres triángulos que lo constituyen no tienen la

misma área. Comprendiendo que estas áreas son, de hecho, iguales, ayuda a comprender que el determinante de una matriz no cambia si se agrega un múltiplo de una columna a otra columna.

Como aparecieron cuatro soluciones diferentes, votamos para determinar qué plan se usaría realmente. Para mi asombro y deleite, la mayoría de los estudiantes votaron por la solución de Alexandra y Claire. Yo también noté que se trataba de la solución más elegante por varias razones: (1) este esquema de corte muestra a primera vista que se llegó a una solución ya que todos los trozos son congruentes; y (2) los trozos permiten ver que el esquema tiene líneas rectas sencillas que atraviesan el brownie. Matemática es un arte, y el hecho de que a pesar de que aquellos que propusieron otras alternativas de solución votaron por esta solución muestra que los niños tienen estética matemática! No obstante, creo fuertemente que la maestra debe sostener el esquema de corte que los estudiantes votaron, no importa cual crea que sea la solución más elegante.

Conclusiones

Los estudiantes no solo disfrutan este proyecto sino que también adquieren gran facilidad para trabajar con áreas. De todos modos, recomiendo no trabajar con esto hasta tanto los alumnos no hayan tenido alguna experiencia con, por lo menos, algunas fórmulas básicas de área.

Para aquellos deseosos de abordar este proyecto, la tabla 1 contiene un número posible de formas para usar con diferentes tamaños de clases. Cada una contiene una solución elegante.

TABLA 1

Posibles formas de brownies

Los triángulos están indicados por el número de trozos en que se cortarán, siempre un cuadrado perfecto; los cuadriláteros por el número de pedazos en que cada uno de los triángulos constitutivos se cortará; los trapecios, por la razón entre las longitudes de las bases. Estas posibilidades no tienen la intención de ser las mejores formas a usar.

TAMAÑO DE LA CLASE	FORMA POSIBLE
5	trapecio 2:3
6	casa con techo triangular de 2^2
7	trapecio 3:4
8	trapecio 1:3 o cuadrilátero $2^2/2^2$
9	triángulo
10	hexágono: dos trapecios 2:3
11	casa con trapecio 1:3 de techo
12	trapecio 2:4
13	octógono: dos trapecios 2:3 con rectángulos sándwich (ver fig. 10)
14	hexágono: dos trapecios 3:4
15	trapecio 1:4
16	triángulo o trapecio 3:5
17	casa con trapecio 1:3 de techo
18	cuadrilátero $3^2/3^2$
19	casa con trapecio 1:4 de techo
20	trapecio 4:6
21	trapecio 2:5
22	octógono: dos trapecios 1:3 con rectángulo sándwich (ver fig. 11)
23	casa con trapecio 1:4 de techo
24	trapecio 1:5
25	triángulo o cuadrilátero $3^2/4^2$
26	casa con trapecio 3:5 de techo
27	cualquier triángulo de 3^2 pegado a un trapecio 3:6
28	trapecio 6:8
29	un árbol: heptágono regular, siete triángulos de 2^2, en un tronco (ver fig. 12)
30	hexágono: dos trapecios 1:4

Las figuras 10-12 muestran variadas soluciones para trece, veintidós y veintinueve estudiantes respectivamente. Otra posibilidad es que un curso avanzado diseñe un brownie para otra clase, dado que hay un significativo monto de matemática involucrado en la construcción de un brownie. Nunca intenté esta idea, así que no puedo decir hasta dónde es posible realizarla. Adivino de debe ser bastante difícil, aún para estudiantes del secundario superior.

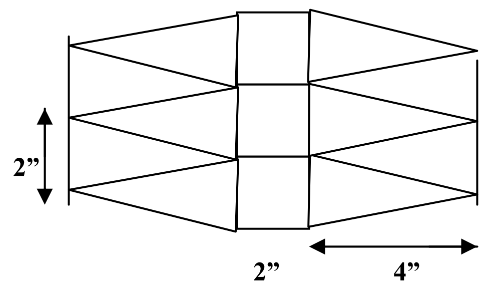

Fig. 10: Una realización de un brownie octogonal sugerido en la tabla 1 para trece estudiantes.

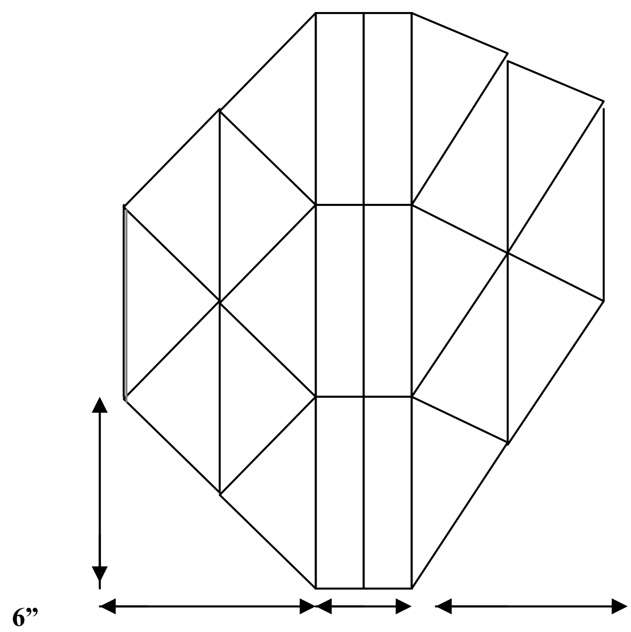

Fig. 11A: Una realización del brownie octogonal sugerido en la tabla 1 para veintidós estudiantes.

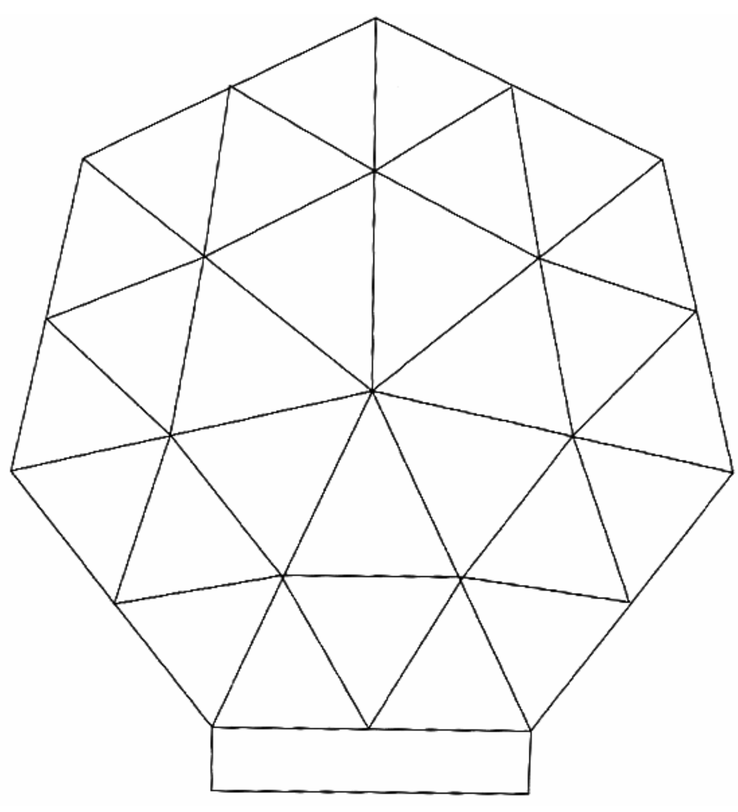

Fig. 12 Una realización de brownie de árbol sugerido en la tabla 1 para veintinueve estudiantes. Esta figura está dibujada en escala aproximada. Para calcular las longitudes exactas se requiere cálculos que involucren cos ($2\pi/7$).

Espero haber convencido a los lectores de realizar este proyecto. Requiere de cierto esfuerzo por parte del instructor, pero la reacción de los estudiantes hace que valga la pena el mismo.

Referencia

Davenport, Harold. *The Higher Arithmetic.* 6° ed. New York: Cambridge University Press, 1992.