CUADRATURAS DE POLÍGONOS REGULARES

Introducción

Si nos remontamos en la historia de la matemática hasta llegar a los antiguos griegos, nos encontramos con que en esa época los maestros se reconocían por los pocos elementos que necesitaban para solucionar los problemas; por ejemplo, en Geometría era obligatorio utilizar, solamente, regla no graduada (para trazar rectas) y compás. Esta restricción llevó a los matemáticos a estrellarse frente a los tres problemas clásicos de la matemática griega:

La trisección del ángulo: dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Arquímedes (287-212 a.C.), encontró un método que trisecaba muchos ángulos, pero fallaba en otros.

La duplicación del cubo: dado un cubo cualquiera construir otro cubo que duplique el volumen del primero. El Oráculo de Apolo, en Delfos, planteó este problema a Pericles (459-429 a.C.) indicando que la epidemia de peste que asolaba Atenas sólo desaparecería si se duplicaba el volumen del altar cúbico de Apolo.

La cuadratura del círculo: construcción de un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado. La primera referencia conocida sobre este problema se debe a Anaxágoras (499-428 a.C.)

Hasta el siglo XIX no se llegó a demostrar la imposibilidad de resolver esos tres problemas con regla y compás, aunque tienen solución por otros métodos.

Puzzles de cuadraturas

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades. En relación con las Matemáticas, muchas divisiones de figuras han estado en la base de materiales, tanto en su aspecto lúdico para jugar, como para utilizarlos didácticamente.

Existen muchos puzzles, conocidos desde hace tiempo, y que no por ello pierden su atracción. Basta citar, como muy popular, el Tangram Chino. Otro gran bloque lo constituyen las disecciones del Teorema de Pitágoras, como la muy conocida de Henry Perigal.

Los problemas geométricos de disección plantean la partición de figuras geométricas en trozos de forma que al unirse se obtengan otras figuras geométricas. En este artículo vamos a presentar unos casos particulares de disecciones geométricas: las cuadraturas. Consideraremos como cuadraturas a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo un polígono regular) de forma que con las piezas obtenidas pueda construirse un cuadrado.

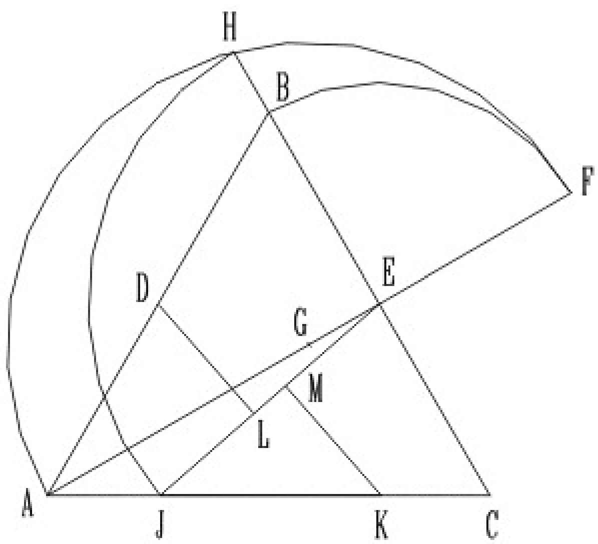
El aspecto más matemático es conseguir dividir la figura con la que estemos trabajando utilizando regla y compás. Ante la dificultad que ello supone se suelen presentar las divisiones ya hechas, de forma que se trabaje como si fuese un puzzle, es decir, el objetivo es pasar de una figura a otra.

La primera pregunta que se puede plantear es: ¿qué polígonos regulares podremos cuadrar?

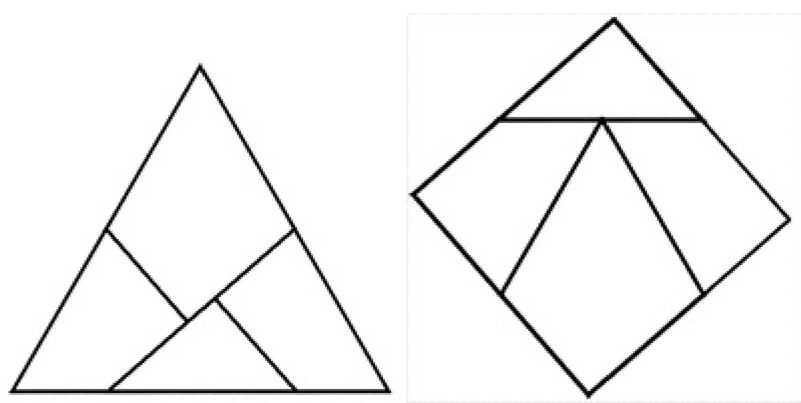
La cuadratura del triángulo

Una primera aproximación a la respuesta viene dada por el especialista inglés en juegos Henry Ernest Dudeney (1857-1930), quien estudió la cuadratura del triángulo equilátero, presentando en 1905 en la Real Sociedad de Londres, un modelo construido en caoba.

Con regla y compás, como exigían los antiguos griegos, Dudeney encontró la manera de dividir un triángulo equilátero en cuatro piezas que forman también un cuadrado. En su diseño podemos seguir los siguientes pasos:



1. Dibujar el triángulo equilátero ABC.
2. Obtener los puntos medios de AB y BC (serán los puntos D y E).
3. Prolongar AE hasta F, para que EF= EB.
4. Hallar el punto medio de AF (será el punto G).
5. Con centro en G dibujar el arco AF.
6. Prolongar EB hasta cortar el arco, obteniendo el punto H.
7. Con centro en E dibujar un arco de radio EH. Llamar J al punto en que corte al lado AC.
8. Trazar el segmento JE.
9. Sobre la base AC del triángulo marcar K, de forma que JK = BE.
10. Dibujar las perpendiculares sobre JE desde D y K, obteniendo los puntos L y M.
11. El triángulo queda dividido en cuatro piezas: los tres cuadriláteros BELD, DLJA y ECKM y el triángulo JMK, con las que podemos formar un cuadrado.



Esta cuadratura del triángulo equilátero es quizás la más conocida, hasta el punto de que se puede encontrar en anuncios publicitarios, e incluso su estructura ha sido tomada por el diseñador Maty Gronberg para presentar la mesa que aparece en la imagen (tomada de El País Semanal de 30-08-87), y que tiene la virtud de poder usarse como mesa triangular o cuadrangular según las necesidades.

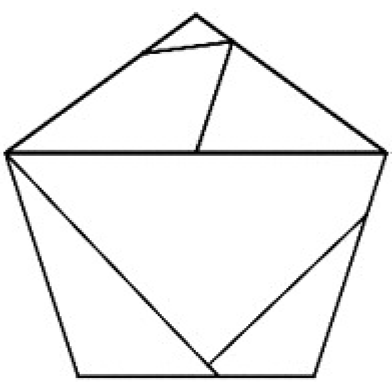
Cuadraturas de otros polígonos regulares

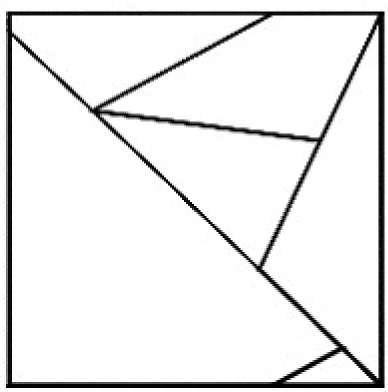
Con la intención de no extender en demasía este artículo incluiremos otras cuadraturas sin especificar la construcción completa con regla y compás.

Para trabajar con ellas basta copiar los dibujos, recortarlos y jugar con las piezas obtenidas como un puzzle cualquiera.

Cuadratura del pentágono:

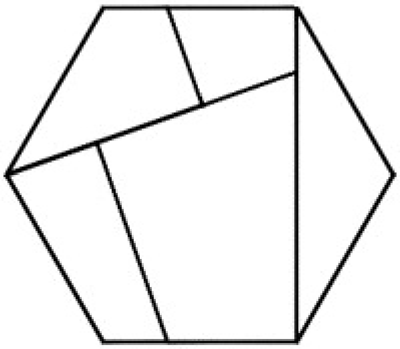
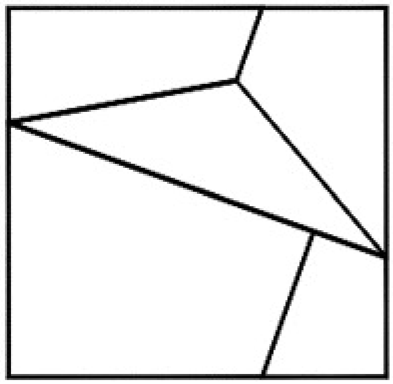
Existen varias divisiones del pentágono que después de reordenar las piezas dan lugar a un cuadrado. Nosotros reseñamos aquí una realizada también por Dudeney.





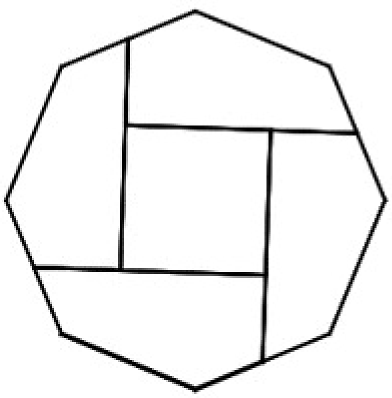
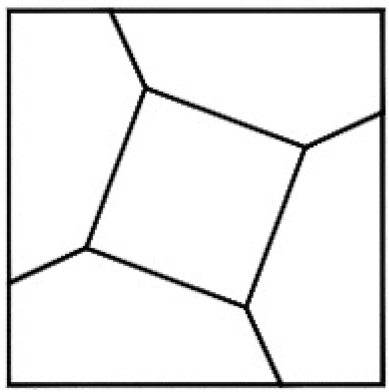
Cuadratura del hexágono:

Del hexágono también existen varias divisiones. Os mostramos una de ellas.

<u>Cuadratura del octógono</u>:

Esta es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.

A la pregunta que hacíamos sobre qué polígonos admiten una cuadratura responde el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein: Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro. La demostración se puede encontrar enhttp://bayledes.free.fr/decoupage/index.html.

Luego todos los polígonos se pueden cuadrar, el interés radica ahora en encontrar cuadraturas con el mínimo número de piezas o que sean especialmente "bellas" (por la forma de sus piezas, su simetría…).

- **Cómo trabajar estos puzzles en clase**

Una primera forma de utilizar este material es directamente como puzzle. Es decir, entregar las piezas troqueladas a los alumnos y pedirles que construyan por un lado el cuadrado y por otro el polígono que le corresponda.

Este planteamiento es muy atractivo y motivante para quien se enfrenta a ese reto. Nosotros lo hemos comprobado trabajando en los salones de juegos o al realizar la actividad de Matemáticas en la Calle.

También puede plantearse esta actividad como línea de trabajo interdisciplinar entre Matemáticas y Tecnología, de forma que en Matemáticas se realice el estudio teórico completo (ángulos, piezas, divisiones, etc.) y en Tecnología se construya el puzzle, preferentemente en madera o algún material rígido que permita su manipulación posterior sin deformarse por su uso.

En aquellas cuadraturas más simples, puede trabajarse también con regla y compás para encontrar las divisiones, con lo que el aspecto interdisciplinar se ampliaría a la asignatura de Educación Plástica y Visual.

Igual que en otros puzzles que se utilizan en la clase de Matemáticas, es posible tratar conceptos geométricos. Por ejemplo, manipulamos dos piezas (polígono original y cuadrado) que tienen la misma área, pero que en general tienen distinto perímetro. El problema es que al calcular los perímetros suelen aparecer medidas irracionales.

También es interesante el estudio de los ángulos que aparecen en las divisiones del polígono inicial. Si necesitamos reconstruir un cuadrado, en las divisiones deben aparecer cuatro ángulos rectos, bien directamente o por composición.

Como puede apreciarse por lo anterior, con este tipo de material puede abarcarse todos los niveles que se den en la clase, desde el de los alumnos que se quedan en intentar componer la figura, hasta el de los que trabajan con números irracionales para estudiar el perímetro.

Plantillas para bajar:

Bibliografía

BOLT, B, (1989): *Divertimentos matemáticos*. Editorial Labor. Barcelona.
BOLT, B, (1989): *Aún más actividades matemáticas*. Editorial Labor. Barcelona.
DUDENEY, H. E. (1995): *Los gatos del hechicero y nuevas diversiones matemáticas*. Zugarto ediciones. Madrid.
FREDERICKSON, Greg (1997): *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-57197-9
HANS, J. A.; MUÑOZ, J.; FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. ; BLANCO, J y ALDANA, J. (2003): "Rompecabezas del Teorema de Pitágoras", Suma, nº 43, junio, Zaragoza, pp. 119-122.

Autor: grupo Alquerque. Sevilla
