

**HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular<sup>2</sup>**

Se describen las principales ideas del trabajo de Hans Freudenthal (1905-1990), el matemático y educador matemático holandés, relacionadas con teoría curricular y didáctica. Se explora el credo educacional de Freudenthal: "la matemática es una actividad humana". Desde este punto de partida pedagógico, el criticismo de la investigación educativa y las teorías de la educación han sido exploradas y desencarnadas. La aproximación de Freudenthal a la educación matemática, al desarrollo de la investigación y del currículum pueden ser vistos como alternativas a las principales aproximaciones anglo-sajonas a la teoría del currículum.

Durante su vida profesional, los puntos de visita de Hans Freudenthal contradicen casi todo abordaje contemporáneo de "reforma educativa": la "nueva" matemática, los objetivos operacionales, las rígidas formas de evaluación, la investigación cuantitativa empírica estandarizada, la estricta división del trabajo entre investigación curricular y desarrollo, o entre desarrollo e implementación. Mirando hacia atrás en el presente, es de gran interés ver cómo sus ideas, que a su tiempo parecieron a algunos recalcitrantes para ellos mismos, han sido ahora ampliamente aceptadas. Por supuesto, se puede intentar sugerir que esta correlación implica una relación causal, pero esto indica el especial rol de Hans Freudenthal, no solo en educación matemática, sino también en el desarrollo de la teoría curricular y la investigación metodológica.

Hans Freudenthal ha ganado también sus blasones como investigador matemático cuando desarrolló un interés en la educación matemática e hizo sus propias adquisiciones en relación con las tradiciones educativas y psicológicas en Europa y en Estados Unidos. En la actualidad, probablemente es más conocido como uno de los más influyentes educadores matemáticos de este tiempo<sup>3</sup>. En el presente trabajo intentamos destacar algunas de las ideas de Freudenthal, reconociendo que no podemos considerarlas todas, aunque fuéramos capaces de hacerlo<sup>4</sup>. Nuestro punto de vista se centrará en pedagogía y teoría del currículum, y consideraremos los aspectos del trabajo de Freudenthal y las teorías que son relevantes desde esas perspectivas (Blankertz 1973, Hopmann y Riquiarts 1995 a.b).

Partimos con una consideración del lugar de Freudenthal en la discusión entre didáctica y currículum tratando de clarificar las principales fuentes de las teorías de Freudenthal y de la educación matemática. Continuamos por una elaboración de la filosofía de Freudenthal sobre la Educación Matemática, la piedra angular de su trabajo. Seguimos con su crítica acerca de lo que es tradición en investigación educativa y teoría de la educación. Subsecuentemente discutimos las alternativas propuestas por Freudenthal para la "investigación, desarrollo y difusión", por ejemplo, el modelo tradicional RD&D. Su alternativa incorpora una filosofía, o teoría, de educación matemática, su elaboración en desarrollo en investigación, y una comprensión que abarca el proceso de desarrollo educativo en el que esto está implicado. Está seguido por una breve descripción y análisis de la influencia de Freudenthal en los cambios en educación en Holanda. Concluimos con una discusión de teoría curricular, didáctica, y "matemática para todos".

**Didáctica, teoría curricular y Freudenthal**

Aunque se sostiene que la teoría curricular tal como la desarrollan los didactas en US y Europa concierne a las mismas cuestiones, hay notables diferencias entre ambas aproximaciones (Westbury 1995, 2000). Estas diferencias derivan de las más básicas en los antecedentes culturales, filosóficos e institucionales. En el contexto europeo, el concepto de Didáctica está incluido en la teoría pedagógica; de este modo la noción de pedagogía como una forma de *Geisteswissenschaftliche* ((humanidades)) junto con la teoría fenomenológica de *Bildung* (i.e. "formación"), tienen su punto de

<sup>1</sup> Koeno Gravemeijer es investigador coordinador en el Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrech, Holanda, y profesor asociado en el Peabody College de la Universidad de Vanderbilt, Nashville, USA. Sus intereses están en simbolizar y modelizar en teoría de la educación y en desarrollar la investigación como un método.

Jan Teruel es profesor de Psicología Educativa en la Facultad de Psicología y Educación en la Universidad de Ámsterdam y Profesor de Aprendizaje y Enseñanza en la Escuela de Graduados de la Universidad de Ámsterdam. Sus intereses están focalizados en estudios de currículo, interacción social, aprendizaje y cognición, especialmente en ciencias y matemáticas.

<sup>2</sup> Traducción interna para el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática a cargo de Norma Saggese, Fernanda Gallego y Ana Bressan. 2004.

<sup>3</sup> Fue Presidente del Comité Internacional de Educación Matemática (ICMI), editor fundador de *Educational Studies in Mathematics*, y uno de los fundadores del Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) establecido para superar la dominante aproximación conductista en psicología educativa. Fue también fundador y presidente de la *Comisión Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques* (CIEAEM), que ha celebrado más de 50 años de actividad. En Holanda, Freudenthal fue el fundador y director del instituto para el desarrollo de la Educación Matemática, IOWO, actualmente llamado Instituto Freudenthal.

<sup>4</sup> En este contexto, queremos dirigir la atención a *El legado de Hans Freudenthal* (Streefland 1993)

partida en la *práctica* de la educación, i.e. educación realista. Y *Bildung* puede considerarse opuesto a *Ausbildung*. ((en formación)). *Bildung* se refiere al ideal de formación de la personalidad, y no conlleva simplemente la transmisión de conocimiento, sino también el desarrollo de conocimientos, normas y valores asociados con ser un “buen” ciudadano y/o miembro de una elite cultural e intelectual. Por otra parte, *Ausbildung*, se refiere a la educación vocacional y profesional. En ese contexto, la didáctica concierne primariamente a teorías de propósito y contenido de la educación e instrucción<sup>5</sup>.

En Holanda, la didáctica está relacionada con la pedagogía fenomenológica de la *Geisteswissenschaftliche*, como se ve en Langeveld (1965) de la Universidad de Utrech. Esta posición pierde su predominio en los años '60 y '70 y, en consecuencia, el concepto de una didáctica general era (en algunas ampliaciones y gradualmente) reemplazada por los modelos formales de aprendizaje y enseñanza tal como se ve en los trabajos de los psicólogos educacionales de US tales como Robert Glaser, Robert de Cecco, y Benjamín Bloom. Sin embargo, el contenido ((subject-matter)) de la didáctica como se ha desarrollado en facultades e institutos de matemáticas y ciencias de la educación, no se empantanó totalmente por este movimiento.

Aunque esto no se muestra sino en raras referencias, Freudenthal está de acuerdo con las tradiciones en psicología educacional en Europa y en US. Realizó muchas visitas, que llamó “bildung jornadas”, y fueron también influidas por las ideas pedagógicas de su esposa Suus Lutter-Freudenthal, una de las fuerzas directrices detrás de la recepción del plan de Peter Petersen en el movimiento de Holanda. También tuvo una fuerte influencia de la reforma pedagógica belga de Ovide Decroly (Freudenthal 1973 b) y fue un activo miembro de la New Education Fellowship en la que participó Ovide Decroly, donde fue influenciado por Pierre van Hiele y su esposa, Hieke Geldodof-van Hiele (ambos profesores de matemática que hicieron su tesis doctoral en investigación con la conducción de Freudenthal y Langeveld)<sup>6</sup>. Por ejemplo la idea de Decroly de *centros de interés*, que puede ser elaborada en el tiempo y en el espacio, se asemeja a las ideas de Freudenthal del aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la “vida real”. Los principios de Decroly de elaboración del espacio ( tal como aparece en diferentes países) y del tiempo (desarrollo en la historia), bajo la tutela del docente, corresponde a las ideas de Freudenthal y de Dewey de reinención guiada.

Aunque Freudenthal nunca se refiere a los escolares como el alemán Wolfgang Klafki, las preguntas básicas que Klafki agrega son también preguntas de Freudenthal (ver Freudenthal 1973<sup>a</sup>): ¿qué debe enseñarse en las materias escolares? ¿con qué propósito? y ¿a quién? Su credo “matemática como actividad humana” puede ser visto como una expresión de una *Geisteswissenschaftliche*, teoría fenomenológica de educación matemática que tiene su punto de partida en la práctica de la educación y la enseñanza, y no en la transmisión de las matemáticas como un sistema pre-formado. Algunas de las principales ideas (tales como “reinención”) y su crítica a la “inversión antididáctica” de la instrucción tradicional (deductiva) estaba probablemente inspirada por el movimiento de reforma pedagógica, por ejemplo, la educación progresiva en la que las ideas de Peter Petersen, entre otros, y María Montessori fueron importantes.

En opinión de Freudenthal, la teoría curricular no es un conjunto fijo, pre-establecido de teorías, propósitos y significados, contenidos y métodos. Más bien, es siempre relativo a procesos. Bien entendida, la palabra “currículo” es frecuentemente usada en combinación con cambio o desarrollo, por ejemplo, como en desarrollo curricular o desarrollo de investigación. Para Freudenthal, la teoría curricular es un esfuerzo práctico del cual las nuevas ideas teóricas pueden surgir como una clase de subproductos científicos. Para él, el desarrollo curricular no es conducido desde las cúpulas académicas, sino en las escuelas, en colaboración con los profesores y los estudiantes (Freudenthal, 1973,a). Schwab (1970: ver también Walker 1990) expresa ideas similares quien en su argumentación de currículum como “práctica”, elocuentemente desafía la principal corriente de teoría curricular de su tiempo, RD&D. Por lo tanto, hay aspectos similares entre algunas ramas del abordaje anglo-sajón a la teoría curricular y lo que Freudenthal entiende por currículo.

Pero, cuando la palabra “currículo” aparece en el trabajo de Freudenthal, frecuentemente tiene una connotación negativa. Escribió sobre la principal corriente del movimiento curricular anglo-sajón como una teoría conductista, forzada de arriba a abajo, y se refiere a esta aproximación como “boxology” (encajonamiento). Como hemos sugerido, el rasgo más saliente de la posición de Freudenthal es su visión del currículum como proceso y como su propia alternativa al desarrollo del currículum lo que él llamó *desarrollo educativo*. Mientras que el desarrollo curricular se centra en el desarrollo de materiales curriculares, Freudenthal quiso dar un paso más: el desarrollo educativo

<sup>5</sup> Los principales representantes de este concepto de didáctica son Erich Weninger y Wolfgang Klafki (Blankertz 1973), Klafki (1995,2000) buscó elaborar la noción filosófica de Bildung en una teoría más práctica de lecciones planificadas; en el corazón de esta didáctica hay un conjunto de cuestiones que conciernen, por ejemplo, a la selección de contenidos, estructuras, vacíos de significado, y métodos.

<sup>6</sup> Esta organización internacional, que fue fundada en 1920 con filiales en varios países, fue más o menos la contrapartida de la teoría *Geisteswissenschaftliche* de pedagogía y Didáctica. Freudenthal también exploró la teoría sociocultural de Europa del Este. Tuvo un amplio debate con Van Parreren, quien, en colaboración con Carpay, introdujo las ideas de Vygotsky en Holanda.

pretende fomentar un cambio actual en la marcha de la enseñanza en clase. Consecuentemente, tal desarrollo educativo es mucho más que un diseño instruccional; es una innovación estratégica total fundada, por una parte, en una filosofía educativa explícita, y por otra, incorpora el desarrollo de toda clase de materiales *como parte* de esa estrategia. El motor de todo este proceso es el *desarrollo de investigación*, una aproximación que instala muy bien la tradición pedagógica; es una investigación cualitativa / interpretativa ligada a las experiencias de enseñanza en clases individuales. Asigna un rol central al *diálogo* entre los investigadores, los que desarrollan el currículum, y los profesores.

### La matemática como una actividad humana

Freudenthal fue un oponente explícito a la “nueva matemática” de los '60, que toma sus puntos de partida como adhesión a las matemáticas modernas, especialmente la teoría de conjuntos. Con esta posición crítica se mostró a sí mismo como un exponente de la pedagogía tradicional en el sentido de que su crítica había nacido de una discusión acerca de lo que debía ser enseñado y cómo. Por lo tanto reconoce generalidad y amplia aplicabilidad como una de las especiales características de las matemáticas, y también reconoce que las matemáticas modernas, son matemáticas abstractas igualmente lejanas mientras al mismo tiempo encarecen flexibilidad. Sin embargo, en esta visión, la abstracción es la fuente del problema pedagógico.

En un sentido objetivo la matemática más abstracta es sin duda también la más flexible. Pero no subjetivamente, desde que es desperdiciada en individuos que no están en condiciones de avalar por sí mismos esta flexibilidad (Freudenthal 1968: 5)

Desde que la aplicabilidad de la matemática es frecuentemente problemática, él concluye que las matemáticas deben ser pensadas para ser *útiles*. Observa que esto no puede ser alcanzado simplemente por la enseñanza de “herramientas matemáticas”; debe ser inevitablemente resultado de una clase de matemáticas que puede ser útil en un conjunto limitado de contextos. Sin embargo, él rechaza la alternativa: “Si esto significa enseñar matemática pura y después mostrar cómo aplicarla, me temo que no estemos en mejores condiciones. Creo que es justamente emplear el orden equivocado” (Freudenthal 1968:5). En cambio, las matemáticas deben ser enseñadas como *matematización*. Esta visión de la tarea matemática escolar no está motivada solamente por importancia de su utilidad; para Freudenthal las matemáticas son en primer lugar y principalmente una actividad, una actividad *humana*, como él suele enfatizar. Como un investigador matemático, hacer matemática es más importante para Freudenthal que la matemática como un producto terminado. En su visión, esto también es válido en la educación matemática: la educación matemática es un proceso de hacer matemáticas que conduzcan a un resultado, matemáticas como un producto. En la educación matemática tradicional, el resultado de la actividad matemática de *otros* es tomada como punto de partida de la enseñanza, y Freudenthal (1973b) caracteriza a esto como una *inversión anti-didáctica*. Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma<sup>7</sup>

[La matemática como una actividad humana] es una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina. Esto puede ser un tema de la realidad que tiene que ser organizado de acuerdo con los patrones matemáticos si se tienen que resolver problemas de la realidad. Puede también ser un asunto matemático, de nuevos o viejos resultados, nuestros o de otros, que tengan que ser organizados de acuerdo con nuevas ideas, ser mejor entendidos, en contextos más amplios o por un abordaje axiomático (Freudenthal, 1971, 411-414).

Retoma esta organización de la actividad de “matematizar” en otras publicaciones y debe enfatizarse que implica ambos “temas de la realidad” y “temas matemáticos”. En otras palabras, Freudenthal incluye ambas, matemáticas aplicadas y matemáticas puras, en su concepción de matematizar. En este sentido, su punto de partida difiere del de otros educadores matemáticos que también enfatizan la actividad matemática pero se focalizan en un discurso que ha sido modelado en el discurso de investigadores matemáticos puros como ha sido reconstruido, por ejemplo, por Lakatos (1976).

La imagen de actividad matemática que elige Freudenthal como paradigma para la educación matemática difiere de la anterior en dos sentidos. Primero incluye, como se dijo antes, matemática aplicada o, para ser más precisos, “matematizar cuestiones de la realidad”. Segundo, el foco *no está* en la forma de la actividad, sino en la actividad misma, tanto como en sus efectos. Además, la noción de “discurso” se refiere a una práctica social en que la idea de matematizar pone fuerte énfasis en la actividad mental. La definición amplia de Freudenthal acerca de matemáticas como una actividad humana encaja mejor en un discurso más pragmático, como el que se espera en matemática aplicada. En tal discurso debería ponerse más énfasis en la adecuación y la eficiencia, y menos en la conjeturación libre de objetivos, por ejemplo.

<sup>7</sup> A este respecto, se puede observar una afinidad con el punto de partida de Vygotsky (1978:64) “...necesitamos concentrarnos no en el producto del desarrollo, sino en el verdadero proceso...”

Freudenthal usa la palabra “matematizar” en un sentido amplio: es una forma de *organización* que también incorpora la disciplina matemática. Al elegir el término “organizar”, Freudenthal también indica que, para él, matematizar no es estrictamente una traslación a un sistema estructurado de símbolos. Además, una manera de simbolizar debe emerger del proceso de organización del tema. Es la actividad de organizar en sí misma la idea central en la concepción de Freudenthal.

Literalmente, matematizar está vigente en “hacer más matemáticamente”. Para clarificar qué quiere decir “más matemáticamente”, se puede pensar en ciertas características de las matemáticas como su generalidad, certeza, exactitud y brevedad. Para clarificar qué se debe entender por matematizar podemos considerar las siguientes estrategias específicas con estas características (Gravemeijer 1994; ver también Treffers 1987):

- *para generalidad*: generalización (observar analogías, clasificar, estructurar)
- *para certeza*: reflexionar, justificar, probar (usando un abordaje sistemático, elaborando y testeando conjeturas, etc.)
- *para exactitud*: modelizar, simbolizar, definir (limitando interpretaciones y validez); y
- *para brevedad*: simbolizar y esquematizar (desarrollando procedimientos estándar y notaciones).

Visto desde este ángulo, matematizar objetos matemáticos y matematizar temas de la realidad comparten las mismas características. Y esto es fundamental para Freudenthal, ya que en esta perspectiva, la educación matemática de los niños debe apuntar a matematizar la realidad de todos los días. Los niños no pueden matematizar la matemática, ya que, en un principio, no hay objetos matemáticos que sean de su experiencia real. Además, matematizar objetos disciplinares de la realidad también familiariza a los alumnos con una aproximación matemática a las situaciones de la vida cotidiana. Podemos también decir aquí que la actividad de “encontrar problemas”, mencionada por Freudenthal, que implica una actitud matemática que abarca conocimiento de las posibilidades y limitaciones de un abordaje matemático, por ejemplo, saber cuando un abordaje matemático es apropiado y cuando no lo es.

El énfasis en “matematizar la realidad” se instala en lo que se llama “matemáticas para todos” (ver Damerow y Westbury 1985, Keitel 1987). Freudenthal destaca que no todos los estudiantes son futuros matemáticos: para la mayoría, toda la matemática que usarán por siempre debiera ser la que usen para resolver problemas en las situaciones de la vida diaria. Sin embargo, familiarizar a los estudiantes con un abordaje matemático de este tipo de resolución de problemas merece ser de la más alta prioridad en la educación matemática. Este objetivo se puede combinar con el objetivo de tener estudiantes que matematicen situaciones que puedan pertenecer a experiencias reales para ellos<sup>8</sup>.

En esta perspectiva, no debe sorprender que Freudenthal ataque fuertemente la *transposición didáctica*, expuesta por el educador francés Chevallard (1985), que toma como punto de partida el conocimiento experto de los matemáticos:

Las matemáticas que la mayoría de nuestro futuros ciudadanos aprenden en la escuela no debe reflejar ninguna clase de traducción - con propósitos didácticos o de otra clase - de ideas filosóficas o científicas, a menos que sean de una época muy anterior (Freudenthal 1986: 326)

De acuerdo con Keitel (1987), la cuestión central es realizar una “matemática para todos” que permanezca como “matemáticas”. En consecuencia, ella argumenta, es necesario a veces para los docentes dejar atrás los problemas de la vida cotidiana y referirse a la ciencia matemática – para mostrar constelaciones de conceptos, estructuras y sistemas que hayan sido inventados y testeados dentro de ella. Reelaborando la idea de Freudenthal de matematizar, Treffers (1987) hace una distinción entre matematización horizontal y vertical. Lo primero implica convertir un problema contextual en un problema matemático, lo segundo implica tomar la disciplina matemática en un plano más alto. La matematización vertical puede ser inducido planteando problemas que admitan soluciones matemáticas en diferentes niveles matemáticos.

Freudenthal (1991:41,42) caracteriza esta distinción como sigue:

La matematización horizontal conduce desde el mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida se vive, se actúa, se sufre; en el otro se crean los símbolos, se recrean y manipulan, mecánicamente, comprensivamente, reflexivamente: esto es matematización vertical. El mundo de la vida es lo que se experimenta como realidad (en el sentido que lo usé antes) como el mundo simbólico se refiere a la abstracción. Con seguridad, las fronteras entre estos mundos están vagamente definidas. Ambos mundos pueden expandirse o también reducirse uno a expensas del otro.

<sup>8</sup> Queremos destacar que el punto de partida no es que los problemas de la vida cotidiana sean, por definición, de la experiencia real de los alumnos, ni tampoco deben corresponderse con situaciones de la vida real. Este es un malentendido bastante común, provocado por el término “educación matemática realista”. Aquí, realística debe interpretarse como referida a la experiencia real, no a la vida real de todos los días.

Como dice Freudenthal, las fronteras entre lo que conocemos como “matematización horizontal” y “matematización vertical” no están claramente definidas. El punto crítico está en lo que entendemos como “realidad” y él (1991:17) da la siguiente aclaración: “yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario”. La realidad es entendida como una mezcla de interpretación y experiencia sensible, lo que implica que la matemática también puede formar parte de la realidad de una persona. Realidad y lo que cuenta como sentido común para una persona no son cosas estáticas sino que crecen y son afectadas por los procesos individuales de aprendizaje. Así es también como debe ser entendida la declaración de Freudenthal (1991:18) “la matemática comienza en y permanece con la realidad”.

Debe quedar claro que, en la visión de Freudenthal, “sentido común” y “realidad son contruidos desde el punto de vista del actor. Esto implica que la frontera entre matemización vertical y horizontal debe ser también evaluada desde el punto de vista del actor. Que cierto aspecto de la actividad matemática de una persona sea llamada “vertical” u “horizontal” depende tanto de la cuestión que la actividad implique, como de alguna extensión de la realidad matemática de esa persona. ((Revisar párrafo)). Una actividad simbólica, por ejemplo, puede ser una actividad de rutina para un estudiante. Esto puede ser un caso de matemización horizontal. Sin embargo, si la misma forma de simbolización involucra para otro estudiante una nueva invención, esto implica matemización vertical. La matemización vertical es más claramente visible si un estudiante explícitamente reemplaza su método de resolución, o su modo de describir por otro que es más sofisticado, mejor organizado, o, más brevemente, más matemático (de acuerdo con las características que expusimos antes).

Tales cambios pueden ser inducidos por la reflexión sobre métodos de resolución y subrayar la comprensión. La discusión de toda la clase acerca de los métodos de solución, interpretación, e ideas aumentará la probabilidad de estos cambios; especialmente si el problema entre manos da lugar a una variedad de métodos de solución en diferentes niveles.<sup>9</sup> Por ejemplo, cuando comparan y discuten sus métodos de solución, algunos estudiantes pueden encontrar otros métodos de solución que tienen ventajas sobre sus métodos corrientes. Este papel crucial del diálogo como aplicación a interpretaciones, ideas y métodos muestra una vez más que un énfasis en matematizar no implica una actividad solitaria de parte del alumno individual.

Pero el diálogo necesita no solamente tomar la forma de una discusión de toda la clase, Freudenthal también habla del trabajo grupal. Su primer alegato sobre el aprendizaje en pequeños grupos es de 1945, durante un simposio en el New Educational Fellowship. Más tarde, abogó por la educación matemática en grupos heterogéneos (Freudenthal 1987, 1991). En su opinión, los alumnos trabajadores y los flojos, ambos pueden mejorar en colaboración. Y, como señaló Freudenthal (1987: 338), en una relectura de los trabajos que había producido desde 1945 en adelante, encontró, para su propia sorpresa, cuán consistentemente a partir de los años ‘40 él había sido un protagonista de aprendizaje cooperativo en pequeños grupos heterogéneos<sup>10</sup>.

### **Crítica a la investigación educativa**

Para algunos, Freudenthal es quizás más conocido por su crítica a la investigación “tradicional” que por sus propias ideas teóricas. En Holanda, se opuso un terriblemente en la comunidad de los investigadores en educación a todos los que usan una metodología empirista y estadísticas por demás sofisticadas. Usó su potencia como matemático para mostrar los grandes defectos en la forma en que las matemáticas y las estadísticas se usaron en muchos ejemplos de “altas” investigaciones empíricas.

La oposición de Freudenthal a muchas investigaciones educativas está relacionada con su convicción de que las discontinuidades en el proceso de aprendizaje son esenciales. Tales discontinuidades pueden ser vistas como producción de cortes breves, o toma de diferentes perspectivas (Freudenthal 1991; ver también van den Heuvel-Panhuizen 1996). Es en tal discontinuidad, dice él, que se puede percibir si un estudiante ha alcanzado cierto nivel de comprensión. *Para poder identificar tales discontinuidades, los alumnos deben ser seguidos individualmente.* Esto implica lo que significan los grupos y como no son tenidos en cuenta, ya que significa borrar la discontinuidad individual. Además, el énfasis debe estar en *observar* los procesos de aprendizaje, no en testear “objetivos” de resultado de aprendizajes. En suma, Freudenthal creía que tales “altas” investigaciones no podían responder a las preguntas *educativas* de con qué propósitos se había pensado un tema, y para quién (Freudenthal 1973<sup>a</sup>, b, 1988).

<sup>9</sup> Hacemos notar que la calidad de esta discusión depende ampliamente de lo que se llama “contrto didáctico”. Sin embargo, las elaboraciones de matemización de Freudenthal son tomadas en una perspectiva psicológica a expensas de la perspectiva social. A pesar de ello sus argumentos para el trabajo con grupos heterogéneos refleja claramente su reconocimiento acerca del aprendizaje como proceso social.

<sup>10</sup> Además, no se confinó a sí mismo a teorizar acerca del aprendizaje cooperativo, pero se involucró fuertemente como un supervisor participativo en el proyecto de investigación “Mixed-ability grouping un mathematics for 12-16 year-olds” (terwel 1984, 1990, Freudenthal 1987).

Freudenthal dirigió un segundo conjunto de críticas contra el movimiento de los “tests”. Era escéptico con relación a los métodos de tests y condenaba la influencia negativa de las técnicas de los exámenes y tests en educación. El corazón de sus críticas se centraba en la ignorancia acerca de la materia y de la sobreestimación de la fiabilidad a expensas de la validez (Freudenthal 1980,1991) y no compartía el optimismo del movimiento de testear objetivos<sup>11</sup>.

Más generalmente, las críticas de Freudenthal a la investigación educativa está focalizada en metodologistas cuya fuerza consiste en “conocer todo acerca de investigación, pero nada acerca de educación” (Freudenthal 1991:151). Se opuso fuertemente a la separación entre contenido y forma. En su visión, esto conduce a modelos vacíos que deben ser llenados con contenidos expertos: “Dejan claramente a los investigadores educativos su propia responsabilidad para llenar vasos vacíos con contenidos educativos, pero se desentienden de si se ajustan o no (Freudenthal 1991: 151). Ofrece críticas similares a las teorías generales de la educación.

### Críticas a las teorías generales de la educación

Freudenthal creía que las teorías generales de la educación no se ajustan a la situación de la educación matemática, sino que en muchos casos van en detrimento de la clase de educación que quieren apoyar. Podemos ver esto en sus críticas a Bloom, Gagné y Piaget. Por tanto juzgaba a la *Taxonomía de los Objetivos de la Educación* de Bloom como inapropiados para la educación matemática. En cambio de apuntar a una clasificación (resultante de la taxonomía), propone que hay que ver la actividad de estructurar la realidad. Es por medio de la estructuración que los estudiantes tendrán control sobre la realidad; el carácter artificial de las categorías de objetivos educativos en la *Taxonomía* tiene un efecto negativo tanto en los tests escolares como en los de desarrollo (Freudenthal 1979). La estrategia de Bloom de dominio del aprendizaje también es fuertemente rechazada por Freudenthal (1980); lo acusa de concebir el aprendizaje como un proceso en el que el conocimiento se vierte en la cabeza de los estudiantes.

Robert Gagné también cae bajo el fuego de Freudenthal. Este encuentra que la idea de análisis de la tarea, como la presenta Gagné (1977) en *Las condiciones para el aprendizaje* es completamente incompatible con la idea de matemática como una actividad humana. “Me embargó un sentimiento de soledad: ¿es realmente tan diferente la matemática? Deseo que alguien que entienda profundamente ambas, la matemática y la psicología pueda mostrarnos el puente” (Freudenthal 1973b:vi).

Gagné concibe al proceso de aprendizaje como un proceso continuo que va desde la adquisición de estructuras simples hasta estructuras complejas. Freudenthal ve el proceso educativo como discontinuo: desde ricas, complejas estructuras del mundo de la vida de todos los días hasta las estructuras abstractas del mundo de los símbolos y no como el otro camino en derredor. Los puntos de partida deben encontrarse en situaciones que “piden ser organizadas” donde, como señala Freudenthal (1991:30), las categorías no están predefinidas sino que son desarrolladas por los aprendices por sí mismos, y necesitan ser acomodadas a sus necesidades.

Freudenthal también critica a Piaget por sus matemáticas y sus experimentos. Lo que más preocupa a Freudenthal, sin embargo, es cómo los trabajos de Piaget seducen a los metodólogos de la enseñanza a trasladar los hallazgos de sus investigaciones a un conjunto de instrucciones para la educación matemática:

Es una lamentable historia ver a los didactas fundamentando sus prácticas en teorías que aprendieron de un psicólogo: lo que toman prestado de Piaget no son los resultados de sus experimentos sino los errores, o malos entendidos, de presuposiciones matemáticas (Freudenthal 1973: 193)<sup>12</sup>.

Freudenthal (1991) también se dirige al constructivismo. Pero, aunque critica la epistemología constructivista desde el punto de vista de un observador, puede argumentar que la forma en que ve las matemáticas desde el punto de vista de un actor es compatible con esta epistemología. Por tanto, desde la perspectiva de un matemático activo, él caracteriza las matemáticas como una forma de

<sup>11</sup> Como un ejemplo de esta posición, podemos tomar sus ataques a los estudios de la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA): su crítica a IEA estaba centrada, entre otras cosas, en la validez de los instrumentos usados en esos estudios y la falta de adecuación entre el curriculum nacional y los instrumentos de evaluación. Observó que el único chequeo actual concierne a un único país, y aun en ese caso la correlación no es buena (Freudenthal 1975: 134). Freudenthal observó que la falta de correspondencia entre el curriculum nacional y los items de los tests reaparece en el informe de IEA bajo la variable "oportunidad de aprender". Aquí, de acuerdo con Freudenthal, las cosas se dan vuelta; la falta de correspondencia entre los items de los tests y el curriculum está ahí presente como una importante variable exploratoria que, a su turno, se explica por una falta de implementación de los curriculum oficiales planteados. Freudenthal atribuye las diferencias entre los países a la falta de correspondencia entre los curriculum nacionales y los instrumentos de la IEA.

<sup>12</sup> Freudenthal también critica los experimentos de Piaget por su falta de validez. Señala dos corrientes interrelacionadas: el carácter artificial de las preguntas y la predetermina interpretación de las reacciones de los alumnos. En un apéndice de su libro *Mathematics as an Educational Task*, Freudenthal (1973, 662-677) sostiene su crítica a las matemáticas de Piaget, con traslaciones extensivas al trabajo de Piaget.

sentido común (bien desarrollado) – una noción que está fuertemente atada a su idea de “realidad expandida”. Además, su objetivo educativo es estar seguro de que las experiencias de los estudiantes “objetivan el conocimiento matemático” como una extensión ((Seamless = sin costura)) de la experiencia de su vida de todos los días. Esto nos permite concluir que Freudenthal está más próximo al constructivismo de lo que se puede suponer por cómo lo ataca.

### **Educación matemática realística**

Podemos resumir la visión de Freudenthal acerca de la educación matemática como sigue. Las matemáticas deben ser vistas más que como un proceso, una actividad humana. Sin embargo, al mismo tiempo, esta actividad produce como resultado las matemáticas. Esto conduce a plantear cuestiones acerca de cómo dar forma a una educación matemática que integre ambos objetivos. El trabajo de Freudenthal se fundamenta en un número de ideas acerca de cómo responder a estas cuestiones. Estas ideas pueden ser discutidas bajo el encabezamiento de “invención guiada”, “niveles de procesos de aprendizaje”, y “fenomenología didáctica”.

### **Reinvención guiada**

De acuerdo con el principio de reinvención, se puede mapear una ruta de aprendizaje a lo largo de la cual un estudiante puede, en principio, encontrar la matemática que se intenta (Freudenthal 1973b). Para esto, el desarrollo curricular comienza con un experimento pensado, imaginado y guiado mediante el cual él o ella debe llegar a una solución personal. El conocimiento de la historia de las matemáticas se puede usar como un dispositivo heurístico en este proceso.

Freudenthal (1991) habla de “reinvención guiada” con énfasis en el carácter de proceso del aprendizaje más que en invención. La idea es hacer que los aprendices lleguen a ver al conocimiento que adquieren como suyo propio, conocimiento personal, conocimiento del cual ellos son responsables. En cuanto a la enseñanza, se debe dar a los alumnos la oportunidad de construir su propio bagaje de conocimiento matemático desde las bases de tal proceso de aprendizaje.

Freudenthal considera la historia de la matemática como una fuente de inspiración. En consecuencia, deja claro que el principio de reinvención puede también inspirarse en un procedimiento de solución informal (Streefland 1990, Gravemeijer 1994). Con bastante frecuencia, las estrategias informales de los estudiantes pueden interpretarse como anticipaciones más que procesos formales. En tales casos, la matematización similar a los procedimientos de solución constituye proceso de reinvención.

En general, deben seleccionarse problemas contextuales que permitan una amplia variedad de procedimientos de solución, preferentemente procesos de solución que en sí mismos reflejen una posible ruta de aprendizaje. Freudenthal ve el abordaje de invención como una elaboración del método socrático y para ilustrarlo, habla de “experimentos pensados”, por ejemplo, los experimentos pensados por autores de libros de texto que imaginan que están enseñando a alumnos interactuando con ellos y previendo sus posibles reacciones. Una parte de los experimentos pensados, sin embargo, consiste en anticipar las reacciones de los alumnos. Otra parte consiste en el diseño de un curso de acción que apunte a reacciones anticipadas de los estudiantes. Más precisamente, la idea es que el tema de enseñanza sea reinventado por los estudiantes en tal interacción. Freudenthal (1991: 100-101) comenta:

Aunque la propia actividad de los estudiantes en el método socrático es una ficción, los estudiantes deben quedar con el sentimiento de que (i.e. la comprensión y la idea) surge durante el proceso de enseñanza; es decir que nace durante la lección, con el docente actuando como una comadrona.

Freudenthal no suscribe que el método socrático sea eso. Adjudica un papel mucho más activo a los estudiantes en el proceso de construcción de su propio conocimiento. Sin embargo, la semejanza está en la anticipación, en la *planificación* de posibles trayectorias de aprendizaje (Simon 1995). Tales conjeturas acerca del aprendizaje circunda varios problemas que deben plantearse, la actividad de anticipación mental de los estudiantes, y las acciones que deben tener lugar para que el proceso de reinvención sea posible.

### **Niveles en el proceso de aprendizaje**

Freudenthal complementa el concepto de reinvención con lo que Treffers (1987) llama “matematización progresiva”. Esto puede ser visto como reinvención desde el punto de vista del observador, debe ser experimentado por el estudiante como “matematización progresiva” – desde el punto de vista del actor. Los alumnos deben comenzar por matematizar un tema de la realidad. Luego deben cambiar a analizar su propia actividad matemática. Este último procedimiento es esencial ya que contiene un componente vertical, que Freudenthal (1971: 417) con referencia a Van Hiele,

describe del siguiente modo: “La actividad en un nivel está sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel”.

El cambio de “operador” a “objeto” se refiere al cambio de procedimiento a objeto, que Sfard (1995) observa en la historia de la matemática. También se refiere a lo que Ernest (1991:78) ha llamado “materialización”. La teoría de los niveles de Freudenthal constituye la visión de matemática realística como modelo de educación. En cambio de una teoría de modelos preformados, RME atiende a modelos que emergen primero como modelos operativos de procedimientos de solución situados, y luego gradualmente se tornan en entidades en sí mismos para funcionar como modelos para razonamiento matemático formal (Gravemeijer 1999).

### **Fenomenología didáctica**

Freudenthal enfatiza la importancia de un encaje fenomenológico de los objetos matemáticos. En oposición al abordaje de adquisición de los conceptos, que implica la corporización de los conceptos en materiales concretos, Freudenthal propone el uso de situaciones fenomenológicamente ricas: situaciones que en principio fueron organizadas. En tal fenomenología didáctica (Freudenthal 1983), las situaciones deben ser seleccionadas de tal modo que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que se supone que los alumnos deben construir. El objetivo es considerar cómo el “objeto pensado” (noúmenon) describe y analiza el “fenómeno”. Cómo puede hacer el fenómeno accesible para el cálculo y la actividad de pensamiento. Tal análisis fenomenológico sustenta las bases de una fenomenología didáctica que incorpora la discusión acerca de qué quiere decir análisis fenomenológico desde una perspectiva educativa. Por ejemplo, para la construcción de la longitud como un objeto matemático los estudiantes deben confrontarse con situaciones en las que el fenómeno sea organizado por la longitud.

En el marco de una didáctica fenomenológica, las situaciones en las que se aplica un tema matemático dado, deben ser investigadas para estimar su conveniencia como puntos de impacto del proceso de matematización progresiva. Si vemos a la matemática, como históricamente se la considera, como una forma práctica de resolver problemas, sería razonable esperar encontrar los problemas que den relevancia a esos procesos en las aplicaciones actuales. Después podemos imaginar que la matemática formal se torne en un proceso de generalización y formalización de conceptos y procedimientos de resolución de problemas en situaciones específicas sobre una variedad de situaciones. El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problema de las cuales se puedan generalizar situaciones de abordaje, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Encontrar fenómenos que puedan ser matematizados, nos permite comprender cómo fueron inventados.

### **Investigación para un cambio educativo**

Cuando Freudenthal (1991) pensó en investigar, típicamente se preguntó ¿cuál es el uso de esto? E invariablemente se contestó: “el cambio”. La educación debe adaptarse constantemente a una sociedad cambiante. Por lo tanto, “cambio” como un concepto preferido a la noción de “reforma”, teniendo en cuenta que lo que es visto como una mejor educación depende de las necesidades y prioridades de la sociedad en un momento dado – y como una sociedad cambia, la educación debe también cambiar. En tal sentido, una tarea importante del investigador es trazar el sendero. Freudenthal vio la vinculación de la investigación desde el aula como muy distante de la investigación tradicional: la búsqueda del sendero no debe partir de los escritorios ni los laboratorios, sino del aula. Es esta filosofía de los propósitos y funciones de la investigación la que guía el abordaje de la investigación adoptado por el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), del cual Freudenthal fue el director.

En el momento en que se fundó el IOWO, el modelo de RD&D estaba en boga en la comunidad educativa de Alemania. En este modelo, el desarrollo curricular y lo que se llamó “implementación”, estaban completamente separados y en oposición con el abordaje que Freudenthal (1991) hizo del concepto de “desarrollo educativo”. Este concepto no significa exactamente desarrollo curricular sino que también abarca el objetivo último de cambiar la práctica educativa. Además, desarrollo educativo no solo implica que la implementación del currículo se anticipa desde el principio, también implica elección de un abordaje de cambio amplio comprendida la formación de los docentes, el aconsejamiento, tests de desarrollo, y formación de opinión – todo fundado en la misma filosofía educativa. En contraste con el movimiento acerca del currículum, Freudenthal integró investigación, desarrollo, implementación y difusión. Como una consecuencia de esta orientación de la práctica educativa, él propone involucrar a todos los participantes desde el principio bajo el slogan “desarrollo educativo en diálogo con el campo”.

El tipo de cambio del que estaba persuadido Freudenthal estaba guiado por su idea (1973b) de que la matemática es una actividad humana. Sin embargo, cuando se lanzó el IOWO se podía

hacer poca investigación acerca de esta clase de educación matemática. En consecuencia, las preguntas acerca de cómo desarrollar la instrucción debieron ser respondidas durante el desarrollo mismo del proceso.

### Investigación para el desarrollo

Inicialmente Freudenthal fue renuente a llamar investigación a lo que hacía el IOWO. “En nuestro instituto observamos por nosotros mismos, no como investigadores sino como ingenieros”. Además, considera (1973a) a la teoría como un producto del desarrollo educativo. Sin embargo, luego (1988) argumenta que esta metáfora separa la investigación del desarrollo educativo, y por tanto no puede hacer justicia con el carácter de entrelazado del desarrollo en la “investigación del desarrollo”<sup>13</sup>. El nuevo conocimiento debe ser legitimado por el proceso por el cual ha sido adquirido: llevar a la conciencia el proceso de desarrollo y explicarlo es la esencia de la investigación del desarrollo.

Volver conciente por la experiencia el proceso cíclico de desarrollo e investigación, e informarlo tan claramente que se justifique por sí mismo, y que esta experiencia pueda ser transmitida a otros como para que la hagan propia (Freudenthal 1991:161)

Dicho de otro modo, para Freudenthal, el propósito de la investigación sobre el desarrollo es crear la oportunidad para que los que están por fuera, por ejemplo los docentes, vuelvan sobre los pasos del investigador del proceso de aprendizaje, lo que Smaling (1987) llama reencarrilar ((trackability)). Para asegurar tal ((trackability)), Freudenthal demanda una constante conciencia del proceso de desarrollo. Y, si sus resultados se vuelven creíbles y transferibles, tanto como sea posible, esta reflexión necesita ser informada.

En el centro de estas reflexiones está el “experimento pensado” por el investigador. El desarrollista debe concebir de qué manera avanzan los procesos de enseñanza y aprendizaje debe consecuentemente tratar de encontrar evidencia en un experimento de enseñanza para mostrar si estas expectativas son ciertas o equivocadas. La retroalimentación de la experiencia práctica sobre los nuevas experiencias pensadas deben inducir una interacción entre desarrollo e investigación: lo que es inventado en un escritorio debe ser puesto en práctica inmediatamente; lo que sucede en el aula debe ser analizado de modo consistente y los resultados aplicados a la continuación del desarrollo del trabajo. Este proceso de deliberación y testeo debe resultar en un producto que se fundamenta teórica y empíricamente, bien considerado y bien probado.

En esta visión, la investigación del desarrollo puede ofrecer a los docentes un marco de referencia que puede proveer los fundamentos de sus propias decisiones. Contra el telón de fondo de este marco, los docentes pueden desarrollar hipotéticas trayectorias de aprendizaje (Simon 1995) que tengan en cuenta al mismo tiempo, la situación actual de sus aulas y sus propios objetivos y valores. Los docentes dan argumentos y guías que los habilitan a enmarcar su propia instrucción, un punto de partida que es firmemente construido por la tradición didáctica europea.

La investigación del desarrollo tiene un doble canal de salida: uno en el nivel de las teorías, y otro en el nivel de productos curriculares. Por tanto, el desarrollo de la investigación en RME, llevada a cabo fuera y dentro del IOWO y su sucesor OWandOC (el actual Instituto Freudenthal), dio como resultado una rica secuencia de prototipos instruccionales y otras publicaciones prácticas. En Holanda, estas publicaciones han tenido fuerte influencia en matemáticas en las escuelas. Con el correr del tiempo, en los '80 en las escuelas primarias de Holanda los seguidores voluntarios los llamaron textos “realísticos”. En el nivel secundario, los cambios curriculares iniciados por el gobierno tuvieron muchas comisiones del Instituto Freudenthal para el desarrollo de sus nuevos currículos. Como una consecuencia, todos los currículos de Holanda son, o están siendo cambiados por currículos fundamentados en la filosofía RME.

Los estudios nacionales de evaluación han mostrado que, en los últimos años de la escuela primaria, los estudiantes holandeses que trabajan con estos textos modernos tienen en general mayor éxito que los alumnos que trabajan con textos tradicionales – con la excepción de los temas de algoritmos escritos y mediciones (Bokhove y otros 1996)<sup>14</sup>. Parece razonable atribuir este éxito a la innovación estratégica – “desarrollo educativo en diálogo con el campo” – usado en la introducción de este currículo y de los textos de las escuelas holandesas. En estudios retrospectivos acerca de innovación en matemáticas en escuelas primarias y secundarias se identificaron los siguientes factores de éxito (Gravemeijer y Ruinaard 1995, Vermeulen y otros 1997):

<sup>13</sup> Se coloca a sí mismo contra el ideal de investigación educativa como modelado por la investigación en ciencias naturales. Argumenta que en las Ciencias Naturales, es fácil presentar el conocimiento nuevo como el resultado de experimentos, ya que los experimentos son fácilmente replicables. En educación, la replicación es imposible en el estricto sentido de la palabra. Un experimento educativo jamás puede ser repetido de idéntica manera, bajo idénticas condiciones.

<sup>14</sup> Las más recientes investigaciones de la IEA Tercer Estudio Internacional de Ciencia y Matemática (TIMSS) en alumnos de 13-14 años de edad mostraron que los estudiantes holandeses estaban muy bien en las competencias internacionales, aunque los ítems de tests de los TIMSS apuntan poco al currículum holandés y probablemente no puedan resistir las críticas de Freudenthal (1975).

- una poderosa e inspirada filosofía de educación matemática;
- el desarrollo de ejemplos y prototipos de secuencias instruccionales;
- actividades de profesionalización;
- la constitución de una comunidad de educación matemática como una infraestructura mediadora;
- un aumento de enseñanza a los docentes en servicio, en entrenamiento y por publicaciones;
- libros de texto renovados;
- revisión de las exámenes; y
- desarrollo de investigación como ingeniería de innovación.

El desarrollo de la investigación está en el centro de las estrategias de innovación. Este trabajo produce prototipos y teorías que informan a los capacitadores de docentes, autores de textos y consultores escolares. Estos, a su vez, funcionan como mediadores entre los investigadores y los docentes. De acuerdo con el concepto de desarrollo educativo en diálogo con la práctica, estas corrientes de información son bidireccionales. Dicho de otro modo, la idea central del Instituto es el concepto de “desarrollo educativo en diálogo con la práctica”; más que innovaciones desarrolladas en torres de marfil, los que están en la práctica, como los capacitadores de docentes, consultores, autores de textos, investigadores, diseñadores de tests, y los propios docentes, estén involucrados en investigación y desarrollo desde el principio<sup>15</sup>.

## Conclusiones y discusiones

Ubicar el trabajo de Freudenthal en los contextos de estudios sobre didáctica y currículum no es una tarea fácil debido a su estilo ecléctico de escritura, por ejemplo, casi sin referencias a los autores en los que se inspira. En esta sección final nos centraremos en los tres aspectos principales del trabajo: la didáctica, la teoría curricular y las “matemáticas para todos”.

### Didáctica

A menudo Freudenthal usa el término didáctica para referirse a los procesos correctos de enseñanza y aprendizaje, partiendo de la “realidad” y permaneciendo en ella. Se refiere a lo contrario como “la conversión anti-didáctica” (el abordaje deductivo) que rechaza fuertemente. De acuerdo con Freudenthal, la didáctica concierne a procesos. Por tanto, hay un aspecto común y una notable diferencia entre la didáctica de Freudenthal y el uso que hace Klafki del mismo término. Ambos están influenciados por la teoría fenomenológica de *Bildung* como reforma pedagógica. Ambos toman como punto de partida la práctica de la educación (educational reality) e intentan en ciertos puntos de la vida profesional superar los aspectos exaltados y elitistas de la *Bildung* como teoría. Ambos hacen hincapié en el aspecto práctico de la educación e invocan la escuela comprensiva como una necesaria reforma educativa. Klafki, sin embargo, centralmente se focaliza en lecciones planificadas o en la preparación de lecciones en las que el proceso de aprendizaje no es real. Las cuestiones fundamentales de Klafki conciernen primariamente al contenido de *Bildung*, mientras ignora más o menos los métodos y los procesos de enseñanza.

### Teoría curricular

Freudenthal usa la palabra “currículo”, pero menos frecuentemente que “didáctica”. En su visión del desarrollo curricular y el rol de la teoría, hay una notable similitud con el trabajo curricular de Joseph Schwab, que ha ocupado una especial posición en la teoría curricular en US. A lo largo de la misma línea, pero independientemente de Schwab, Freudenthal hace hincapié en el carácter particular del trabajo curricular y los procesos de diálogo entre especialistas en currículum y docentes. Freudenthal está en contra de cualquier sistema curricular fijo y se opone fuertemente a que los contenidos sean embotellados y encausados en esquemas y estructuras. Esta es una posición destacable en un tiempo en que la teoría curricular estaba dominada por la orientación conductista y el abordaje RD&D, era visto en Alemania y Holanda como la largamente esperada panacea (Hopmann y Riqua 1995a,b). Freudenthal propuso además, matemáticas como una actividad humana y una reinención guiada. Este credo humanístico, práctico, orientado a procesos, fenomenológico y de reforma pedagógica, elaborado en el contexto de desarrollo del currículum, es lo que hizo única a la posición de Freudenthal entre muchos de sus colegas educadores matemáticos

<sup>15</sup> Es admitido que este diálogo está dividido en dos niveles: el diálogo entre este grupo y (un número de) docentes en el otro. Y, en la práctica, los libros de texto comerciales son los que indican caminos de innovación, por tanto la innovación actual asume el carácter de un documento curricular de gran extensión pero no siempre entendido. La suerte de los recursos financieros requeridos para involucrar mucho a los docentes en asumir un rol mayor en la estrategia que sea adoptada. No es sorprendente que la investigación haya mostrado que las prácticas instruccionales en la escuela tienen diferentes significados desde la forma de la práctica concebida por los innovadores. En un estudio empírico de los grados primarios 1-3, las características de la educación matemática realista se encuentran solo parcialmente (Gravemeijer y otros, 1993). Y, en un estudio empírico de Kuiper (1994), se concluye que las ideas de Freudenthal están lejos de ser aplicadas en las clases de todos los días en la educación secundaria.

de ese tiempo. Este credo colocó a Freudenthal en conflicto con, por ejemplo, los psicólogos de orientación conductista como Bloom y los proponentes del movimiento de “nueva matemática” que abogaban por el desarrollo de un currículo para matemáticas como un sistema deductivo abstracto.

### **Matemáticas para todos**

Finalmente llegamos al debate concerniente a la posición de Freudenthal de “matemáticas para todos” en el currículo común (ver Damerow y Westbury 1985, Keitel 1987, Deffer 1991). Aunque Freudenthal fue educado en, e influenciado por, la tradición germana de la Bildung en un sistema escolar dual, rechaza una forma exclusiva de Bildung para una elite separada de la escuela para las masas. Aboga fuertemente por “matemáticas para todos” y trata de hacer la matemática accesible para todos. Condena todas las formas de seguir la corriente y situar con referencia al inevitable “efecto matemático”. Freudenthal está convencido de que los estudiantes con diferentes niveles de habilidad en los primeros años de la educación secundaria (que en el contexto de Holanda corresponde a alumnos de 12-15 años) deben estar no solo en la misma clase, sino también seguir el mismo currículo. Lo mismo que los otros aspectos de su credo pedagógico, suplica que se formen grupos de aprendizaje heterogéneos.

Muchos aspectos de las ideas de Freudenthal están todavía sometidos a discusión. Por eso, hay un fuerte movimiento contra las teorías educativas de este tipo por parte de los psicólogos, que ven al aprendizaje desde el punto de vista de un proceso informacional (Anderson y otros 1996). Pero también algunas veces hay oposición desde dentro de las comunidades de educación matemática a la idea básica de que los alumnos deben ir desde el mundo real al mundo de las matemáticas. La principal crítica al abordaje RME es que a menudo es imposible partir de situaciones de la experiencia real hacia la “matemática”. La reinención, en esta visión, es un desperdicio de tiempo (Verstappen 1991, Keune 1998).

Estas críticas deben mencionarse, pero también debe notarse que los que se oponen a las ideas de Freudenthal tienen una breve experiencia empírica para este punto de vista. Mientras varias experiencias de enseñanza muestran el valor del abordaje RME (de Lange 1987, Nelissen 1987), van den Brink 1989) Streefland 1990), los resultados de muchos estudios de investigación de los efectos del curriculum de matemáticas inspirado en las ideas de Freudenthal, muestran claramente que el aprendizaje matemático en contextos de la vida real y en grupos heterogéneos es factible y efectivo (Teruel 1990, 1999, Hoeck 1998, Roelofs y Terwel 1999). Además hay un amplio soporte para RME entre los que lo practican docentes, teóricos y desarrolladores de curriculum. Por otra parte, todos los textos Holandeses muestran el impacto de las ideas de Freudenthal. Pero también hay una evidencia práctica y empírica de la factibilidad y eficiencia de RME. El más convincente argumento de Freudenthal para el RME es que no todos los estudiantes son futuros matemáticos, en cambio, para la mayoría, las matemáticas que usarán serán las que les sirvan para resolver problemas en las situaciones de la vida diaria.

### **References**

- ANDERSON, J. R., REDER, L. M. and SIMON, H. A. (1996) Situated learning and education. *Educational Researcher*, 25 (5), 5± 11.
- BLANKERTZ, H. (1973) *Didactiek, theorie en modellen*. Utrecht, The Netherlands/Antwerp, Belgium: Het Spectrum.
- BOKHOVE, J., VAN DER SCHOOT, F. and EGGEN, T. (1996) *Balansvanhet rekenonderwijsaanhet einde van de basisschool 2*. Arnhem, The Netherlands: Cito.
- CHEVALLARD, Y. (1985) *La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*. Grenoble, France: Editions La Pensee Sauvage.
- DAMEROW, P. and WESTBURY, I. (1985) Mathematics for all. *Journal of Curriculum Studies*, 17 (2), 175± 184.
- DEKKER, R. (1991) *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen* [Learning mathematics in small heterogeneous groups]. Doctoral dissertation, University of Utrecht. De Lier, The Netherlands: Academisch BoekenCentrum.
- DE LANGE, J. (1987) *Mathematics, Insight and Meaning: Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences*. Utrecht, The Netherlands: Rijksuniversiteit Utrecht.
- ERNEST, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. Basingstoke: Falmer.

- FREUDENTHAL, H. (1968) Why to teach mathematics as to be useful? Educational Studies in Mathematics , 1 (1), 3± 8.
- FREUDENTHAL, H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, 3 (3/4), 413± 435.
- FREUDENTHAL, H. (1973a) Deniveausinhet leerproces ende heterogene leergroep methet oog op de middenschool. In L. J. van Eijk (ed.) Gesamtschule conferentie 1973 Amsterdam and Purmerend, The Netherlands: APS/Muuses, 88± 98.
- FREUDENTHAL, H. (1973b) Mathematics as an Educational Task . Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- FREUDENTHAL, H. (1975) Pupil's achievements internationally compared: the IEA. Educational Studies in Mathematics, 6 (2), 127± 186.
- FREUDENTHAL, H. (1979) Invullen ± vervullen. Euclides, 55, 61± 65.
- FREUDENTHAL, H. (1980) Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematics Education Dordrecht, TheNetherlands/Boston, MA: Reidel.
- FREUDENTHAL, H. (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- FREUDENTHAL, H. (1986) Review of Yves Chevallard, La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigne. Educational Studies in Mathematics, 17 (3), 323± 327.
- FREUDENTHAL, H. (1987) Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven. Amsterdam, The Netherlands: Meulenhof .
- FREUDENTHAL, H. (1988) Ontwikkelingsonderzoek [Developmental research]. In K. Gravemeijer and K.Koster (eds), Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek. Utrecht,The Netherlands:OW enOC, 49±54.
- FREUDENTHAL, H. (1991) Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- GAGNE , R. M. (1977) The Conditions of Learning, 3rd edn. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- GRAVEMEIJER, K. P. E. (1994) Developing Realistic Mathematics Education. Doctoral dissertation, Utrecht University. Utrecht: Cd Beta Press.
- GRAVEMEIJER, K. (1997) Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer and E. C. D. M. van Lieshout (eds), The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures Utrecht: Cd Beta Press), 13±34.
- GRAVEMEIJER, K. (1999) How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 155± 177.
- GRAVEMEIJER, K., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., VAN DONSELAAR, G., RESNIK, N., STREEFLAND, L., VERMEULEN, W., TE WOERD, E. and VAN DER PLOEG, D. (1993) Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek. Utrecht,The Netherlands: Cd Beta Press.
- GRAVEMEIJER, K. and RUINAARD, M. (1995) Expertise in leren. Over de bevordering van de vakdidactische deskundigheid van docenten in het funderend onderwijs. Utrecht, The Netherlands: Adviesraad voor het onderwijs.
- HOEK, D. (1998) Social and Cognitive Strategies in Co-operative Groups. Doctoral dissertation, Graduate School of Teaching and Learning, University of Amsterdam.
- HOEK, D., TERWEL, J. and VAN DEN EEDEN, P. (1997) Eå ects of training in the use of social and cognitive strategies: an intervention study in secondary mathematics in cooperative groups. Educational Research and Evaluation,3(4), 364± 389.
- HOEK, D., VAN DEN EEDEN, P. and TERWEL, J. (1999) The eå ects of integrated social and cognitive strategy instruction on the mathematics achievement in secondary education. Learning and Instruction, 9 (5), 427± 448.

- HOPMANN, S. and RIQUARTS, K. (1995a) Starting a dialogue: issues in a beginning conversation between Didaktik and the curriculum traditions. *Journal of Curriculum Studies*, 27 (1), 3± 12.
- HOPMANN, S. and RIQUARTS, K. (1995b) Didaktik and/or Curriculum Kiel, Germany: Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.
- KEITEL, C. (1987) What are the goals of mathematics for all? *Journal of Curriculum Studies*, 19 (5), 393± 407.
- KEUNE, F. (1998) Naarde knoppen, Inaugural lecture, University of Nijmegen.
- KLAFKI, W. (1995) Didactic analysis as the core of preparation for instruction- Didaktische Analyse als Kernderterrichtsvorbereitung. *Journal of Curriculum Studies*, 27 (1), 13± 30.
- KLAFKI, W. (2000) Didaktik analysis as the core of preparation for instruction. In I. Westbury, S. Hopmann and K. Riquarts (eds), *Teaching as a Reflective Practice: The German Didaktik Tradition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 139± 159.
- KUIPER, W. A. J. M. (1994) Curriculumvernieuwing en lespraktijk, en beschrijvend onderzoek op het terrein van de natuurwetenschappelijke vakken in het perspectief van de basisvorming [Curriculum Innovation in Science and Classroom Practices] Enschede, The Netherlands: Universiteit Twente.
- LAKATOS, I. (1976) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LANGEVELD, M. J. (1965) *Beknopte Theoretische Pedagogiek [Fundamentals of Educational Philosophy]* (Groningen, The Netherlands: Wolters).
- NELISSEN, J. M. C. (1987) *Kinderen leren Wiskunde [Children Learn Mathematics]* Gorinchem, The Netherlands: De Ruiter.
- PERRENET, J. C. (1995) *Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs: samenvatting en [Problem solving in mathematics]*. Doctoral dissertation, University of Amsterdam.
- ROELOFS, E. and TERWEL, J. (1999) Constructivism and authentic pedagogy: state of the art and recent developments in the Dutch national curriculum in secondary education. *Journal of Curriculum Studies*, 31(2), 201± 227.
- SCHWAB, J. J. (1970) *The Practical: A Language for Curriculum*. Washington, DC: National Educational Association.
- SFARD, A. (1995) Symbolizing mathematical reality into being. Paper presented at the Symposium on 'Symbolizing, communication, and modelling', Vanderbilt University, Nashville.
- SIMON, M. A. (1995) Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114± 145.
- SMALING, A. (1987) *Methodologische objectiviteit en kwalitatief onderzoek [Methodological objectivity and qualitative research]*. Lisse, The Netherlands: Swets and Zeitlinger.
- STREEFLAND, L. (1990) *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research* (Dordrecht, The Netherlands: Kluwer).
- STREEFLAND, L. (ed.) (1993) *The Legacy of Hans Freudenthal* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- TERWEL, J. (1984) *Onderwijs maken. Naar ander onderwijs voor 12± 16-jarigen [Curriculum development in secondary education]*. Nationaal Instituut voor Educatief Onderzoek (SVO), SVO-series in Educatief Onderzoek, No. 77. Utrecht and Harlingen, The Netherlands: Flevodruk.
- TERWEL, J. (1990) Real maths in cooperative groups. In N. Davidson (ed.), *Cooperative Learning in Mathematics*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 228± 264.
- TERWEL, J. (1999). Constructivism and its implications for curriculum theory and practice. *Journal of Curriculum Studies*, 31(2), 195± 200.
- TERWEL, J., HERFS, P. G. P., MERTENS, E. H. M. and PERRENET, J. C. (1994) Cooperative learning and adaptive instruction in a mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 26 (2), 217± 233.

- TREFFERS, A. (1987) Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics: The Wiskobas Project. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- VAN DEN BRINK, F. J. (1989) Realistisch rekenonderwijs aan jongekinderen Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (1996) Assessment and Realistic Mathematics Education Utrecht, The Netherlands: Cd Beta Press.
- VERMEULEN, A., VOLMAN, M. and TERWEL, J. (1997) Success factors in curriculum innovation: mathematics and science. Curriculum and Teaching, 12 (2), 15± 28.
- VERSTAPPEN, P. (1991) Easier Theorized Than Done. Enschede, The Netherlands: Dutch National Institute for Curriculum Developmen.
- VYGOTSKY, L. S. (1978) In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner and E.Souberman (eds), Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- WALKER, D. F. (1990) Fundamentals of Curriculum. San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich.
- WESTBURY, I. (1995) Didaktik and curriculum theory: are they the two sides of the same coin? In S. Hopmann and K. Riquarts (eds), Didaktik and/or Curriculum Kiel: Institut fue rdie PaÉdagogikderNaturwissenschaften ander Universitat Kiel, 233± 263.
- WESTBURY, I. (2000) Teaching as a re<sup>-</sup>ective practice: what might Didaktik teach curriculum? In I. Westbury, S. Hopmann and K. Riquarts (eds), Teaching as a Reflective Practice: The German DidaktikTradition. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates), 15± 39.