QUINTO PROBLEMA DE LAS ESFERAS

Oscar Bressan

A continuación presentamos una reformulación del problema aparecido en el texto *Errar es un placer* de E. M. Martínez. Grupo Editorial Iberoamericano.1998 Págs. 27 a 30. El autor presenta el siguiente problema tomado de D. Doland : Some irrational results with irrational numbers. Rev. Mathematics teachers. 1981.

1) Enunciado del problema:

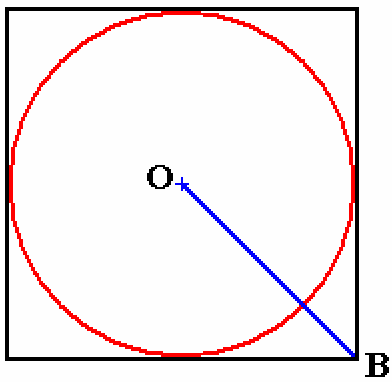
"Una esfera de radio 10 cm se colocó en la esquina de un cuarto de tal forma que fuera tangente a las paredes y el piso, las cuales formaban, entre ellas, ángulos rectos. También se colocó una esfera pequeña entre la esfera grande, las paredes y el piso de tal modo que es tangente a esos elementos. Encontrar el volumen de la esfera pequeña".

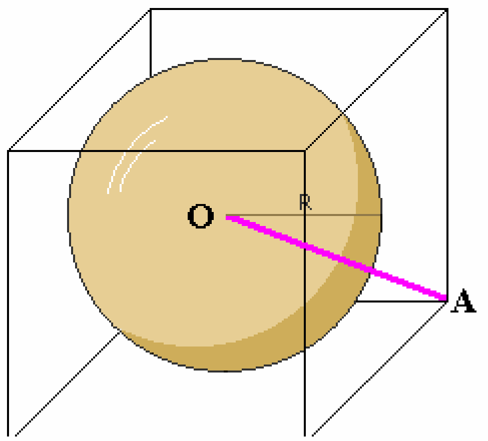
La solución está realizada en el plano, por lo cual el problema queda reducido a dos circunferencias y el desarrollo se hace sobre ese modelo y no sobre el espacio que es el contexto original planteado en el problema. Acá se resuelve el problema en el espacio, como consideramos que es correcto de hacer.

2) Bases previas:

Debemos tener en cuenta que si tenemos una circunferencia de radio "r" inscripta en un cuadrado, la distancia ("d") entre el centro de la circunferencia y un vértice del cuadrado es:

$$d = \overline{OB} = r\sqrt{2}$$

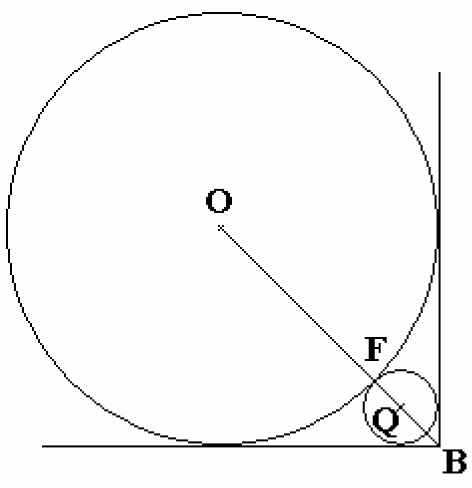




Pero, si tenemos una esfera de radio "r" inscripta en un cubo, la distancia entre el centro de la esfera y un vértice del cubo es:

$$\overline{OA} = R\sqrt{3}$$

(¡OJO! $\sqrt{3}$ y no $\sqrt{2}$)



3) Planteo del problema:

Para encontrar el radio de la esfera menor procederemos como sigue:

$$OB = BQ + QF + FO$$

donde:

$\overline{OB} = 10\sqrt{3}$

$\overline{BQ} = r\sqrt{3}$

$\overline{QF} = r$

$\overline{FO} = 10$

Dado que:

$$10\sqrt{3} = r\sqrt{3} + r + 10$$

despejando a “r” se obtiene:

$$r = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}$$

El volumen de la esfera se calcula con la fórmula:

$$\mathrm{V} = \frac{4\,\pi\,\mathrm{r}^3}{3}$$

y al sustituir “r” se llega a:

$$\mathrm{V} = \frac{4*1000*\pi}{3}\left[\frac{\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right]^3$$

a) Verificar que el procedimiento seguido es correcto.

Dicha expresión para el cálculo del volumen se puede expresar como:

$$\boxed{V_1 = \frac{4000\,\pi}{3}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]^3}$$

b) Justificar este paso.

Si consideramos las siguientes transformaciones:

$$\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]^3 = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right]^3 = \left[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\right]^3 = \frac{(\sqrt{3}-1)^6}{8}$$

c) Exlicar cada una de estas transformaciones.

De ahí que otra expresión para el cálculo del volumen puede ser:

$$\boxed{V_2 = \frac{4000\,\pi}{3}\,\frac{(\sqrt{3}-1)^6}{8}}$$

Por otra parte podemos utilizar el hecho de que:

$$\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]^3 = \left[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\right]^3 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^3$$

Así que el volumen de la esfera también se puede expresar como:

$$\boxed{V_3 = \frac{4000\,\pi}{3}\,(2-\sqrt{3}\,)^3}$$

d) Indicar la transformación realizada en este paso.

Finalmente podemos expresar el volumen de un cuarto modo:

$$\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]^3 = (2-\sqrt{3}\,)^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

e) ¿Es correcto?

Por lo tanto:

$$\boxed{V_4 = \frac{4000\,\pi}{3}\,(26 - 15\sqrt{3}\,)}$$

<u>4) Cálculos:</u>

Las cuatro expresiones anteriores (V_1, V_2, V_3 y V_4) pueden servir para calcular el volumen de la esfera pequeña. Para simplificar los cálculos se puede usar una calculadora o una computadora.

f) Utilizando el valor de π con siete cifras significativas, es decir $\pi = 3{,}1415926$ pero variando la aproximación de $\sqrt{3}$, completa la siguiente tabla:

Aproximaciones para $\sqrt{3}$	**V_1**	**V_2**	**V_3**	**V_4**
1,7	**72,9947**	**61,6009**	**113,0973**	**2094,3951**
1,73	**80,0883**	**79,2384**	**82,4480**	**209,4395**
1,732	**80,5712**	**80,5499**	**80,6293**	**83,7758**
1,7320	**80,5712**	**80,5499**	**80,6293**	**83,7758**
1,73205	**80,5833**	**80,5829**	**80,5842**	**80,6342**
1,732050	**80,5833**	**80,5829**	**80,5842**	**80,6342**
1,7320508	**80,5835**	**80,5835**	**80,5835**	**80,5839**
1,73205080	**80,5835**	**80,5835**	**80,5835**	**80,5839**

1,732050807	**80,5835**	**80,5835**	**80,5835**	**80,5835**
1,7320508075	**80,5835**	**80,5835**	**80,5835**	**80,5835**

g) ¿Cuál elegirías como resultado correcto?
h) ¿Crees que la fórmula V_4 es errónea? Justifica.
i) ¿Cómo puedes explicar la diferencia de los resultados?

5) Ante el dilema. Primera parte del enigma:

Los resultados son intrigantes ya que las fórmulas V1, V2, V3 y V4 en todos los casos los resultados correctos cuando ponemos el valor exacto de $\sqrt{3}$ pero ¿porqué tienen una convergencia tan diferente cuando usamos valores aproximados?

Es obvio que la cuatro fórmulas de V tienen un comportamiento diferente a las aproximaciones que hacemos al valor de $\sqrt{3}$. Esta respuesta puede estudiarse con rigor si escribimos las cuatro fórmulas como:

$$\boxed{VC_1 = \frac{4000\,\pi}{3}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^3}$$

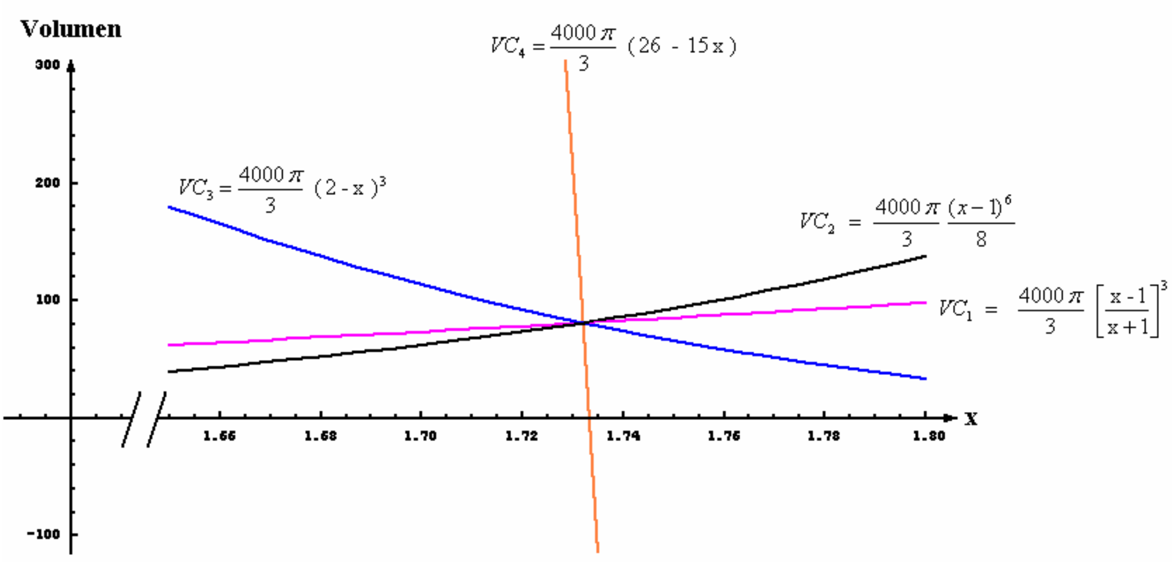
$$\boxed{VC_2 = \frac{4000\,\pi}{3}\,\frac{(x-1)^6}{8}}$$

$$\boxed{VC_3 = \frac{4000\,\pi}{3}\,(2-x)^3}$$

$$\boxed{VC_4 = \frac{4000\,\pi}{3}\,(26-15x)}$$

donde hemos reemplazado a $\sqrt{3}$ por x. Sustituyendo x por $\sqrt{3}$ en cualquiera de la cuatro fórmulas de VC obtenemos el valor correcto.

Como queda de manifiesto en el gráfico siguiente, las cuatro fórmulas tienen una dependencia diferente de x:



Observamos que cuando x = $\sqrt{3}$ = 1,7320508075... todas las curvas se cortan en un solo punto, que corresponde a un volumen de 80.583470393094564....

También en el gráfico observamos una convergencia diferente a este valor de x. En la tabla anterior uno se acercaba al valor exacto de la $\sqrt{3}$ desde la izquierda. Mirándolo en el gráfico se encuentra el siguiente comportamiento:

- VC_1 (en violeta) es una función que ***crece*** suavemente y así ocurre con los valores de la tabla.
- VC_2 (en negro) ***crece*** un poco más rápidamente, y así se verifica en la tabla.
- VC_3 (en azul) en cambio ***decrece***, lo que también se verifica en la tabla.
- Finalmente VC_4 (en naranja) ***decrece*** muy fuertemente, y a ello se debe ese especial comportamiento en la tabla.

6) Ante el dilema. Segunda parte del enigma:

De todos modos sobrevive un segundo enigma: ¿por qué encontramos un comportamiento diferente en cuando a la convergencia de cuatro fórmulas de un volúmen, deducidas estrictamente bajo las leyes de la matemática?

Realmente la cuatro fórmulas V_1, V_2, V_3 y V_4 son correctas cuando usamos el valor exacto de $\sqrt{3}$, pero son incorrectas como dependencia funcional. Vamos a ver en detalle esta conclusión para un caso particular, que es cuando pasamos de V_3 a V_4, pero lo mismo podría hacerse con cualquier otra.

Tenemos

$$\boxed{V_3 = \frac{4000\pi}{3}(2 - \sqrt{3})^3}$$

$$\boxed{V_4 = \frac{4000\pi}{3}(26 - 15\sqrt{3})}$$

lo que ***debería*** implicar que

$$(2 - x)^3 = 26 - 15x$$

pero en cambio:

$$(2 - x)^3 \neq 26 - 15\,x$$

(donde x son valores aproximados de $\sqrt{3}$) porque el término de la izquierda no tiene la misma forma funcional que el término de la derecha. El desarrollo sería correcto si hubiéramos hecho:

$$(2 - x)^3 = 2^3 - 3 \,.\, 2^2 \,.\, x + 3 \,.\, 2 \,.\, x^2 - x^3 = 8 - 12\,x + 6\,x^2 - x^3$$

pero en cambio es erróneo reemplazar x^2 por 3 y a través de este resultado reemplazar x^3 por 3 $\sqrt{x}$, si x es un valor <u>aproximado</u> a la $\sqrt{3}$. Estos cambios sólo son legítimos si x es <u>exactamente</u> igual a la $\sqrt{3}$.

Como ejemplo, si tomamos x como el valor aproximado 1,732, el único desarrollo válido es:

$$(2 - 1{,}732)^3 = 8 - 12 * (1{,}732) + 6 * (1{,}732)^2 - (1{,}732)^3$$

<u>7) Conclusión:</u>

Las fórmulas V_1, V_2, V_3 y V_4 son correctas como ecuaciones para calcular el volumen de la esferita pequeña, pero son incorrectas si las consideramos como funciones de x donde x es el valor aproximado de la raíz de 3. El error proviene de usar aproximaciones a esta raíz cuadrada y luego sustituir el cuadrado de la raíz de un valor aproximado por el valor 3.