

Gobernador

Dr. Pablo Verani

**Presidente Cons. Provincial
de Educación**

Raúl Osvaldo Otero

Vocales

Elsa Ramirez de Lobo

Silvia Pappatico

Artemio Godoy

Directora General de Educación

Ana K. de Mazzaro

Directora de Nivel Primario

Silvia A. Guidi de Alvarez

EQUIPO DE TRABAJO

Secretaría Técnica de

Gestión Curricular

Coordinación General

Nora Violeta Arbanás

Coordinación Técnica

Alicia Lucino de Bertoni

Colaboración

Sergio Galván

Juan Neyra

Claudia Gelabert

Tipeado

Alejandro Méndez

José Quintana

Diseño y Diagramación

Romero Biondi

Elaboraron este Documento
Ana María Porta de Bressan
Beatriz Costa de Bogisic

**Consejo Provincial
de Educación 1.996**

Índice

“LA ESTIMACION, UNA FORMA IMPORTANTE DE PENSAR EN MATEMATICA”

PRIMERA PARTE

Pag.

La estimación, una forma importante de pensar en matemática	3
1- ¿Qué es la estimación?	5
2- ¿Cuándo se usa?	5
3- ¿Por qué si puede ser aprendida fuera de la escuela se la debe incorporar al currículo escolar?	6
4- La estimación de cálculos y medidas.	6
4.I En relación con la estimación de cálculos numéricos.	6
4.I.1 La estimación por reformulación.	7
4.I.2 La estimación por traslación.	9
4.I.3 La estimación por compensación.	9
4.II En relación con la medida	10
5- ¿Qué dice el diseño curricular 1996?	11
6- Propósitos de la enseñanza escolar de la estimación.	12
7- Algunas consideraciones metodológicas.	12

SEGUNDA PARTE

Problemas y actividades para trabajar la estimación en el aula.	14
I - Ejemplos de problemas con enunciado verbal.	14
II - Ejemplos de fichas de actividades.	15
Bibliografía	25

La estimación, una forma importante de pensar en matemática

La estimación es un proceso mental donde converge la intuición y la lógica; puede cautivar a los alumnos tanto como la adivinación, pero está lejos de quedar librada al azar. La importancia que esta estrategia de pensamiento tiene para resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias, donde si bien es necesario razonamientos correctos en la generalidad de los casos son suficiente resultados aproximados, ha determinado su inclusión explícita en el capítulo de los CBC de matemática y en la adecuación de esa área del Currículo de Río Negro.

En el presente documento acercamos a los docentes fundamentación matemática y didáctica sobre la estimación pensada como contenido escolar posible de ser trabajado desde primer ciclo. El mismo consta de dos partes. En la primera consideramos aspectos teóricos que el docente debe conocer en relación con el concepto matemático de estimación y su enseñanza en la escuela. En la segunda, se presentan ejemplos de actividades que involucran el uso de esta estrategia y que pueden ser de ayuda al docente en su tarea en el aula.

PRIMERA PARTE

1

¿Qué es la estimación?

En lenguaje coloquial la palabra “estimación” posee diversos significados. En el Diccionario de la Real Academia Española (1992) se dice:

“Estimación: aprecio y valor que se da y en que se tasa o considera una cosa”.

“Estimar: apreciar, poner precio, evaluar las cosas, juzgar, creer. Hacer aprecio y estimación de una cosa”.

El Diccionario Enciclopédico Salvat (1967) coincide con las acepciones anteriores:

“Estimar: evaluar, apreciar, poner precio y tasa a las cosas. Juzgar. Hacer aprecio y estimación de una persona o cosa. Verificar el cálculo de la estima”.

El Diccionario de M. Moliner (1990) define:

“Estimación: juicio de valor de un objeto en función de circunstancias individuales del que lo emite”.

Estas definiciones transmiten la idea general de valoración o juicio de valor sin entrar a discutir si esa apreciación es de orden afectivo, moral, ético, estético o cuantitativo. En este documento nos ocuparemos de la estimación en matemática y por eso nos referiremos a aquellos casos en los que el juicio o valoración es cuantitativo y por lo tanto, el campo en que se aplica es el de los números y las cantidades. Definiremos entonces la estimación matemática como “el juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite”. (Castro, E. y otros, 1989).

2

¿Cuándo se usa?

La estimación siempre ha sido utilizada en los contextos más variados de la vida cotidiana. Pensemos simplemente en la necesidad de embaldosar un piso, saber cuántas ovejas hay en el campo, calcular el dinero para hacer una compra de comestibles, pensar en el monto del pago de impuestos mensuales o calcular la hora sin consultar el reloj. En estas situaciones raramente necesitamos resultados exactos.

“Creo que cinco latas serán suficientes”, “concurrieron cerca de cinco mil personas”, “posee alrededor de doscientas cabezas de ganado”, “la canasta familiar requiere casi \$ 2000.-”, “llegará entre las 4 y las 5”, “el largo de este alambre se aproxima a 18 metros”, son todas expresiones de uso común que encierran estimaciones.

Si se examina el comportamiento de las personas que realizan estas apreciaciones, se observa que llegan a resultados aproximados a través de procesos mentales. En general, no usan lápiz y papel, ni los algoritmos que se hacen en la escuela y tampoco los instrumentos de medición. Lo que hacen es usar números “fáciles”, cambiar el orden en que se presentan las operaciones, realizar comparaciones, etc., sirviéndose de indicios y conocimientos previos que le permiten allanar los cálculos.

Frente a una situación problemática de cuantificación de la vida diaria, la mayoría de las personas intentan dar una respuesta. La necesidad de que la misma sea exacta o aproximada depende de las circunstancias. Veamos un ejemplo:

Un conductor está a 420 km. de la ciudad de Viedma, hacia la cual se dirige en su auto. De repente le surge la duda “¿Me alcanzará la plata que tengo para la nafta?”. Cuenta y observa que dispone de \$ 35. ¿Qué hará para contestar su pregunta?. Posiblemente algo como lo siguiente:

- 1) Recordar que su auto consume 8.6 litros de nafta cada 100 km. y que la nafta cuesta alrededor de \$0.90 el litro. (*Apela a conocimientos previos*).
- 2) Convenir que si son cerca de 8 litros cada 100 km y él debe recorrer casi 400 km, debe calcular 8 litros cada 100 km por 400 km, es decir, $(8 / 100) \times 400$. (*Se centra en la cifra mayor en 8,6 y redondea por defecto el 420*)
- 3) Darse cuenta que modificar el cálculo puede ser una buena idea para simplificar las cuentas, por lo tanto hacer $(400 / 100) \times 8$ obteniendo el valor 32. (*Cambia el orden de las operaciones*)
- 4) Multiplicar 32 por el costo de un litro de nafta, que es de casi \$ 1. (*Redondea por exceso el 0.90*)
- 5) Concluir que la cantidad que necesita es estimativamente \$ 32 y que con el dinero que tiene le va a alcanzar. ¡Puede estar tranquilo al respecto!.

Pero...

al llegar a destino tiene que hacer la rendición de los gastos, entonces la situación exige una respuesta lo más exacta posible. Toma lápiz y papel o una calculadora y realiza el siguiente cálculo:

$$\frac{420 \text{ km.} \times 8,6 \text{ l} \times \$ 0,905}{100 \text{ km.}} \div 1 = \$ 32,6886 \sim \$ 32,70 \text{ (Redondea los centésimos por exceso).}$$

¡Qué bueno! Su estimación fue bastante razonable.

3

¿Por qué si puede ser aprendida fuera de la escuela se la debe incorporar al currículo escolar?

Existen varias y poderosas razones para que la estimación sea incorporada como contenido en la enseñanza de la matemática en la escuela. Algunas de ellas son:

- a) Si este procedimiento (1) no se enseña intencionalmente, por su naturaleza subjetiva y mental, el alumno perderá en sus conocimientos espontáneos y parciales, intentando aplicarlos **indiscriminadamente a cualquier tipo de situación**. La enseñanza escolar de la estimación, lejos de centrarse en lo algorítmico, se orientará a que los alumnos descubran **la potencialidad y flexibilidad de uso de esta estrategia en diversas situaciones que admitan vías de actuación diferentes**.
- b) Toda la ciencia contemporánea hace uso de esta estrategia de pensamiento y cálculo, pues si bien necesita de razonamientos correctos y lenguaje preciso, no puede sino trabajar con resultados aproximados, probables y globales en tanto en la casi totalidad de los casos se mueve con variables

reales, sólo expresables aproximadamente La enseñanza de la matemática en la escuela ha de incorporar entonces este enfoque, superando la concepción de “ciencia exacta” (asimilada a “cálculo exacto”) que restringe la visión de los alumnos acerca de la real potencia de esta disciplina.

c) La estimación, como proceso mental de alto nivel, contribuye a una mejora general de la forma de pensar de los alumnos, en tanto alienta el empleo y la creación de estrategias (2) personales en la resolución de problemas. La estimación es más que una técnica, es una estrategia que incorpora aspectos heurísticos (3) y algorítmicos (4) . El alumno frente a una situación problemática debe **decidir** si la estimación es pertinente o no, y en caso de ser así, tratar de **conjeturar** el resultado **preparando** los datos para su manipulación matemática y **relacionándolos** con los referentes previos que posee, **efectuar** la estimación mediante el proceso elegido y **evaluar** el resultado obtenido en función de los datos iniciales y de su significación en la situación problemática original.

d) La estimación tiene validez interdisciplinaria, no sólo por su abundante aplicabilidad a diversos ámbitos de la vida diaria y de las ciencias, sino porque también se basa en la misma estructura lógica en que se sustentan otras estrategias generales de uso en otras áreas curriculares. Por ejemplo, “la anticipación que supone la predicción de sucesos que se lleva a cabo a lo largo del proceso de comprensión de textos escritos y su posterior contrastación, así como también el procedimiento de emisión de hipótesis y corroboración desplegado durante el proceso de investigación científica y que abarca diferentes disciplinas escolares” (Barberà Gregori, 1996).

4

La estimación de cálculos y medidas

Por razones metodológicas conviene diferenciar dos tipos de estimación:

I) **de cálculos**. Aquí la estimación está referida a los resultados que pueden obtenerse en un cálculo en el que intervienen las operaciones aritméticas .

II) **de medidas**. En este caso, la estimación está referida a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien sobre la valoración que nos merece el resultado de una medición.

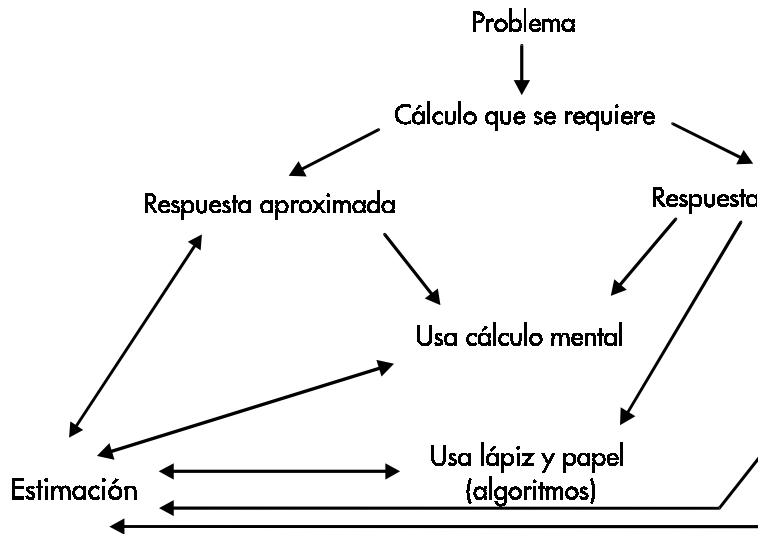
4.I) *En relación con la estimación de cálculos numéricos.*

Al referirnos a la estimación de cálculos consideramos adecuado hacer una referencia al lugar que esta estrategia ocupa dentro del cálculo aritmético en general.

El esquema siguiente(5)(extraído de los Standards for School Mathematics, 1989) muestra claramente el proceso a seguir en la toma de decisiones para resolver un problema que involucra cálculos aritméticos.

Del análisis de este cuadro se puede inferir que la estimación resulta ser una forma de cálculo privilegiada, no sólo en aquellas situaciones en que una respuesta aproximada es suficiente, sino también en aquellas que requieren del cálculo exacto, en tanto ayuda a anticipar sus resultados, orientar los cálculos y controlar la razonabilidad de las respuestas obtenidas.

Las investigaciones respecto del uso de la estimación catalogan tres tipos de procedimientos aritméticos empleados en la ejecución de la misma.



4.I.1) *La estimación por reformulación:*

En este caso el estimador se centra en los **datos numéricos** del cálculo a efectos de tornarlos mentalmente más manejables, sin que se alteren las operaciones en él implicadas. En esta estrategia se incluyen:

1a) El redondeo:

Para redondear un número aproximándolo a una determinada posición (última cifra significativa en razón del problema a resolver) se considera la cifra a la derecha de la misma, si es mayor o igual que 5, se suma uno a la cifra significativa considerada y todas las cifras siguientes se reemplazan por cero. Si la cifra a la derecha de la elegida es menor que 5, la última cifra significativa se deja igual (es decir, no se le suma nada) y todas las cifras siguientes a ella se reemplazan por ceros.

Por ejemplo:

* $\pi = (= 3,14159265359...$ puede redondearse a 3,1416 ó 3,14 según sea la precisión que se necesite en el cálculo.

* 35 se puede redondear a 40 considerando como cifras significativas las decenas.

* 1709 a 1710 ó a 1700 ó a 2000, según que las cifras elegidas para redondear sean las decenas, centenas o las unidades de mil respectivamente;

* 24,456 podrá pensarse como 24,46 ó 24,5 ó 24 según que la cifra a redondear sean los centésimos, décimos o unidades respectivamente.

* 4,444448, si se considera como última cifra significativa la de los millonésimos se obtendrá 4,44445, pero si la cifra significativa fuera la de las unidades, el valor redondeado será 4.

Este procedimiento es de uso generalizado en el manejo de datos cuantitativos con criterio científico, ya que permite mantener la mayor precisión en el manejo de la información.

1b) El truncamiento:

Consiste en reemplazar por ceros a todas las cifras que están a la derecha de una seleccionada, sin importar su valor, lo cual conlleva en general a un mayor error en los cálculos.

Ejemplos:

* el número 34,076 puede ser truncado a partir de las unidades obteniéndose 34 o bien, a partir de otro orden, por ejemplo de los centésimos obteniéndose 34,07.

* 24789 puede ser truncado en las centenas obteniéndose entonces 24700 o en las decenas de mil dando 20000.

Este procedimiento lo suelen realizar automáticamente muchas calculadoras cuando se les exige trabajar con mayor número de cifras de las que entran en la pantalla.

Un procedimiento ligado al de truncamiento es el que se conoce como el de la cifra **de mayor orden (o límite delantero)** el cual se basa en la consideración sólo de la cifra que más influye en el resultado. Ejemplos: 235 se asimila a 200, 59 a 50; 2,45 a 2, etc.

Cuando el truncamiento y el redondeo se realizan sobre la misma cifra significativa y las cifras siguientes son menores que 5, ambos procedimientos coinciden en sus resultados.

1c) La sustitución:

Cuando un dato resulta complicado para operar con él se lo reemplaza por un valor próximo. Respecto a esto se pueden considerar dos posibilidades:

- los datos se sustituyen por números próximos a los dados de modo que la operación entre ellos resulte más fácil. Por ejemplo, en la división $335/8$ se sustituye el dividendo quedando $320/8 = 40$. Siempre que sea posible la sustitución por potencias de 10 resulta muy conveniente su uso. Por ejemplo $0,98 \sim 1$; $10,02 \sim 10$; $995 \sim 1000$, etc.

- los datos se sustituyen por otras representaciones del número (fraccionaria, decimales, porcentual, aditiva, etc.) que se eligen equivalentes o aproximadas, según lo que resulte más sencillo al calcular.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3,14159265359 \sim 355/113 \sim 22/7 \\ 2,5\% &= 25/1000 = 5/200 = 1/40 \\ 30\% &= 0,3 \sim 1/3 \\ 11/15 + 35/84 &\sim 0,7 + 0,4 = 1,1 \\ 29\% \text{ de } 52 &\sim 0,3 \times 52 \\ 0,51 \times 36 &\sim 1/2 \times 36 = 18 \end{aligned}$$

4.1.2) *La estimación por traslación:*

Las relaciones que aparecen en un problema imponen un orden en los cálculos a realizar. Por conveniencia para realizarlo, se hace un cambio (correcto matemáticamente) en el **orden de las operaciones**. Si bien esto también provoca un cambio en la estructura del problema no afecta al resultado del mismo. Este procedimiento está generalmente combinado con otras estrategias de estimación.

Supongamos que de una situación se desprende el siguiente cálculo: $(1962 \times 49) / 6$. Por los datos y las operaciones que intervienen es conveniente cambiar el orden de las operaciones y redondear algunos números. Los pasos a seguir serían, primero resolver $49/6 \sim 8$ y luego $2000 \times 8 = 16000$. El cálculo exacto da 16023. Concluimos que al simplificar la situación se ha obtenido una buena estimación.

En otros casos es conveniente cambiar una operación por otra u otras. Por ejemplo:

* $18 + 13 + 16 + 12 \sim 15 \times 4 = 60$ (se tomó 15 como un valor medio aproximado)

* $[(18 - 3,1) - 2,9] \sim 18 - 3 - 3 = 18 - (3 \times 2) = 18 - 6 = 12$. $\approx 3,1$ y $2,9$ son valores próximos a 3. Ambos pueden reemplazarse por él y considerar que se lo está restando dos veces a 18)

4.I.3) *La estimación por compensación*

La misma tiende a disminuir el error producido cuando se han utilizado algunas de los procedimientos anteriores. Para ello el estimador se centra en **los datos numéricos y/o en el resultado del cálculo**, teniendo en cuenta el valor aproximado y el real de cada uno y realizando ajustes que buscan equilibrar los errores cometidos en la resolución. Por ejemplo, si se redondearon por exceso los datos numéricos de una suma, se redondea por defecto el resultado, o bien si se redondean algunos términos de la suma por exceso, se redondean los otros por defecto. En el caso de la resta si aproximamos ambos términos en un mismo sentido se obtendrá una compensación natural. En la multiplicación conviene redondear en sentidos contrarios ambos factores y así se obtendrá un resultado más cercano al exacto, etc. (Ver actividad 9 de este documento)

Considerando lo anterior se desprende que **para que un estimador de cálculo se considere experto, debe desarrollar un proceso mental basado en el conocimiento**

- del sentido y las propiedades de las operaciones que intervienen,
- de la clase y de la magnitud de los números involucrados,
- del sistema de numeración decimal y de las distintas formas de representación numéricas (entera, fraccionaria, decimal, porcentual, aditiva, multiplicativa, etc.).

4.II) *En relación con la medida*

La estimación de medidas también es un proceso mental que se basa en el conocimiento internalizado de referentes y unidades de medida convencionales.

La comparación es la operación básica de la estimación de medidas. Esta comparación se hace asociando la cantidad a estimar directamente con alguna unidad o referente (presente o no).

Cabe aclarar que para estimar se necesita tener internalizada la unidad de medida o el referente. Esto tornará la estimación operativa en tanto el sujeto será capaz de reconocer e identificar cantidades cuya medida sea aproximadamente la de cada una de estas unidades o referentes.

Los referentes son objetos usuales (tazas, baldosas, goteros, etc.) o partes de nuestro cuerpo (brazos,

palmas, pies, etc.) con los cuales es posible establecer una correspondencia con las unidades convencionales. En algunos casos es conveniente descomponer en partes la cantidad a estimar, de manera que cada una de las mismas pueda estimarse directamente y luego establecer relaciones entre ellas. Por ejemplo, si hay que estimar la longitud de un poste que está pintado en franjas de distintos colores es posible seguir el siguiente proceso: 1. Descomponer mentalmente la cantidad que hay que valorar basándonos en la percepción; 2. Realizar una valoración de cada una de las partes y establecer relaciones entre ellas; 3. Realizar la estimación total mediante la suma de las partes estimadas.

Algunas situaciones requieren la anticipación de resultados de medidas que están dadas por fórmulas (por ejemplo, de superficie o volumen) o por enunciados matemáticos (por ejemplo, el teorema de Pitágoras o el de Thales). En estos casos se está en presencia de la estimación indirecta de medidas, en la cual convergen procesos de estimación de cálculos y medida combinados.

5 ¿Qué dice la Adecuación Curricular 96?

La estimación aparece citada con frecuencia en el nuevo Diseño Curricular para la EGB de la Provincia de Río Negro. Tanto en los propósitos de ciclo como en las grillas de contenidos de los distintos ejes aparece esta estrategia aplicada a números, operaciones, medidas y probabilidades. En las caracterizaciones de dichos ejes se hacen observaciones detalladas sobre su uso, su valor y la necesidad de su aprendizaje. En el apartado correspondiente a los “Procedimientos generales del área matemática” esta estrategia está implicada en los siguientes procedimientos:

- “Elaborar estrategias personales de resolución de problemas”.
- “Relacionar la corrección de procedimientos y resultados en relación con la situación planteada”.
- “Discriminar los procedimientos más económicos para la obtención de un resultado correcto”.
- “Estimar el resultado de un problema o cálculo valorando el grado de error admisible”.
- “Explicar en forma oral o escrita los procedimientos seguidos por él (alumno) u otros en la resolución de situaciones y cálculos”.

También en el apartado “Actitudes a desarrollar con la enseñanza de la matemática” se formulan contenidos que el aprendizaje de la estimación contribuye a lograr. En ellos se habla del interés por generar estrategias personales, la disposición favorable para la contrastación de producciones, el sentido crítico sobre las estrategias usadas y los resultados obtenidos, la tolerancia al error, la estimación como hábito de trabajo, el interés por la precisión apropiada en la realización de mediciones, la valoración por el razonamiento intuitivo, lógico y la imaginación, y la curiosidad por manejar adecuada y críticamente instrumentos.

Propósitos de la enseñanza escolar de la estimación

La enseñanza intencional de la estimación en la escuela busca lograr que los alumnos sean capaces de:

- a) predecir situaciones probables;
- b) valorar la razonabilidad de los resultados;
- c) proponer respuestas aproximadas de manera rápida cuando son más convenientes que las exactas o éstas no se pueden emitir;
- d) desarrollar el pensamiento hipotético (conjeturar/ resolver/ valorar/ modificar);
- e) utilizar comprensivamente los conceptos relacionados con la numeración, las operaciones y la medida;
- f) tolerar el error encontrándole sentido;
- g) reformular problemas a formas mentalmente más manejables;
- h) aplicar distintas estrategias de estimación, sabiendo elegir la más conveniente a la situación planteada.

Del análisis de estos propósitos se infiere que las capacidades a desarrollar involucran tanto aspectos conceptuales como procedimentales y actitudinales.

Algunas consideraciones metodológicas

En el primer y segundo ciclo de EGB es importante que los alumnos adquieran la estrategia de estimación y la valoricen para la resolución de problemas y la toma de decisiones en situaciones de dentro y fuera de la matemática, y de dentro y fuera de la escuela. El conocer esta estrategia les permitirá anticipar y ponderar la razonabilidad de resultados de mediciones y cálculos, controlar su quehacer algorítmico y comprender la inexactitud de las mediciones comenzando a trabajar el concepto de error. En el tercer ciclo se profundizará y sistematizará este trabajo, ampliándose el concepto de error y cálculo aproximado en el campo de la estadística y las probabilidades.

No se ha de esperar a que los alumnos posean en forma acabada todos los conocimientos que un tratamiento acabado de este tema requiere para que comiencen a hacer estimaciones. Por un lado, al ir realizándolas el alumno irá aprendiendo en qué consiste esta estrategia y apreciando sus diversos modos y usos. Por otro lado, al ir necesitando las herramientas previas, se verá obligado a profundizar el sentido y las propiedades de los números, de las operaciones y de las medidas.

Desde un principio el alumno debe comprender que no es mejor un cálculo exacto que un cálculo aproximado, o una medida exacta que una aproximada, pues esto depende de la precisión que la situación demande.

Los procedimientos de estimación anteriormente analizados son de complejidad cognitiva diferente.

Esta complejidad también depende del tipo y del tamaño de los números y de las operaciones a los que se las aplique (en el caso de cálculo) y de las magnitudes (en el caso de la medida). No es lo mismo redondear datos de un cálculo, que calcular el error que este redondeo provoca y compensarlo. No presenta la misma dificultad el trabajo con naturales que con decimales o fraccionarios y es mucho más difícil estimar el volumen de un cuerpo que estimar la longitud de un segmento.

Desde el primer ciclo se podrá usar la estimación de números y cantidades trabajándose ambos aspectos en forma simultánea, lo que colaborará a una mejor comprensión de los alumnos sobre las propiedades de esta estrategia. Los distintos procedimientos de estimación para cardinalizar y comparar colecciones, cuantificar cantidades relativas a objetos y sucesos familiares, encuadrar resultados de operaciones, calcular el resultado de las mismas redondeando a la cifra de mayor orden, se pueden comenzar a trabajar desde primer grado junto con los de cálculo exacto.

Para estimar medidas, el alumno ha de realizar previamente experiencias variadas de medición con distintos tipos de unidades. Esto mejorará la percepción de las mismas y su proceso de iteración. Posteriormente estas actividades pueden combinar la presencia o ausencia del objeto a medir y de la unidad de medida. Esto colaborará a la internalización de las cantidades y unidades (pie, palmo, taza, litro, kilogramo, metro cuadrado, gramo, decímetro cúbico, etc.) que es lo que le permitirá comparaciones mentales razonables. Estas comparaciones desde un principio deberán comprobarse a efectos de ir rigORIZANDO el proceso de estimación.

A medida que se avance en los ciclos se irán profundizando estos procedimientos y se aplicarán a números racionales y reales y a las distintas operaciones sobre estos conjuntos numéricos.

Si bien la estimación es un proceso mental y por lo tanto individual, no se la puede pensar sino como una competencia que exige una regulación interna que el alumno construye progresivamente en la acción compartida con sus compañeros y el maestro. La descripción, justificación y discusión de lo hecho por él y por otros sobre situaciones de estimación colaborará a que el alumno internalice distintos procedimientos, reconozca los más eficaces, los use y exprese de manera correcta. Esto además, le dará pautas al docente para individualizar las ayudas pedagógicas necesarias para que sus alumnos logren este aprendizaje.

Es necesario tener en cuenta que la enseñanza de la estimación no debe acotarse a una unidad didáctica determinada, ni a su aplicación en algunos conjuntos numéricos como los decimales, sino que se la trabajará en contextos significativos variados donde el alumno le encuentre sentido a su uso y le permita considerar las consecuencias del procedimiento elegido. Formar el hábito de la estimación es una meta importante de la enseñanza de la matemática en la escuela.

SEGUNDA PARTE

Problemas y actividades para trabajar la estimación en el aula

A continuación presentamos a los docentes una colección de actividades que pueden servir de ejemplo para que la tarea del aula se torne ágil y productiva. Ellas no agotan en modo alguno las posibilidades de trabajo que el tema posee.

En algunas se hacen comentarios que creemos pueden servir para orientar a los docentes.

I

Ejemplos de problemas con enunciado verbal

- Una impresora ha hecho 121 copias. El gasto ocasionado por ello es de \$ 347. ¿Cuál es el precio aproximado al que resulta cada copia?
- La cocinera de la escuela se fija en la cantidad de chicos: 5° grado tiene 65 estudiantes, 6° tiene 53 y 7° tiene 55. Más o menos 7 de esos estudiantes no se quedan a comer. La cocina tiene suficiente comida para servir a 150 personas. ¿Tiene la cocina suficiente comida para hoy?
- El colectivo va hacia Valcheta no teniendo previstas paradas intermedias. Cuando era la hora 01:55 vimos un cartel que indicaba que faltaban 185 km. para llegar. ¿Vamos a llegar antes de las 06:00 a Valcheta?
- El almacén cobra \$ 3,65 por kg. de queso. Camila solo quiere gastar \$ 2 en queso ¿Podrá comprar aproximadamente 1 kg.?, aproximadamente $\frac{1}{2}$ kg.?, aproximadamente $\frac{1}{4}$ kg.?
- Teniendo en cuenta la superficie de Río Negro, estima la superficie de la Argentina.
- Natalio dice que él, con 36 pasos avanza 17 metros. ¿Será cierto esto?
- ¿Cuántos granos tiene una caja de arroz de 1 kg.?
- ¿Cuántos kg. de lana se sacan de una oveja?
- ¿Cuántas manzanas produce un árbol en una cosecha?
- En una carrera de postas el primer corredor hace 8,17 km., el segundo 2,64 km. y el tercero 3,72 km. Hacer un cálculo estimativo de la distancia recorrida por los tres corredores.

¿Cómo pueden proceder los alumnos para resolver estos problemas utilizando cálculo mental aproximado?

Reflexionemos por ejemplo, sobre las contestaciones que dieron alumnos de sexto grado en relación con el último problema.

Alberto dijo 13 km. , Gabriela contestó rápidamente 15 km. y Pedro 14 km.

Ileana preguntó “¿Cómo lo hicieron?. A mí me dio 14,53?”

Estas fueron las respuestas:

- Alberto: “ $8 + 2 + 3 = 13$ ”

- Gabriela: “ $8 + 3 + 4 = 15$ ”

- Pedro: “ $8,1 + 2,6 + 3,7 = 8 + 2 + 3 + 0,1 + 0,6 + 0,7 = 13 + 1,7 = 14,4 \sim 14,5$ ”

- Ileana: “yo usé la calculadora e hice $8,17 + 2,64 + 3,72 = 14,53$ ”

Al pedirle explicación acerca de los procedimientos usados contestaron:

Alberto: “Me fijé en las cifras de mayor orden”. Gabi: “Redondeé a unidades”. Pedro: “Trunqué los números en los décimos, los descompuse, después sumé y compensé por exceso el resultado porque al truncar, había disminuido el valor de cada sumando”. Ileana: “No estimé. Usé la calculadora y llegué al resultado exacto”.

El procedimiento de estimación por el cual se obtuvo el resultado más cercano al exacto fue el de Pedro.

Pero ¿qué hubiera pasado si las distancias de las postas hubieran sido 8,17 km.; 2,04 km. y 3,2 km y los chicos hubieran persistido en los mismos procedimientos?

Se hubiera obtenido más coincidencia en los resultados. ¿Por qué?

II

Ejemplos de fichas de actividades

Las siguientes actividades fueron elaboradas a partir de las propuestas del libro “Estimación en cálculo y medida” (Castro y otros, 1989) y del Documento 17 (Bressan y Bogisic, 1987). Han sido adecuadas en relación con el Diseño Curricular 96 de EGB de Río Negro y se proponen como ejemplos. Ellas serán un complemento de la resolución de problemas y ayudarán a profundizar los contenidos matemáticos involucrados. Las mismas podrán ser utilizadas como se presentan o modificadas de acuerdo a las necesidades pedagógicas de los docentes.

Nivel: Primer/año

Objetivo: Conseguir la valoración de una cantidad pequeña de objetos.

Primera:

Materiales: 14 pelotitas de igual tamaño y dos canastas iguales.

Desarrollo de la actividad: Proponer a los niños “adivinar” las pelotitas que hay en una de las canastas (nueve pelotitas).

Una vez que los niños hayan hecho sus conjeturas se le enseña la otra canasta igual con cinco pelotitas y se les dice:

- ¿Dónde hay más, en la primera canasta o en la segunda? ¿Hay muchas más o sólo algunas más? ¿Cómo cuántas más?

- En este cesto hay 5 pelotitas.

Se les vuelve a preguntar entonces, teniendo las dos canastas presentes.

- ¿Piensas que tu idea primera sobre el número de pelotitas de la primera canasta es correcta o has cambiado de opinión?

Terminar la actividad contando las pelotitas y evaluando cómo se ha aproximado.

Comentario: Esta actividad se puede repetir cambiando el recipiente y los elementos: por ejemplo, lápices dentro de un lapicero. Servirá para cursos posteriores aumentando el número de elementos.

Segunda:

Materiales necesarios: 39 elementos que pueden ser fichas de algún otro juego como monedas, garbanzos, clips, etc.

Desarrollo: formar filas, una con 17 elementos y otra con 22. Pedir que “adivinen” el número de elementos de una fila diciéndoles el número que tiene la otra.

Comentarios: Esta actividad se puede repetir y, en vez de hacer filas con los elementos, podemos hacer otras distribuciones geométricas, o bien presentarlas de manera desordenada.

Tanto la primera como la segunda actividad también se pueden realizar en el Nivel Inicial.

II.2

Nivel: Primer grado

Material: Una baraja española de 40 cartas.

Desarrollo de la actividad: Separar aproximadamente 10 cartas y pedir que digan el número que les parece hay en el montón restante diciéndoles que en el montón que tenemos aparte hay cerca de 10.

Se harán preguntas del siguiente tipo:

- ¿Dónde hay más? ¿Cuántas más? ¿Son el doble, o más del montón de aproximadamente 10 cartas?

Se intentará ayudar al niño a pensar y a hacer mejores estimaciones.

Posteriormente se contarán las cartas del montón de aproximadamente 30 y se validarán las respuestas dadas en las estimaciones.

Comentarios: Una actividad similar se puede realizar con dos frascos de vidrio iguales y bolitas. En otros grados se pueden desarrollar estas actividades con otros elementos (lentejas, arroz, etc.) y en mayor número.

II.3

Nivel: Primer Ciclo

Objetivo: Desarrollar estrategias de estimación en base a la cifra de mayor orden.

Hoja para el alumno					
1. En el número 325, la primera cifra, el 3, es la cifra de mayor orden (orden de las centenas).					
Completa el cuadro siguiente:					
	5762	685	14830	95	735268
Cifra de mayor orden					
¿Cuál es su orden?					
2. Cuando hacemos una suma, sumamos los dígitos del mismo orden. Los dígitos que más influyen en el tamaño del resultado ¿Cuáles son?					
3. Hacer una estimación inicial y rápida de las siguientes sumas considerando sólo las cifras que más influyen en el resultado:					
395 + 672 + 156 + 472					
3473 + 685					
346 + 6 + 78					
¿Tu estimación ha sido adecuada? Compara tus resultados con los de tus compañeros. Para corroborar las conclusiones pueden usar la calculadora o hacer las cuenta con lápiz y papel.					

Comentario: Ejercicios similares deben proponerse (en este ciclo y en el segundo) con otras operaciones aritméticas, en distintos intervalos numéricos y con otras clases de números. Todas estas actividades tienen que complementarse con la resolución y el planteo de situaciones problemáticas concretas que permiten el control de las estimaciones por el contexto en el que se plantean.

II.4

Nivel: Primer Ciclo

Objetivo: Desarrollar aspectos sobre razonabilidad de resultados.

Hoja para el alumno

Actividad 1

Rodea con un círculo la respuesta **más razonable**:

a) Una pelota nueva de fútbol cuesta

\$ 2 \$ 20 \$ 200 \$ 2000

b) El número de alumnos de tu clase es **alrededor de**

5 25 100 250

c) La familia de González tiene dos hijos. El sábado van al cine y cuatro entradas costarán **más o menos**

\$ 1,20 \$ 12 \$ 120 \$ 1200

d) Completa con una **cantidad razonable**

Nuestra escuela tiene más de _____ alumnos.

El promedio de personas por familia es _____ .

Más de _____ personas viven en Argentina.

Actividad 2

Estudia cada una de las operaciones que hay indicadas.

Sin hacer cálculos escribe cuántas cifras tiene cada uno de los resultados.

Operación	Nº de cifras del resultado
134 + 689	_____
134 + 989	_____
12 x 234	_____
52 x 39	_____
1764 - 783	_____
2345 : 4	_____

Comentario: En la actividad 1 la operación está inmersa en una situación problemática, podemos estudiar si la solución es razonable de acuerdo al contexto. Cuando se manipulan sólo números y operaciones (la cuenta está descontextualizada) pueden cometerse errores, que los alumnos sean capaces de detectarlos es a lo que contribuyen las propuestas como las de la actividad 2.

Esta propuesta puede desarrollarse en segundo ciclo utilizando números mayores o números fraccionarios o decimales.

II.5

Nivel: Segundo Ciclo

Objetivo: Habituarse en la estimación y división por redondeo de uno de los datos, con valoración del error del resultado.

Indicaciones: En este nivel la valoración del resultado se realizará por comparación con el resultado exacto.

Hoja para el alumno			
Estima el resultado de las operaciones, redondeando uno solo de los datos.			
Operación	Redondeo	Resultado	Error cometido: Valor real - Valor estim
1342 x 104			
997 x 364			
5.42 x 0.102			
149 x 151			
17484 : 1016			
104697 : 50			
6823 : 2			

Comentario: Un aspecto importante en la estimación de un producto o división es la elección del factor que resulta más conveniente para redondear. Se dejará que los alumnos hagan la elección individual o grupalmente, pero en una puesta en común se discutirán las diferentes opciones para valorar las más convenientes.

Esta propuesta puede volver a realizarse redondeando (por defecto y/o por exceso) ambos factores y analizando la incidencia que estos redondeos tienen en los resultados de cada una de las operaciones que intervienen.

Propuestas similares han de plantearse para mejorar la capacidad de hacer estimaciones en cálculo mediante truncamiento. En estos casos considerar las mismas alternativas presentadas para el redondeo. Conviene destacar que en los procesos por truncamiento la aproximación de los números dados es siempre por defecto. Es importante entonces que esto se tenga en cuenta para la valoración de los resultados obtenidos.

II.6

Nivel: Segundo Ciclo

Objetivo: Ayudar, mediante estimaciones, a que los estudiantes tengan una buena representación mental de las unidades de longitud.

Materiales necesarios: Cada alumno dispondrá de una copia de la hoja en la que aparece el dibujo del castillo y las instrucciones. Es preferible utilizar lápiz para facilitar las correcciones. También es necesaria una regla graduada.

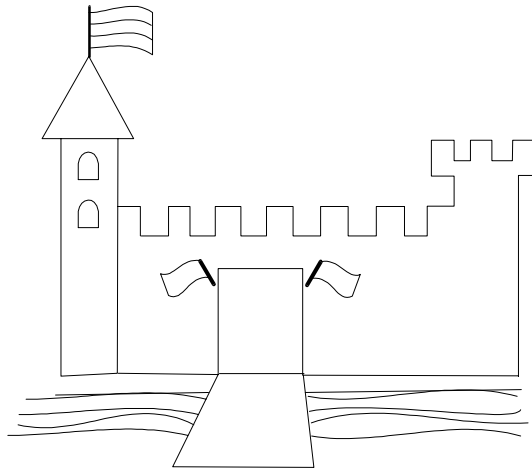
Orientaciones: Las normas de juego deben quedar claras antes de empezar. Además, es posible que haya que dar algunas aclaraciones sobre el concepto de perímetro de objetos físicos dibujados sobre un plano. El ejercicio se podrá hacer, en una primera fase, dando las medidas en cm, y pasar después a utilizar como unidad de medida el mm.

Hoja para el alumno

Derribo el Castillo

Reglas de juego:

1. Debes **estimar** qué segmentos, líneas poligonales o figuras de las que aparecen en el castillo tienen una determinada longitud.
2. El profesor dice en voz alta una longitud y la anota en el pizarrón.
3. Los alumnos **estiman** uno o más elementos que tengan esa longitud.



4. Debes **medir y comprobar** si el error no sobrepasa el cm. En ese caso, queda destruida la parte del castillo correspondiente.
5. Cada vez que se derriba una parte del castillo se tacha con lápiz.
- 6 Gana el que antes derribe el castillo.

Indicaciones: Esta actividad puede desarrollarse proponiendo un dibujo más simple o más complicado.

II.7

Nivel: Primer y Segundo Ciclo

Objetivo: Mejorar las destrezas para hacer estimaciones en medidas del cuerpo humano.

Hoja para el alumno

Primera parte:

1. Sobre un papel afiche y con marcador, contornear el cuerpo de un alumno.

Exponerlo pegando el afiche en el frente.

Lo **observamos y estimamos:**

- ¿Cuántas cabezas entran en el tronco?
- ¿Cuánto más largas son las piernas que los brazos?
- El ancho del pecho ¿cuántas palmas tiene?
- Nombrar partes del cuerpo que tienen aproximadamente la misma longitud

2. Corroborar las estimaciones realizadas utilizando elementos intermediarios (hilos, varillas, palmas, etc.).

Segunda Parte:

1. Ahora **estimamos** sobre nuestro cuerpo y utilizando unidades convencionales de longitud:

- ¿Cuánto mide aproximadamente:

mi brazo?

mi pierna?

mi cintura?

mi estatura?

mi dedo índice?

- Mi cadera ¿es más grande que la de otros compañeros? ¿Cuánto?
- Y el contorno de mi cabeza ¿cómo es con respecto al de mis compañeros.

2. Corroboremos nuestras estimaciones utilizando la cinta métrica.

Comentarios: A los niños les resulta interesante trabajar sobre el cuerpo humano y especialmente sobre el propio. La hoja del alumno presentada es solo una sugerencia que el maestro puede adaptar y enriquecer.

II.8

Nivel : Segundo ciclo.

Objetivos: Calcular el resultado de la división entre números naturales utilizando estrategias de estimación.

Comentario: Esta propuesta puede contribuir a la comprensión de la división por polidígitos explicitando procedimientos que se ocultan detrás de la mecánica del algoritmo tradicional.

Hoja para el alumno

a) Estima el valor del resultado de $356 : 13$. ¿Qué procedimientos utilizaste?. Analiza lo realizado y comparte con tus compañeros los procedimientos que usaste.

b) Te hacemos ahora nuestra propuesta para dividir $356 : 13$

b.1) Averigua cuántas cifras va a tener el resultado. Un recurso importante para esto lo constituye la multiplicación por la unidad seguida de ceros (10, 100, 1000, etc.).

Analiza: $13 \times 1 = 13$
 $13 \times 10 = 130$
 $13 \times 100 = 1300$
 $13 \times 1000 = 13000$.

¿Entre qué valores deberá encontrarse el resultado de $356 : 13$? ¿Cuántas cifras poseerá?
¿Estará más cerca de 10 o de 100? ¿Por qué?.

b.2) De los siguientes números: 2 ; 12 ; 22 ; 32 ; 42 ; 52 ; 62 ; 72 ; 82 ; 92 y en base a lo anterior ¿Cuáles te parecen que pueden ser resultados razonables y por qué?. **Estima** uno de ellos como valor cociente. Comprueba si tiene sentido. ¿Cómo lo haces?.

b.3) Si decides que te puedes acercar al resultado probando con otros valores estás utilizando el procedimiento de tanteo. Por ejemplo en este caso, suponiendo que un valor posible sea 32 (podría haber sido 22), se puede comprobar que $32 \times 13 = 416$, resultado mayor que 356, luego decido probar con valores menores que 32:

$30 \times 13 = 390 > 356$
 $28 \times 13 = 364 > 356$
 $27 \times 13 = 351 < 356$
 $26 \times 13 = 338 < 356$

Por lo tanto el valor natural más preciso como cociente de $356 : 13$ es **27** y la división tendrá un resto igual a $356 - 13 \times 27 = 5$.

¿Te animarías a utilizar un procedimiento similar al expuesto en los siguientes cálculos:

$$4513 : 24$$

$$563 : 32$$

$$84231 : 66$$

Recuerda:

- 1°) **Determinar el número de cifras** del cociente.
- 2°) **Estimar** el valor del mismo.
- 3°) A partir del valor estimado acercarse al valor natural más preciso por **tanteo**.

c) De acuerdo a lo visto en el punto b) podrías caracterizar los procedimientos que haz utilizado en el punto a).

d) Resuelve $356 : 13$ con el algoritmo habitual y analiza cada uno de los pasos que efectúas. ¿Utilizas alguno de los procedimientos anteriores?

II.9

Nivel: Segundo y tercer ciclo

Objetivo: Practicar el proceso de compensación en las operaciones básicas.

Indicaciones: Al principio de cada operación se dan indiciones orientativas de cómo proceder.

Las aproximaciones pueden variar atendiendo a los números que intervienen.

Hoja para alumno			
Lee y completa los recuadros que faltan. Fundamenta en cada caso el procedimiento utilizado.			
Operación	Truncamos y Operamos	Compensación	Estimación final
$\begin{array}{r} 7.2 \\ 2.37 \\ 9.15 \\ 11.61 \\ + 4.8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ 2 \\ 9 \\ 11 \\ + 4 \\ \hline 33 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Estimación} \\ 0.2+0.8 = 1 \\ 0.3+0.1+0.6 = 1 \\ 2 \\ = \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{Compensación} \\ \underline{\quad 2 \quad} \\ + \quad \underline{\quad \quad} \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2.4 \\ 8.11 \\ + 6.53 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{Estimación Inicial} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{l} = \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} + \quad \underline{\quad \quad} \quad \underline{\quad \quad} \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 7468 \\ - 2689 \\ \hline 4779 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7000 \\ - 2000 \\ \hline 5000 \end{array}$	$\begin{array}{l} 5000 \\ = 4800 \end{array}$	$\begin{array}{r} - 200 \quad \underline{\quad \quad} \quad \underline{\quad \quad} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} 3554 \\ - 2349 \\ \hline \end{array}$	$500 - 300 = 200$	$= 1200$	$\begin{array}{r} 1000 + 200 \\ \hline 1200 \end{array}$
Estimación Inicial			

Operación	Aproxim.un factor	Compensamos el otro en sentido contrario	Estimación final mejorada
98x26	100x26	100x25	2500
202,7x29,8	200x29,8	200x30	
410:137	410:130	390:130	3
76:101			

Notas:

- (1) Estrategia: “Métodos de nivel superior para la organización de rutinas de nivel inferior”. (Langford, 1990).
- (2) Heurística: “Método de resolución de problemas que consiste en aplicar ciertos principios que permiten reconocer que el problema pertenece a cierto tipo y que suelen llevar a una resolución, aunque no siempre sea la conveniente” (Schoenfeld, 1985).
- (3) Algoritmo: “Serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos” (Segovia y otros, 1988).

Bibliografía

- PARRA, C.; SAIZ, I.: “Didáctica de matemáticas, aportes y reflexiones”. Paidós Educador. 1994.
- SEGOVIA, I Y OTROS: “Estimación en cálculo y medida”. Editorial Síntesis. 1988. España.
- LANGFORD, P.: “El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria”. Paidós. 1990.
- SCHOENFELD, A.: “Mathematical Problem Solving”. Academic Press Inc. 1985. New York.
- SANTALO, L.: Señorita, ¿qué es la estadística?”. COPEA. 1991.
- HOPE, J.: “Promote Number Sense In School”. Arithmetic Teacher. Vol. 36, No 6. Feb. 89.
- LOBATO, J.: “Making Connections with Estimation”. Vol. 40. No 6. Feb. 93.
- VAN de VALLE, J.; THOMPSON C.: “Estimation and Mental Computation”. Vol. 34, No 9. May 87.
- BARBERA GREGORI, E. : “Estimación estratégica: la matemática como ciencia inexacta”. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas. No 7. Enero 1996. GRAO. España.
- BRESSAN, A.; BOGISIC, B.: “El cálculo aproximado: aplicaciones a la operatoria con naturales y decimales”. Doc. 17. Perfeccionamiento Docente - Area Matemática. C.P.E. de Río Negro. 1987.
- CASTRO, E y otros: “Estimación en cálculo y medida”. Ed. Síntesis S.A. España .1989