USOS DE LOS LOGARITMOS

Oscar Bressan

GPDM

Los alumnos de secundaria deberán conocer que existen tres operaciones relacionadas con la potencia (la potenciación, la radicación y los logaritmos). Deberán conocer además, que la función logarítmica es importante para graficar procesos asociados con funciones exponenciales, lo que permite una visualización más sencilla y comprensible de los resultados de las mismas, teniendo importantes aplicaciones en las ciencias naturales y en la economía. En particular, los logaritmos estan asociados con una actividad tan fundamental como la comunicación entre seres humanos ya que tanto el oído como la vista tienen respuesta logarítmica a la intensidad del sonido y de la luz respectivamente. El oído, por su parte, tiene también una respuesta logarítmica con respecto a las frecuencias del sonido. (El ojo, en cambio, no tiene una respuesta logarítmica en relación a la frecuencia de la luz).

Desarrollo

A) Sensaciones y logaritmos.

El psicólogo alemán E. H: Weber (1795-1878) se interesó en el estudio de los sentidos, especialmente del tacto y la percepción de pesos con la mano llegando a notar que el ser humano es sensible a una variación de la sensación proporcional a la sensación misma. Por ejemplo, una persona puede detectar sopesándolo con su mano una variación de 1 g en un objeto que pesa 20 g, pero si el objeto es tres veces más pesado (60 g), entonces sólo puede detectar variaciones de 3 g en vez de 1 g:

De este modo el cociente entre la variación de la sensación (Δ s) al valor de la sensación (s) es prácticamente constante (relación de Weber):

$$1 / 20 = 3 / 60 = \Delta s / s \cong \text{constante}$$

Esta relación se encuentra para el tacto, el olfato, el gusto, el oído y la vista dentro de un amplio rango.

¿A que relación matemática entre estímulos corresponde esta formulación?

Cuando percibimos estímulos que aumentan paso a paso (serie de objetos cada vez más pesados, mayor intensidad de luz o mayor intensidad o frecuencia del sonido), realmente estamos frente a una serie geométrica de los pesos, intensidad de la luz o intensidad o frecuencia del sonido. Es decir, cada paso sucesivo corresponde a un estímulo igual a un factor constante que multiplica a la sensación anterior.

Problema 1) Nuestra percepción de los tonos musicales admite la relación de Weber. Por ejemplo, la nota *la* tiene una frecuencia de 440 Hz (1Hz = 1 ciclo por segundo) dicha nota una octava mayor tendrá una frecuencia de 880 Hz y en una octava menor de 220 Hz. Un piano sólo emite frecuencias superiores a 33 Hz. Si hay 8 notas *la* en un piano, ¿cuál es la frecuencia de cada *la* en el piano?

En otras palabras, el hallazgo de Weber equivale a decir que cuando nosotros percibimos una sensación aumentando aparentemente a pasos iguales (es decir, formando una progresión aritmética, a, a + r, a + 2r,…), las medidas generalmente demuestran que los incrementos del estímulo forman una progresión geométrica: a, ar, ar^2, ar^3…. Si en dicha sucesión le aplicamos logaritmos a cada término tendremos: log a, log a + log r, log a + 2 log r, log a + 3 log r,…lo cual resulta ser una progresión aritmética de los logaritmos.

¿En qué sentido resulta más ventajoso expresar las respuestas humanas a las sensaciones de esta manera?

Los alumnos discutirán las ventajas y desventajas de la escritura exponencial y la logarítmica y notarán que se ha establecido una relación de proporcionalidad directa entre la sensación y el logaritmo de la misma, permitiendo así la utilización de la escala logarítmica para medir la magnitud de lo percibido.

B) Sensibilidad del oído en cuanto a la intensidad del sonido

El oído humano tiene un amplio espectro en cuanto a la intensidad de un sonido que percibe, desde el sonido más fuerte, que le llega a producir dolor, y eventualmente daño, hasta el más leve susurro.

Con aparatos especiales puede medirse la intensidad de un sonido, que es la cantidad de potencia sonora por centímetro cuadrado que produce una fuente de sonido. Esta intensidad se mide usualmente en vatios por centímetro cuadrado (W/cm^2). Por ejemplo:

Sonido	Intensidad
Motor de un avión a chorro (al lado)	10^{-3} W/cm^2 (produce dolor-eventualmente daño)
Concierto de rock (en el altoparlante)	10^{-4} W/cm^2
Fortísimo de una orquesta sinfónica	10^{-5} W/cm^2
Ruido del subterráneo en marcha	10^{-6} W/cm^2
Ruido promedio de tráfico urbano	10^{-9} W/cm^2
Conversación en voz alta	10^{-10} W/cm^2
Conversación en voz baja	10^{-14} W/cm^2
Levísimo rumor de hojas	10^{-15} W/cm^2
Umbral de absoluto silencio	10^{-16} W/cm^2

1) ¿Cuál es la razón entre los sonidos de mayor y de menor intensidad?

2) ¿Qué indica ese cociente?

3) ¿Cómo resulta la escala de las intensidades? En función de lo dicho anteriormente ¿cómo sería más sencilla su representación?

4) En la vida cotidiana se escucha hablar de decibelios. Los decibelios son 10 veces el logaritmo decimal del cociente entre la intensidad del sonido que queremos medir dividido la intensidad del sonido umbral de absoluto silencio O sea:

$$\mathbf{dB = 10 \log I / I_0}$$

a) Calculen la intensidad en decibelios para un fortísimo de una orquesta sinfónica.

b) Hagan lo mismo para el resto de la tabla de intensidades de sonidos dada arriba completando la misma para cada caso. ¿Qué ventajas le encuentran a esta notación con respecto a la anterior?

El docente hará observar a los alumnos que entre la mayor intensidad (10^{-3} W/cm^2) y la menor intensidad (10^{-16} W/cm^2) hay un factor realmente extraordinario de $10.000.000.000.000 = 10^{13}$, lo cual indica la extremada delicadeza de nuestro oído. (El ojo tiene un rango parecido en cuanto a su sensibilidad a la intensidad de la luz).

La escala lineal resulta incómoda y tediosa para representar y calcular intensidades del sonido. Por ello se conviene en usar la escala de los decibelios (dB) lo cual permite trabajar con un rango de valores entre 0 y 120 mucho más sencillo y representable.

5) Demostrar que si dos sonidos de intensidad I_1 e I_2 tienen niveles en decibeles B1 y B2, entonces B1 - B2 = 10 log I / I_0. ¿Qué significa concretamente esta relación?

6) Si un sonido tiene una intensidad 500 veces mayor que otro ¿cuál es la diferencia en decibeles de estos sonidos?

7) Un equipo de música dice que el ruido (o sea sonido indeseable producido por la electrónica del equipo) es menor que 90 dB con respecto al volumen que uno escucha la música. Si se está escuchando música con una intensidad de 10^{-8} W/cm^2, ¿cuánto sería la intensidad del ruido? ¿Cuántas veces menor sería la intensidad del ruido que la de la música?

8) El mismo equipo de música del problema anterior es estereofónico y dice que en cada canal de sonido (parlante izquierdo y derecho) el sonido está separado, por lo menos, en 40 dB. Esto quiere decir que el canal izquierdo se recibe la música del canal derecho, pero atenuado en 40 decibelios, y en el canal derecho se recibe la música del canal izquierdo pero atenuado también en 40 decibelios. Si ambos altoparlantes están transmitiendo con una intensidad de 10^{-9} W/cm^2, ¿cuánto es la intensidad espúrea que reciben por la mezcla de los canales?

c) Otros usos del logaritmo: Comparación de exponenciales

Se sabe que hay microorgansimos, tales como bacterias o levaduras, que presentan un crecimiento exponencial de su población mientras tengan a su disposición suficiente cantidad de nutrientes en el medio donde se encuentran. Dentro de ese límite de crecimiento exponencial se han estudiado la población de tres microorganismos y se encontró que su crecimiento variaba en el tiempo conforme las siguientes exponenciales:

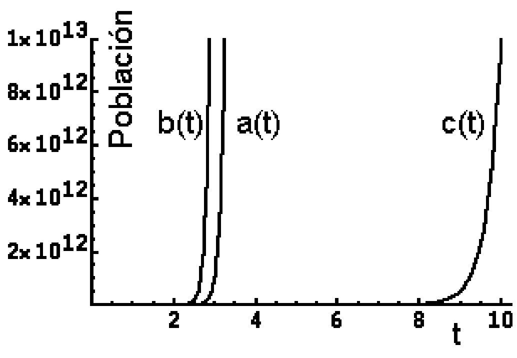
Población microorganismo "a": $a(t) = 10^\wedge(4\ t) = 10^{4\,t}$

Población microorganismo "b" $b(t) = 2^\wedge(15\ t) = 2^{15\,t}$

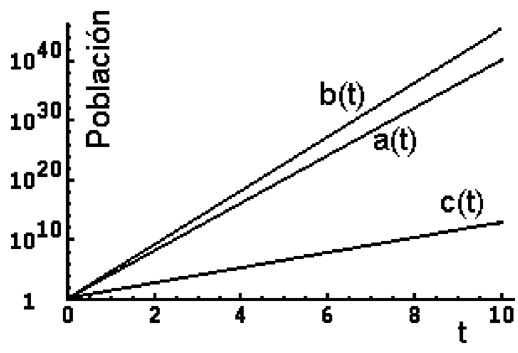
Población microorganismo "c" $c(t) = 20^\wedge t = 20^t$

a) ¿Cuál es la población que crece más rápidamente?

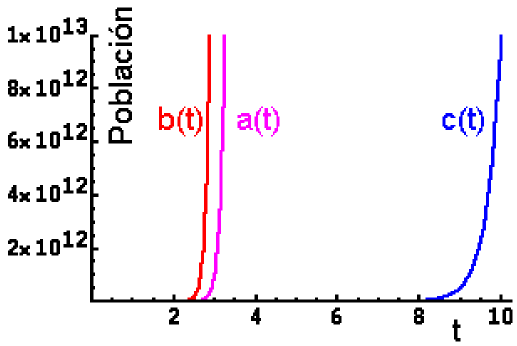
Se pedirá conjeturas de los alumnos y su justificación. Luego promoverá diversas soluciones de parte de los mismos para probarlas. Una forma sería graficar esas funciones utilizando una escala lineal y otra logarítmica. Para discutir con los alumnos:¿Qué ventajas conlleva la escala logarítmica sobre la lineal?



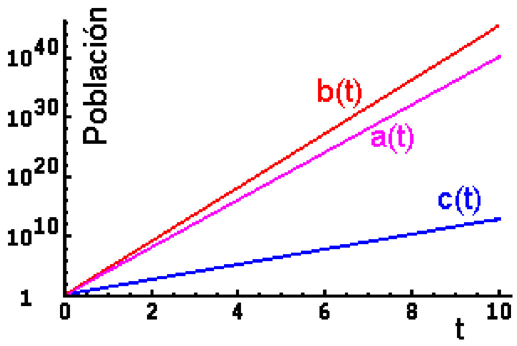
a(t), b(t) y c(t) en escala lineal



a(t), b(t) y c(t) en escala logarítmica



a(t), b(t) y c(t) en escala lineal



a(t), b(t) y c(t) en escala logarítmica

b) Otra forma de solución sería la analítica expresando todas las funciones en la misma base. En este caso los alumnos debería utilizar la fórmula:

$$a^c = b^{\log_b (a^c)}$$

para cualquier b > 1 y a > 0. (Se sugiere demostrar esta relación como problema)

Si no surgiera de los alumnos será el docente quien haga la propuesta y resuma los resultados a que arribarán los alumnos, por ejemplo, en un cuadro como el siguiente:

FUNCIÓN	LOGARITMO EN BASE 10	LOGARITMO EN BASE e
$a(t) = 10^{4*t}$	$4*t*\log_{10}(10) = 4*t$	$4*t*\ln(10) = 9{,}21034*t$
$b(t) = 2^{15*t}$	$15*t*\log_{10}(2) = 4{,}51545*t$	$15*t*\ln(2) = 10{,}3972*t$
$c(t) = 20^{t}$	$t*\log_{10}(20) = 1.30103*t$	$t*\ln(20) = 2{,}99573*t$

Los alumnos entonces, podrán expresar las exponenciales en una misma base obteniendo:

$$a(t) = 10^{4*t} = 10^{4*t} = e^{9{,}21034*t}$$

$$b(t) = 2^{15*t} = 10^{4{,}51545*t} = e^{10{,}3972*t}$$

$$c(t) = 20^{t} = 10^{1.30103*t} = e^{2{,}99573*t}$$

de lo cual la comparación resulta trivial: b(t) es la función que crece más rápidamente porque tiene el mayor exponente para igual base, mientras que c(t) es la que crece más lentamente.

Si el crecimiento de las poblaciones de otros microorganismos fuera 3^{24*t} , 7^{18*t} y 11^{12*t} : ¿Cuál población crece más rápidamente?

En base a un razonamiento similar los alumnos llegarán a que: $7^{18*x} > 11^{12*x} > 3^{24*x}$;