

LAS TERNAS PITAGÓRICAS

Adriana Rabino

Fuente: Pickover, Clifford. 2009. Ed. Librero

www.mathsmovies.com/oz.htm

www.disfrutalasmaticas.com

En la película *El mago de Oz* (1939), Dorothy (la protagonista) anhela viajar más allá del arco iris, y su deseo se hace realidad cuando un tornado se la lleva, junto a su perrito. Dorothy, tras la sugerencia de la bruja buena (y tras haber ofendido a la bruja mala) se dirige por el camino amarillo a la Ciudad Esmeralda donde vive el todopoderoso Mago de Oz, quien la puede transportar otra vez a su hogar. Por el camino se hace amiga del Espantapájaros, El Hombre de Hojalata y el León Cobarde. El Espantapájaros ansía un cerebro, el Hombre de Hojalata un corazón y el León el coraje



que le falta. Como piensan que el Mago de Oz puede ayudar a todos, deciden ir juntos a la Ciudad Esmeralda.

Cuando llegan, el Mago de Oz le da al Espantapájaros un diploma en reconocimiento de que tiene un cerebro:

-En mi tierra natal existen universidades, hogares de saber donde los hombres van a convertirse en eruditos. Al salir de allí piensan en cosas grandes, profundas, y su cerebro se iguala al tuyo-le dice el mago al espantapájaros- pero...ellos tienen algo de lo que tu careces, un diploma. Así pues, en virtud de la autoridad que me ha conferido la Universitatus Comitatus e Plurivus Unu, con este diploma te otorgo el título de Honoris Causa.

-¿Doctor en qué?

-Quiere decir...doctor en eruditología.

La suma de la raíz cuadrada de cada uno de los dos lados de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del otro lado...Oh! Victoria, al fin...¡tengo cerebro!

Por supuesto que este no es el enunciado del Teorema de Pitágoras.

¿Podrías ayudar al espantapájaros a enunciar bien el teorema?

TERNAS PITAGÓRICAS

Llamamos triángulos pitagóricos a los triángulos rectángulos cuyos lados tienen una longitud expresable mediante números enteros. Esas ternas de números se denominan ternas pitagóricas.

Por ejemplo, la terna (3,4,5) es una terna pitagórica (para asegurarse de que son longitudes correspondientes a un triángulo rectángulo comprobarlo a través del Teorema de Pitágoras). Esta terna tiene la propiedad de que está compuesta por números enteros consecutivos, y además el perímetro de este triángulo rectángulo mide la mitad de su área.

Verificarlo.

¿Habrá otras ternas pitagóricas formada por números enteros consecutivos? Buscar! (Es la única terna pitagórica de números consecutivos. Existen otras que tienen dos números consecutivos como 20,21 y 29, pero no los tres números).

En una tablilla babilónica se encontró un método para hallar ternas pitagóricas (Boyer y Merzbach, 1989, p.65). Allí se expresa que si un número c es **impar**, una terna pitagórica será de la forma: $(c^2-1)/2$; c ; $(c^2+1)/2$.

Arma una tabla con estas tres columnas para buscar ternas pitagóricas. Verifica que cumplen la propiedad pitagórica.

¿Se acabarán en algún momento las ternas pitagóricas?

No, se pueden seguir generando ternas pitagóricas hasta infinito. Éste es un método: Partiendo de la terna (3,4,5), si multiplicamos a cada uno de sus elementos por un número entero cualquiera mayor que uno, se obtienen infinitas ternas pitagóricas. Encontrar algunas con este método y verificarlas.

Se puede expresar esto en forma general como (3n, 4n, 5n) y es fácil de demostrar:

$$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$$

Esto es cierto porque $9n^2 + 16n^2 = 25n^2$

Euclides (los Elementos, 300 a C.) demostró de otra manera que el conjunto de ternas pitagóricas es infinito.

La prueba se basa en que la diferencia de dos cuadrados de números consecutivos es siempre un número impar.

Por ejemplo, $2^2 - 1^2 = 4-1 = 3$, $15^2 - 14^2 = 225-196 = 29$.

Y además todos los números impares se pueden escribir como una diferencia de dos cuadrados de números consecutivos. En esta tabla se ve:

n	n²	Diferencia
1	1	
2	4	4-1 = 3
3	9	9-4 = 5
4	16	16-9 = 7

5	25	25-16 = 9
...

Y hay infinitos números impares.

Como hay infinitos números impares, y algunos de ellos son cuadrados perfectos, hay un número infinito de cuadrados impares. Por tanto, hay infinitas ternas pitagóricas.

Propiedades

Se puede ver que una terna pitagórica tiene:

- tres números pares, o
- dos impares y uno par.

Una terna pitagórica no puede tener todo números impares ni dos pares y uno impar.

Esto es porque:

- (i) El cuadrado de un impar es impar y el cuadrado de un par es par.
- (ii) La suma de dos pares es par y la suma de impar y par es impar.

Por tanto, si uno de entre a y b es impar y el otro par, c tiene que ser impar. Y si a, b son impares, ¡c es par!

Lista de las primeras ternas pitagóricas

Aquí se tiene una lista de todas las ternas pitagóricas donde a, b y c son menores que 1,000.

La lista sólo contiene ternas (a,b,c) que no son múltiplos de otras ternas (ternas pitagóricas primitivas). Los múltiplos de (a,b,c) (que son (na,nb,nc)) no aparecen en la lista. Por ejemplo, ya sabemos que (3,4,5) es una terna pitagórica y (6,8,10) también. Pero (6,8,10) se obtiene como (3,4,5) por 2. Así que sólo ponemos (3,4,5).

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)
(23,264,265)	(24,143,145)	(25,312,313)	(27,364,365)	(28,45,53)
(28,195,197)	(29,420,421)	(31,480,481)	(32,255,257)	(33,56,65)
(33,544,545)	(35,612,613)	(36,77,85)	(36,323,325)	(37,684,685)
(39,80,89)	(39,760,761)	(40,399,401)	(41,840,841)	(43,924,925)
(44,117,125)	(44,483,485)	(48,55,73)	(48,575,577)	(51,140,149)
(52,165,173)	(52,675,677)	(56,783,785)	(57,176,185)	(60,91,109)
(60,221,229)	(60,899,901)	(65,72,97)	(68,285,293)	(69,260,269)
(75,308,317)	(76,357,365)	(84,187,205)	(84,437,445)	(85,132,157)
(87,416,425)	(88,105,137)	(92,525,533)	(93,476,485)	(95,168,193)
(96,247,265)	(100,621,629)	(104,153,185)	(105,208,233)	(105,608,617)
(108,725,733)	(111,680,689)	(115,252,277)	(116,837,845)	(119,120,169)
(120,209,241)	(120,391,409)	(123,836,845)	(124,957,965)	(129,920,929)
(132,475,493)	(133,156,205)	(135,352,377)	(136,273,305)	(140,171,221)
(145,408,433)	(152,345,377)	(155,468,493)	(156,667,685)	(160,231,281)
(161,240,289)	(165,532,557)	(168,425,457)	(168,775,793)	(175,288,337)

(180,299,349)	(184,513,545)	(185,672,697)	(189,340,389)	(195,748,773)
(200,609,641)	(203,396,445)	(204,253,325)	(205,828,853)	(207,224,305)
(215,912,937)	(216,713,745)	(217,456,505)	(220,459,509)	(225,272,353)
(228,325,397)	(231,520,569)	(232,825,857)	(240,551,601)	(248,945,977)
(252,275,373)	(259,660,709)	(260,651,701)	(261,380,461)	(273,736,785)
(276,493,565)	(279,440,521)	(280,351,449)	(280,759,809)	(287,816,865)
(297,304,425)	(300,589,661)	(301,900,949)	(308,435,533)	(315,572,653)
(319,360,481)	(333,644,725)	(336,377,505)	(336,527,625)	(341,420,541)
(348,805,877)	(364,627,725)	(368,465,593)	(369,800,881)	(372,925,997)
(385,552,673)	(387,884,965)	(396,403,565)	(400,561,689)	(407,624,745)
(420,851,949)	(429,460,629)	(429,700,821)	(432,665,793)	(451,780,901)
(455,528,697)	(464,777,905)	(468,595,757)	(473,864,985)	(481,600,769)
(504,703,865)	(533,756,925)	(540,629,829)	(555,572,797)	(580,741,941)
(615,728,953)	(616,663,905)	(696,697,985)		