LAS MAMUSCHKAS, ¿SON PROPORCIONALES?

AUTORAS: PATRICIA CUELLO – ADRIANA RABINO
Contenido: Proporcionalidad geométrica. Semejanza y homotecia

La palabra mamuschka (mamá) deriva de la palabra rusa matrioska (madre). La ***matrioska*** *o* ***muñeca rusa*** *es un conjunto de muñecas tradicionales rusas (de distinto tamaño) creadas en 1890, cuya originalidad consiste en que son huecas por dentro, de tal manera que la mayor alberga en su interior una muñeca de menor tamaño, y ésta a su vez a otra, y ésta a su vez otra, en un número variable que puede ir desde cinco hasta el número que se desee, aunque por la dificultad volumétrica, es raro que pasen de veinte. Se caracterizan por ser multicolores, o por la presencia de elementos decorativos en la pintura tales como jarrones o recipientes sostenidos por las muñecas. La matrioska con más muñecas de la que se tiene conocimiento posee 75 unidades.*

Hoy, en Rusia las matrioskas son uno de los principales souvenirs solicitados por los turistas. Como consecuencia de ello han aumentado su variedad, traspasando sus límites tradicionales. Se pueden encontrar matrioskas representando familias con mascotas incluidas; en algunos casos, la matrioska mayor representa al presidente Putin, y luego a sus predecesores en el poder. Las matrioskas no son una artesanía tradicional de Rusia; la primera data de 1890 y se menciona que fueron inspiradas en muñecas similares traídas desde Japón. Sin embargo, el concepto de guardar objetos dentro de otros iguales ya existía en Rusia, siendo aplicado a manzanas talladas en madera y a huevos de pascua; el primer huevo Fabergé, creado en 1885, tenía incluido en el interior una yema hecha de oro y en el interior de ésta una gallina y una corona. Las matrioskas generalmente están hechas de madera, siendo la madera de tilo la más usada debido a su ligereza y fina textura. (Extraído de Wikipedia).

En relación con esto, en San Carlos de Bariloche (ciudad típica por la fabricación de chocolates caseros), hay una fábrica de chocolates (muy ricos!!!!) que se llama Mamuschka. Ahí se venden muchas exquisiteces y además todo tipo de souvernirs con las famosas muñequitas.

A la derecha figura el logo de este comercio que aparece en las bolsas y en los papeles de envoltorio.
Se nos ocurrió preguntarnos: ¿Serán semejantes estas muñequitas? ¿Cómo podremos saberlo? (Detalle: cada una de las muñequitas tiene en sus manos una flor

típica de la zona: lupines, amancay, narcisos, ...).

Esta es una foto de otra serie de 9 mamuschkas que se venden en el negocio.
¿Son como las de la foto del logo?
¿Resultan semejantes?

ALGUNAS POSIBLES RESPUESTAS

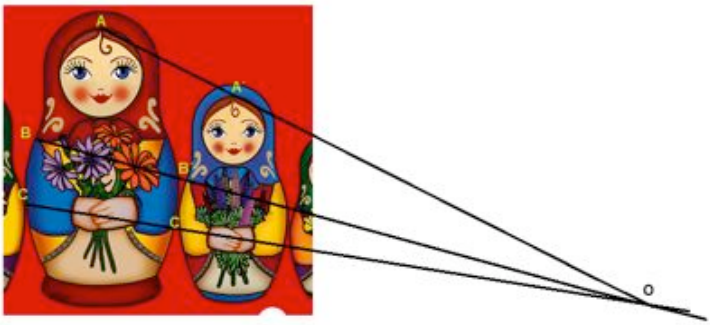
Las muñequitas del logo (sin tener en cuenta la base de la muñeca central que es así porque debe sostener más peso) son semejantes, esto quiere decir que sus dimensiones son proporcionales, o sea que mantienen la forma pero no necesariamente el tamaño (atención que nos centramos específicamente en la forma, sin tener en cuenta los detalles de la pintura).
Probablemente se utilizó la misma forma y se agrandó o se achicó para lograr las distintas imágenes.

Cuando las figuras son poligonales es fácil verificar si son semejantes. Basta comprobar si los ángulos respectivos son congruentes y comparar los lados correspondientes viendo si existe un único factor que transforma cada uno de los mismos en su homólogo (por ejemplo, si un lado es el doble de su correspondiente, todos los pares de lados homólogos se deben corresponder por una transformación de factor 2).

Pero, ¿cómo comprobamos si son o no semejantes cuando las figuras son curvas o tienen partes curvas?
Para comprobar en este caso (y por supuesto en el anterior también) si las figuras son semejantes se puede utilizar un procedimiento (que es también una transformación, aunque no rígida[1]) que se denomina *homotecia.* Para que se entienda mejor el procedimiento en principio se pueden tomar dos muñequitas. Lo que se hace es unir puntos relevantes o distintivos de una figura con su correspondiente en la otra figura mediante segmentos. Las rectas que contienen a estos segmentos deben cruzarse todas en un mismo punto (denominado *centro de homotecia*) y, comparando las distancias al centro desde cada punto (por ejemplo, A, B o C) y sus correspondientes (A´, B´ o C´) deben resultar proporcionales, es decir, que el cociente entre cada par de

[1] Las transformaciones rígidas conservan las longitudes y los ángulos y dan por resultado figuras congruentes. Ellas son: las traslaciones, las rotaciones y las simetrías. La homotecia, aunque sí conserva los ángulos, no conserva las longitudes, dando por resultado segmentos paralelos y proporcionales, obteniéndose así figuras semejantes.

longitudes debe ser el mismo. Este número se denomina *razón de homotecia o factor de semejanza.* Por ejemplo, en la figura los segmentos graficados cumplen que:



AO/A´O = BO/B´O = CO/C´O = k (llamada razón de homotecia o constante de proporcionalidad).
Por lo tanto resulta que AO = k . A´O ; BO = k . B´O ; CO = k. C´O

En el caso de que haya más de dos figuras se puede hacer un razonamiento análogo, teniendo en cuenta que las figuras estén alineadas. En este caso se pueden hacer distintas proporciones continuas, por ejemplo:

AO/A´O = BO/B´O = CO/C´O ó
A´O/A´´´O = B´O/B´´´O = C´O/C´´´O ó
A´´´O/A´O = B´´´O/B´O = C´´´O/C´O ...

Pero ¿cuántos puntos deberemos tomar para verificar que dos figuras curvas resultan semejantes?
Como dijimos, se trata de tomar puntos relevantes, para una constatación global, pero lo correcto sería tomar los infinitos puntos del contorno para poder afirmar una semejanza estricta. Inversamente, si encontramos un par de puntos correspondientes que **no** cumplan con esta condición, esto alcanza para decir que **no** son semejantes.

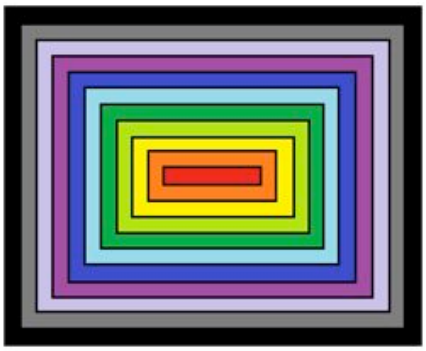
Atención: Si pensamos que al replicarse en la situación de la foto de las 9 muñequitas que caben una dentro de la otra hasta quedar en apariencia una sola muñeca (la más grande) , la diferencia entre una y otra es una capa de

ancho constante, veremos que entonces no resultan semejantes ¿Por qué pasa esto?

Para ver mejor la diferencia de las formas podemos tomar algunas no consecutivas:

O, como caso extremo, la primera con la penúltima o la última:

Para poder entender y explicar mejor el por qué de esta “deformación”, podemos modelizar la situación con un rectángulo. Si a un rectángulo cualquiera (no cuadrado, para que se vea el efecto) le agregamos tiras a su alrededor del mismo ancho, ese rectángulo va a tender a la forma de un cuadrado.



Obsérvese el último rectángulo con el primero para ver mejor la diferencia:

La explicación es sencilla:
La relación entre el largo y el ancho del rectángulo rojo es de 6 a 1 (el largo entra 6 veces en el ancho).
Si le vamos agregando un valor constante a ambos lados, esta relación no se va a mantener, porque no estamos agregando una cantidad proporcional a cada lado. Supongamos que agregamos una unidad a ambos lados (como se hizo con las tiras de colores).
Sus lados van a ir valiendo:
(6+1) a (1+1) = 7 a 2 (el largo entra 3,5 veces en el ancho)
(7+1) a (2+1) = 8 a 3 (el largo entra 2,66…veces en el ancho)

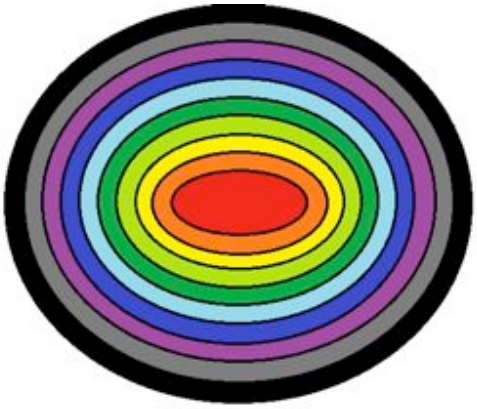
……
(26+1) a (21+1) = 27 a 22 (el largo entra 1,22… veces en el ancho).

Si seguimos agregando tiras, esta relación se va a acercar cada vez más a 1. Cuando esto suceda, estaremos en presencia de un cuadrado.

Inversamente, si hacemos rectángulos internos, de lados paralelos a un rectángulo dado, manteniendo una diferencia de igual ancho (es el caso de las mamuschkas si lo pensamos en el espacio), estos se van haciendo cada vez más “alargados”, y las muñequitas también, y las curvas se van perdiendo cada vez más.

Pensadas de este modo las muñecas no resultarían semejantes.

También se puede apreciar esto al agregar tiras del mismo ancho a una elipse. Ésta va a tender a transformarse en un círculo:



Para observar al respecto: En la vida cotidiana (y en el espacio) encontramos ejemplos de esto al enroscar la manguera del bombero o cuando hacemos un ovillo de lana. (Ver la forma que tienen al inicio y cómo terminan prácticamente en un círculo o una esfera respectivamente).

Curiosidad: Juego de 37 muñecas expuesto en una tienda en Londres, Inglaterra ¿Serán todas semejantes? ¿Qué harías para comprobarlo?