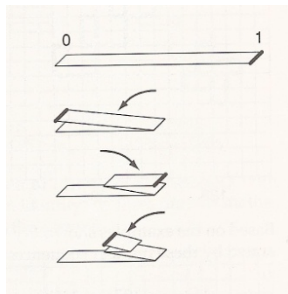
Problema secundaria

Iteración geométrica (completada)

(Extraído de Sobel, M, y Maletsky E : Teaching Mathematics. (1999, 241)

Toma una tira de papel y pinta un extremo (ver dibujo). Dóblala por la mitad, de derecha a izquierda. Dobla la mitad obtenida nuevamente por la mitad, de izquierda a derecha; ahora vuelve a doblar la mitad obtenida de derecha a izquierda.



Sigue plegando por la mitad la parte superior alternadamente de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Observa cómo se mueve el extremo coloreado.

El mismo comienza en 1, se mueve a 0, vuelve a ½ y sigue a ¼,…

Establece la sucesión que tiene por términos los puntos donde cae el borde coloreado (1, 0, ½, ¼, 3/8, 5/16, …). Trabaja con el máximo de precisión que puedas.

¿A qué valor entre 0 y 1 converge el extremo coloreado de la tira?

Mostrar que el valor límite debe ser 1/3

Solución 1 (puede ser trabajarla por los alumnos de primaria usando la calculadora para expresar los números fraccionarios en decimales y estudiar la aproximación): los puntos donde cae el borde coloreado, según el plegado sea a izquierda o derecha , son:

1 = 1	0 = 0
½ = 0,5	¼ = 0,25
3/8 = 0,375	5/16 = 0,3125
21/64 = 0,3281	43/128 = 0,33593
…	…

Vemos entonces que si consideramos las sucesiones en negro y en rojo ambas convergen a 1/3

Para encontrar la regularidad que rige la sucesión, se pueden analizar los términos y comprobar que, a partir de ½, los **denominadores** se van duplicando, mientras que para ver qué sucede con los **numeradores**, basta tomar cualquier término y el anterior y expresarlos con el mismo denominador. Así se puede observar que, haciendo este procedimiento de a pares, el numerador aumenta en 1 o disminuye en 1 en forma alternada. Por ejemplo: ½ y ¼ , ½ = 2/4, con respecto a ¼ el numerador disminuyó en 1. Luego ¼ y 3/8, ¼ = 2/8 con respecto a 3/8 el numerador aumentó en 1, y así sucesivamente. Esto hace posible continuar la sucesión numérica tanto como se desse para comprobar su convergencia.

Resulta interesante también ver qué pasa si se trabaja con la serie motivada en esa sucesión:

Si se aplica sentido a los movimientos (indicando el movimiento a derecha con + y a izquierda con -) obtengo la serie:

$$S = 1 - 1 + 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + 1/128 - \ldots$$

$$= 1 - (1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + 1/64 - 1/128 + \ldots)$$

El paréntesis corresponde a una progresión geométrica de razón -1/2 de modo que la suma de los n primeros términos de esta sucesión se puede escribir como[1]:

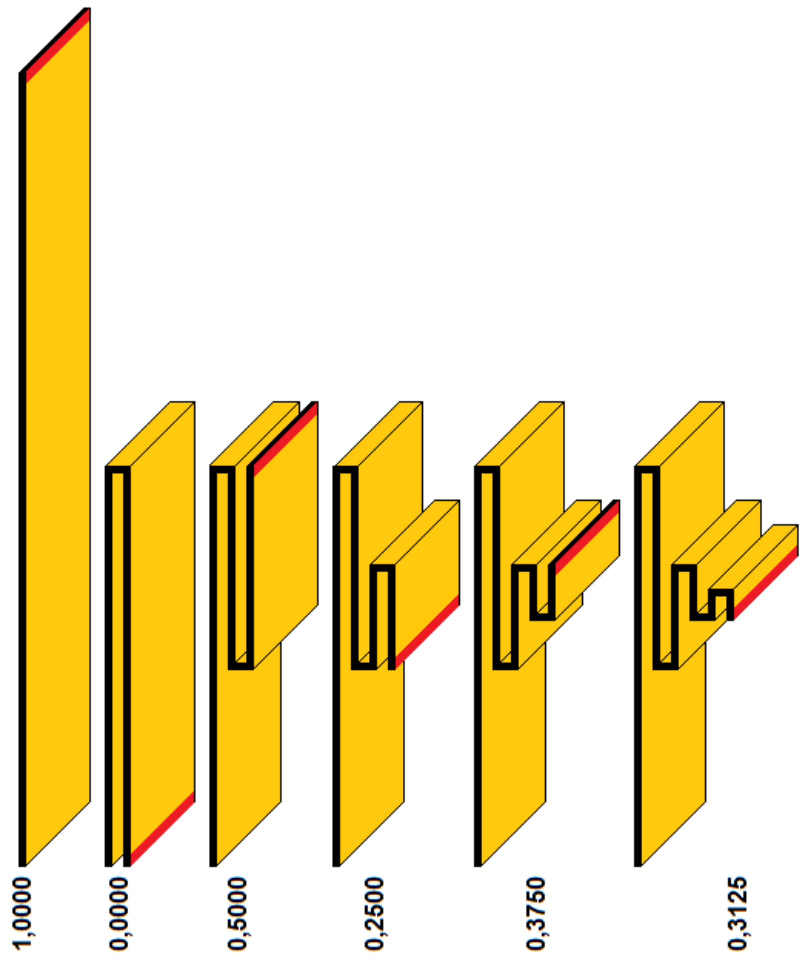
$$S_n = 1 - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

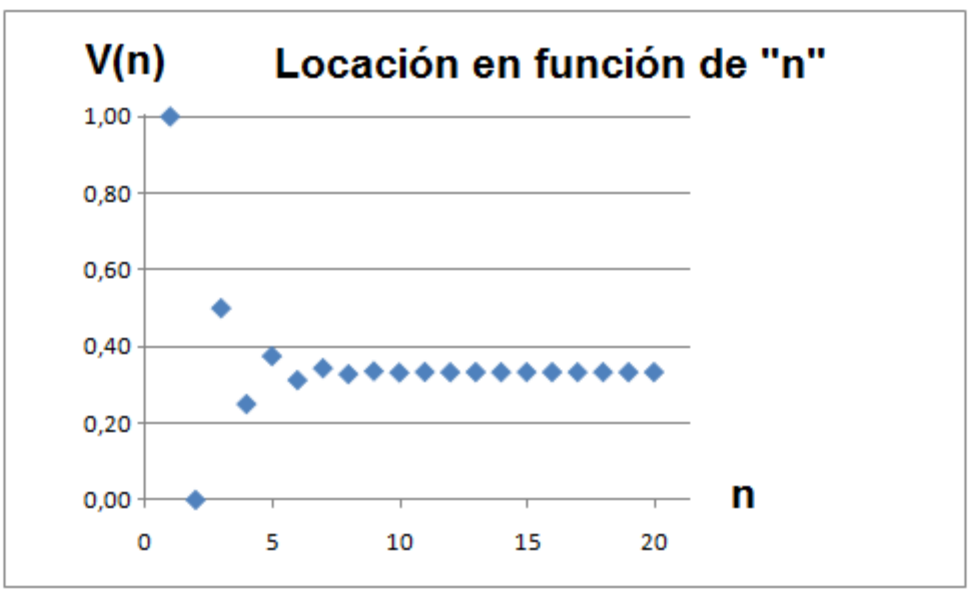
obteniéndose también el valor 1/3 ¡!!

Solución 2: Trabajando con la sucesión y la serie

V(n) representa el punto del intervalo [0-1] donde cae el borde coloreado;
d(n) representa la longitud del pliegue según sea a derecha o izquierda o la diferencia que media entre dos puntos consecutivos alcanzados;
S(n) es la serie que va dando en forma recursiva el valor suma de los valores de la secuencia para cualquier n

[1] Se realizó un intercambio de términos en la fórmula habitual porque la razón es negativa.


1,0000
0,0000
0,5000
0,2500
0,3750
0,3125


V(n)
Locación en función de "n"
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0
5
10
15
20
n

Orden de "n"	VALOR (V(n))	DELTA (d(n))	SUMA (S(n))
Inicial 1	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,000000	-1,000000	0,000000
3	0,500000	0,500000	0,500000
4	0,250000	-0,250000	0,250000
5	0,375000	0,125000	0,375000
6	0,312500	-0,062500	0,312500
7	0,343750	0,031250	0,343750
8	0,328125	-0,015625	0,328125
9	0,335938	0,007813	0,335938
10	0,332031	-0,003906	0,332031
11	0,333984	0,001953	0,333984
12	0,333008	-0,000977	0,333008
13	0,333496	0,000488	0,333496
14	0,333252	-0,000244	0,333252
15	0,333374	0,000122	0,333374
16	0,333313	-0,000061	0,333313
17	0,333344	0,000031	0,333344
18	0,333328	-0,000015	0,333328

V(n) = (V(n-2) + V(n-1)) / 2	d(n) = - d(n-1) / 2	S(n) = S(n-1) + d(n)