INVESTIGANDO NÚMEROS (Nivel Primario)
Adriana Rabino

Contenidos: paridad de números, números primos, divisibilidad, propiedades de potencias y exponentes, regularidades numéricas, números cuadrados.

<u>1) Pares e impares</u>

a) Completa las siguientes tablas y expresa las reglas de la suma y producto de dos números enteros según su paridad.

Suma

+	Par	Imp.
Par		
Imp.		

Multiplicación

X	Par	Imp.
Par		
Imp.		

b) Sin resolver los productos, decide si cada uno de los resultados a continuación es par o impar:

$2^9 \times 3^{12}$
$5^{10} \times 4^{21}$
$7^{60} \times 2^{39}$
$6^{45} \times 4^{45}$

¿Puedes predecir cuál será el último dígito (unidad) de cada producto anterior?

2) <u>Seguir contando</u>: Siete niños se sientan en un círculo y empiezan a contra siguiendo el sentido de las agujas del reloj. Cada niño del grupo no pierde la cuenta de los número/s que él dice (por ejemplo el primer niño dice 1, 8, 15 y así sucesivamente).

a) Si continúan contando hasta 100, todos dirán la misma cantidad de números? ¿Cómo lo sabes? ¿Y si cuentan hasta 133?
b) Si cuentan hasta 300, qué niño dirá el ultimo número?
c) Si todos dicen 17 números, cuál será el ultimo número?
d) Para una potencia de 10 dada, cómo sabes quién del grupo lo va a decir?
e) Para cualquier potencia de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …) anticipa quién en el grupo lo va a decir.
f) Explora preguntas d y e en relación a potencias de 3.
g) ¿Qué ocurre cuando empieza a contar otro niño?
h) ¿Qué ocurre si el conteo se hace contrario a las agujas del reloj?
i) ¿Qué ocurriría si los siete niños cuentan cada 3 en vez de cada uno?

3) <u>Contando en círculos</u>: Una flecha que va desde las 5 a las 8 en punto indica la trayectoria del horario: transcurrieron 3 horas. Si continuamos haciendo saltos de tres horas en el reloj, se dibuja un cuadrado cuyos lados son las 4 flechas que van desde 5 a 8, desde 8 a 11, desde 11 a 2 y desde 2 a 5.

a) ¿Qué ocurre cuando haces lo mismo pero empezando a las 6 en punto?
b) Explora qué formas geométricas se obtienen si se hacen saltos de 2 horas, 4 horas y 6 horas empezando en cualquier hora del reloj. ¿Cómo explicas que se formen esas figuras?
c) ¿Qué ocurre si haces saltos de 5 horas, empezando en cualquier punto del reloj? ¿Cuántos saltos necesitas para llegar al mismo punto de partida?
d) ¿Qué pasa si haces saltos de 7 horas empezando en cualquier punto del reloj?

4) **<u>Once y nueve</u>**: Suma sus dígitos. Divide el resultado por 11. Ahora resta la suma de sus dígitos. Luego divide el resultado por 9. ¿Qué ocurre? ¿Le encuentras sentido a esto?

54	45	54 + 45 = 99	54 – 45 = 9
63	36	63 + 36 = 99	63 – 36 = 27
74	47	74 + 47 = 121	74 – 47 = 27
82	28	82 + 28 = 110	82 – 28 = 54
87	78	87 + 78 =165	87 – 78 = 9
…	…	…	…

5) **<u>Grandes exponentes</u>**: ¿Qué número es mayor, 1.000^{2000} o 2.000^{1000}?

6) **<u>Números cuadrados</u>**: Explora regularidades en el tablero de números cuadrados que se presenta a continuación. Usa las regularidades y reglas que encontraste para completar las dos filas en blanco.

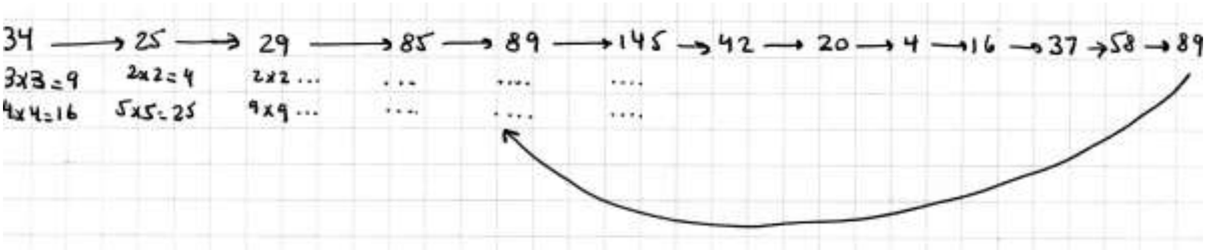
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600
1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500
2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600
3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900

7) **<u>Diferencias de cuadrados</u>**: Continúa cada una de las siguientes regularidades:

$2^2 - 0^2 = 4$	$5^2 - 1^2 = 24$	$3^2 - 0^2 = 9$	$7^2 - 2^2 = 45$
$3^2 - 1^2 = 8$	$6^2 - 2^2 = 32$	$4^2 - 1^2 = 15$	$8^2 - 3^2 = 55$
$4^2 - 2^2 = 12$	$7^2 - 3^2 = 40$	$5^2 - 2^2 = 21$	$9^2 - 4^2 = 65$
…	…	…	…

¿Qué regularidad/es observas?
Usa baldosas cuadradas y/o modelo de área para explorar por qué ocurren estas regularidades.

8) **Cuadrando y sumando**: Considera la siguiente sucesión de números, cada uno obtenido a partir de elevar al cuadrado y sumar, los dígitos del número precedente. En este ejemplo, empezamos con 34 y luego de 12 iteraciones, volvemos a 89, y el ciclo se repite. Explorar lo que sucede si se comienza con otros números. ¿Siempre se llega a 89? Si es así, ¿sucede siempre después de la misma cantidad de iteraciones?



Soluciones

1) a) Las reglas para la suma son:

- La suma de dos números pares es par.
- La suma de dos números impares es par.
- La suma de un número par y de un número impar es impar.

Las reglas para el producto son:

- El producto de dos números pares es par.
- El producto de dos números impares es impar.
- El producto de un número par por un número impar es par.

b)
$2^9 \times 3^{12}$: 2^9 es par porque se puede expresar como 2.2^8 (ver definición de número par) y 3^{12} es impar (el producto de impares siempre es impar), por lo tanto par x impar = par.
Las últimas cifras de las potencias de 2 empezando con 2^1 se repiten de la siguiente manera: 2, 4, 8, 6. Entonces 2^9 termina en 2.
Las últimas cifras de las potencias de 3 empezando con 3^1 se repiten de la siguiente manera: 3,9,7,1. Entonces 3^{12} termina en 1.
Por lo tanto, el producto original de las dos potencias termina en 2 x 1 = 2.

Con los demás productos, utilizar la tablita del punto anterior para darse cuenta si cada uno de los factores es par o impar. Claramente se ve que si las bases son impares, el resultado de la potencia es siempre impar, y si las bases son pares, se transforma la potencia en un producto de la base por otra potencia: $4^{21} = 4.4^{20}$. Como ese factor es par, siempre se puede escribir como 2 por "algo", en este caso 2.2
Para ver con qué cifra termina el producto de potencias, analizar las regularidades de las últimas cifras, ver que se repiten en forma cíclica y deducir cuál será la terminación de la potencia buscada.

2)a) No. Para que todos digan la misma cantidad de números, 100 debería ser divisible por 7 y no lo es. Al dividir 100:7 el resto es 2, o sea que hay dos niños que dicen un número más.
Como 133 es múltiplo de 7, en este caso todos dicen la misma cantidad de números.
b) 300 : 7 = 42 y resto 6, por lo tanto el 6° niño dirá el último número.
c) 17 x 7 = 119
d) Si se realiza la división de distintas potencias de 10, probando con las primeras pareciera que no existe una regularidad. Sin embargo (se sugiere realizar una tabla) al dividir las distintas potencias de 10 por 7, se observa desde 10^1 hasta 10^6 los distintos restos son 3, 2, 6, 4, 5, 1. Luego, a partir de 10^7 = 10.000.000 se vuelven a repetir los restos en forma cíclica. Esos restos representan el niño que le tocará decir dicha potencia. Por ejemplo, si se trata de 10^4, el niño que dirá esta potencia es el que se encuentra en el 4° lugar.
e) En el caso de las potencias de 2, las potencias 2^0, 2^1, 2^2 lo dicen el 1°, 2° y 4° niño respectivamente. A partir de la potencia $2^3 = 8$, los restos se repiten en forma periódica: 1, 2 y 4, por lo tanto esas serán las posiciones de los niños.
f) Con respecto a las potencias de 3, los resto se repiten de l siguiente manera: 1, 3, 2, 6, 4, y 5 en forma cíclica, o sea que éstas son las posiciones de los niños que dirán la última potencia de 3.
g) Es lo mismo independientemente quién empieza a contar.
h) Es lo mismo, no afecta el sentido.
i) Si los niños cuentan cada 3, en la 1° y 2° vuelta no llegar a contar todos los niños (falta el 5°). Recién en la 7° vuelta todos los niños dicen 3 veces un número. (Pensar que 3 y 7 son corrimos, o sea que no tienen divisores en común).

3) a) Si se empieza a las 6 en punto (y por supuesto, haciendo también saltos de 3 horas) se dibuja un cuadrado cuyos vértices son 6, 9, 12 y 3.
b) Como los saltos son todos iguales se van a formar polígonos regulares. Si los saltos son de 2 horas se obtiene un exágono porque 12 : 2 = 6 (6 lados). Si los saltos son de 4 horas se obtiene un triángulo porque 12 : 4 = 3. Y si los saltos son de 6 horas se obtiene un segmento, dado que 12 : 6 = 2 (no hay ningún polígono de 2 lados, el mínimo es 3).
c) Si se hacen saltos de 5 horas, al no ser 5 divisor de 12, se tendrán que dar 5 vueltas para llegar al mismo lugar. El m.c.m. (5,12) = 60, o sea que tienen que pasar 60 horas (5 vueltas de reloj) para llegar al mismo lugar.
d) Análogamente, si los saltos son de 7 horas, el 7 no es divisor de 12 Buscando el m.c.m. (7,12) = 84, tienen que pasar 84 horas para que se vuelva al mismo lugar, lo que implican 7 vueltas al reloj.

4) La suma de los dos números invertidos siempre es múltiplo de 11 y la resta es múltiplo de 9. Al dividir por 11 la suma da como resultado la suma de las cifras del número y al dividir por 9 la resta da como resultado la resta de las cifras del número.

5) $1000^{2000} = (1000^{1000})^2 = 1000^{1000} . 1000^{1000}$
$2000^{1000} = (2 . 1000)^{1000} = 2^{1000} . 1000^{1000}$
Como $1000^{1000} > 2^{1000}$, la primer potencia es mayor que la segunda.

6) 1)

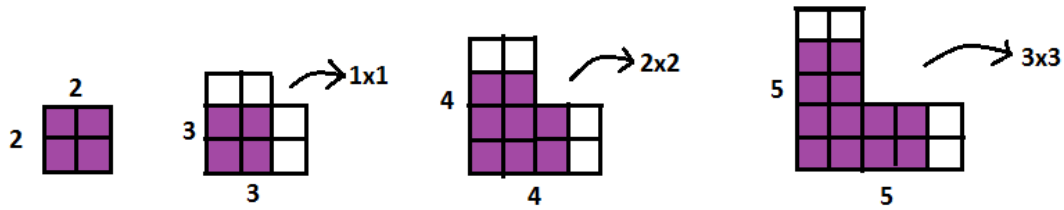
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600
1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500
2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600
3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900
5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241	6400
6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921	8100

Algunas regularidades:

- Todos los números de la misma columna terminan en la misma cifra.
- Las cifras que representan la unidad en cada columna siguen esta regularidad: 1^2, 2^2, 3^2, ….(teniendo en cuenta siempre la unidad)
- Las cifras de las decenas en cada columna saltan según esta regularidad: en la 1° de dos en dos, en la 2° de cuatro en cuatro, en la 3° de 6 en 6, etc.
- La diferencia de los números en cada columna aumenta en forma constante, siempre 200 más, empezando en la primera columna con un aumento de 120 (1, 121, 121+320, 441+520, 961+720…), en la segunda columna empieza el aumento con 140 (4, 144, 144+340, 484+540,….) y así sucesivamente.

7) Las regularidades que se observan es que tanto los minuendos como los sustraendos son números consecutivos y los resultados tienen diferencias constantes.
Por ejemplo:

$2^2 – 0^2 = 4$
$3^2 – 1^2 = 8$
$4^2 – 2^2 = 12$
$5^2 – 3^2 = 16$…



8) Por ejemplo, empezando con 27: $2^2 + 7^2 = 53$…….
27 53 34 25 29 85 89 145 42 20 4 16 37 58 89…….
Sucede, pero no en la misma cantidad de pasos.