¡¡¡¡ UN NÚMERO QUE NO ALUMBRA PERO DESLUMBRA!!!

CONTENIDO: INTRODUCCIÓN A NÚMEROS IRRACIONALES
AUTORAS: PATRICIA CUELLO - ADRIANA RABINO

Hay contenidos matemáticos que, por su naturaleza son óptimos para trabajar situaciones realistas, interesantes o asombrosas. En cambio, a veces no sabemos “cómo disfrazarnos” para que los alumnos se motiven con ciertos temas.

Tal es lo que puede suceder con la introducción de los números irracionales y la operatoria con radicales.

El hecho es que hasta este momento los estudiantes trabajaron con los números racionales, y hasta les enseñamos a truncar o redondear decimales, o transformar decimales en fracciones y viceversa. ¿Por qué ahora hay que aprender a reducir a la mínima expresión, extraer radicales fuera del signo, buscar común índice, etc., etc., etc.? ¿Por qué no los podemos escribir como fracción? ¿Qué tienen de especial estos números? ¿No sería más fácil sacar el resultado con la calculadora y seguir redondeando o truncando?...¡Parece que no!

Entonces, tratemos de ver el “vaso medio lleno” y ser optimistas.

Hay varias maneras de introducir a los alumnos en los números irracionales. Muchas veces se lo hace a través de la “completitud de la recta real”, que desde el aspecto matemático es totalmente correcto, pero, como dijimos anteriormente, probablemente carezca de sentido para el alumno de escuela primaria. Otras veces se recurre a números irracionales especiales, como lo es el número π (conocido desde la escuela primaria, aplicado a la longitud de la circunferencia, al área del círculo o al volumen de la esfera), pero frecuentemente sin discutir demasiado su naturaleza. Pero en este sentido, hay otro número irracional que es extraordinario porque no solamente lo utiliza el hombre cuando quiere crear formas armoniosas, sino que aparece muchísimas veces en la naturaleza ¡Curiosamente maravilloso!

Podemos hacer una pequeña acotación con respecto a la operatoria con radicales. Es interesante que los alumnos vean la necesidad de operar con su expresión radical (no con aproximaciones) porque, en algunos casos, la propagación del error nos lleva a resultados muy lejanos del correcto a pesar de que todos los procedimientos sean adecuados (Ver en esta misma página el documento “Quinto problema de las esferas” de Oscar Bressan).

Volviendo al número de oro, no solamente los escultores, pintores o arquitectos sacaron provecho del mismo, también lo hicieron los narradores, y algunos de una manera muy singular, como lo ha hecho Malba Tahan en uno de los capítulos de “El Hombre que Calculaba”

Atiendan a esta historia:

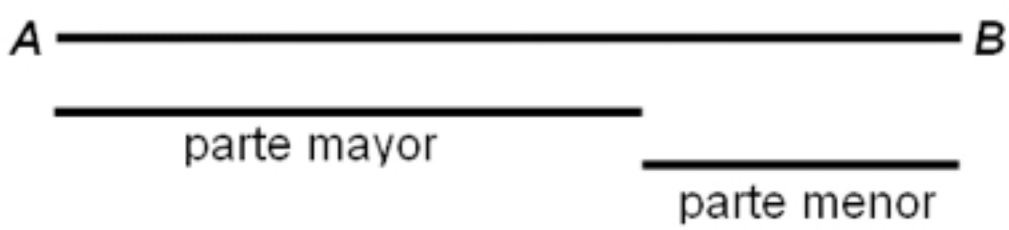
CAPÍTULO XXIV

En el cual Beremís, por medio de fórmulas, calcula la belleza de una joven. La división áurea. Cómo se determina, sin error, el valor numérico de la Belleza.

Uno de los hombres más populares de Bagdad es un turco, llamado Hassan Muarique, quien ejerce el cargo de jefe de guardias del sultán. Había yo observado que Hassan se tornaba día a día uno de los más asiduos concurrentes del “ Patito Dorado ”. Raro era el día en que el guapo capitán de policía no se presentara a hacer una consulta al calculista.
Hoy, al regresar de la mezquita, encontré a Muarique en animada conversación con Beremís. Se trataba de la resolución de un nuevo problema, que parecía muy complicado, pues vi al talentoso matemático, indeciso, analizando figuras y aplicando fórmulas sin llegar a un resultado satisfactorio.
Al final se retiró el turco con los guardias que lo acompañaban.
Sólo entonces pude oír la explicación, de labios de Beremís, de aquel raro interés del turco por la ciencia.
Me contó el calculista lo siguiente:
- Hassan Muarique, capitán de la guardia, resolvió casarse con una joven llamada Zaira, hija del mercader Abul Lahabe, de Basora. No quería, sin embargo, arriesgarse a pedir a la jovencita en casamiento, sin asegurarse previamente de si ella era hermosa o estaba desprovista de encantos. Ya había recurrido a todos los artificios imaginables para descubrir el rostro de Zaira, pero sin resultado. No quiso, sin embargo, guiarse únicamente por las informaciones de las viejas “ catbeth ” (mujeres muy viejas que frecuentan los harenes y llevan informaciones a los pretendientes sobre los atributos y dotes de las jóvenes casaderas) , ya que esas casamenteras exageran las virtudes de las novias para engañar a los pretendientes ingenuos. Ante ese inconveniente, Hassan me ha pedido lo auxiliase a resolver el problema. ¿Cómo deberá hacer para asegurarse, antes del casamiento, de la belleza de su esposa?

Hallé original aquella consulta y le dije:
- La Matemática dispone de recursos maravillosos. Con el auxilio de dicha ciencia puede el hombre calcular el peso de un camello, la altura de una torre o la belleza de una mujer. Y como él me mirase con ojos espantados, aclaré: "Sí, con el auxilio de una relación geométrica, puede el matemático determinar si una joven es hermosa o fea, es decir, si sus formas son perfectas o no. Es enteramente innecesario, para el novio, ver el rostro de su futura esposa para prevenirse contra cualquier desilusión. Basta disponer de media docena de medidas y aplicar a ellas las "fórmulas matemáticas de belleza".
- Exigí –prosiguió Beremís- que Hassan obtuviese ciertas medidas del rostro de Zaira. Esas medidas, tomadas en el interior del "harem" por una "catbeth", fueron entregadas al pretendiente. Disponiendo de los datos del problema, apliqué las fórmulas, calculé las relaciones, y llegué matemáticamente al siguiente resultado: "La joven Zaira, hija del mercader ABul-Lahabe, es linda como la décima tercera hurí del Cielo de Alah".
- Es increíble –observé- que pueda el Álgebra llegar a ese resultado. ¿Es posible saber en que consiste esa fórmula matemática de Belleza?
- Nada más fácil –replicó Beremís-. Puedo explicar una relación curiosa, de un modo elemental y simple.

Dada cierta magnitud AB (representada en este caso por un segmento de recta), podemos dividirla al medio, o en dos partes desiguales. La división en dos partes desiguales puede ser hecha, es claro, de una infinidad de maneras diferentes.



Entre las divisiones de AB en partes desiguales, ¿habrá alguna preferible a las otras?
- Sí –contesta el matemático-. Existe una manera "simpática" de dividir un todo en dos partes desiguales. Veamos en que consiste esta forma de división.
Consideremos el segmento AB dividido en dos partes desiguales.

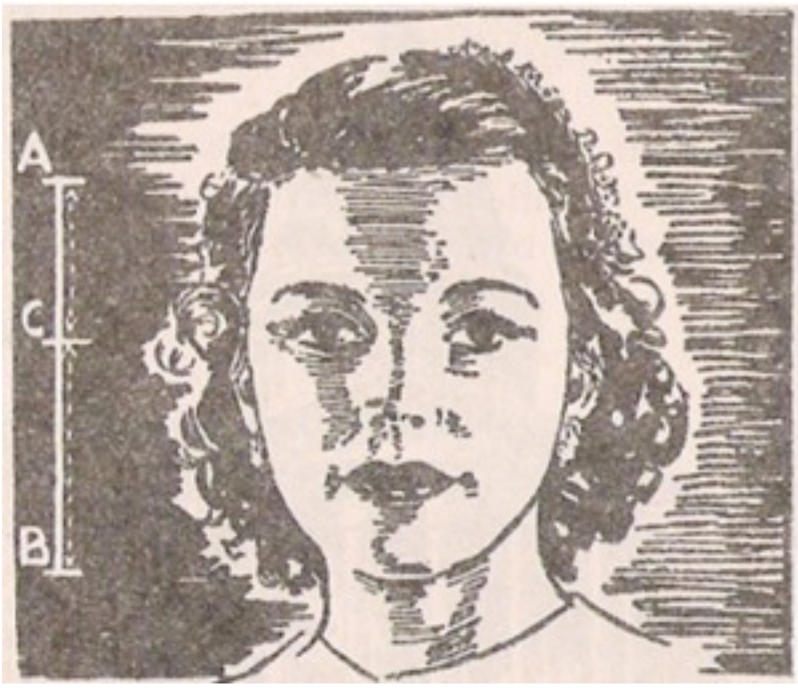
Admitamos que esas partes desiguales representen la siguiente relación: "El segmento total es a la parte mayor, como la parte mayor es a la parte menor ." Dividamos un segmento de 80 cms. (por ejemplo) en dos partes midiendo, respectivamente, 49,4 cms. y 30,6 cms. Tenemos, entonces: 80 : 49,4 = 49,4 : 30,6 .

De ahí la proporción:

Segmento total : Parte mayor = Parte mayor : Parte menor

Esta notable división se llama **división áurea o división en media y extrema razón***, y*
corresponde a la forma simpática que pueden presentar las dos partes desiguales. Podemos formular la siguiente regla:

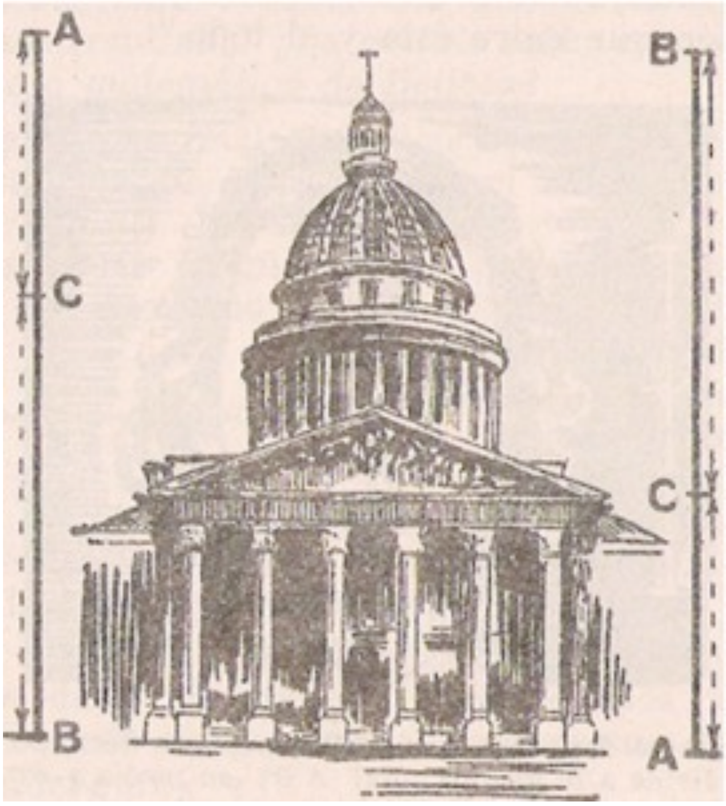
"Para que un todo dividido en dos partes desiguales parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe presentar entre la parte menor y la mayor la misma relación que entre ésta y el todo."



En el rostro femenino "matemáticamente" hermoso, la línea C de los ojos divide a la medida total AB, en media y extrema razón.

Hasta hoy no se consiguió descubrir la razón de ser o "por qué" de esa belleza. Los matemáticos, que llevaran hasta muy lejos sus estudios y observaciones, exponen varios y curiosos ejemplos que constituyen elocuentes demostraciones para el principio de esa división que los romanos llamaban "divina proporción" o "división áurea".
Podemos llamarla también división en media y extrema razón.
Es fácil observar que el título puesto por el calígrafo en la primera página

de una obra divide, en general, la medida total del libro en media y extrema razón.



La división áurea es observada, con admirable nitidez, en las fachadas de los edificios que se distinguen por la perfección de sus líneas arquitectónicas. El famoso "panteón" de París, representado en la figura, es un ejemplo notable. Siendo AB la altura del monumento, el "punto de oro" se destaca de manera inconfundible; es el punto C por el que pasa, ya sea la línea de la base del frontispicio, o el plano que corta la base de la cúpula.

Lo mismo sucede con la línea de los ojos, que divide, en las personas bien proporcionadas, la medida total del rostro en media y extrema razón. Se observa también la divina proporción en las partes en que las falanges dividen los dedos de la mano.

La división en media y extrema razón se puede hallar también en la Música, en la Pintura, en la Escultura y en la Arquitectura.

En la división áurea, la relación entre el todo y la parte mayor, es igual, más o menos, a 809 / 500

En las líneas principales del rostro femenino "matemáticamente hermoso" resulta constante aquella relación relación.
Obtenidas, pues, las medidas que me parecieron necesarias, apliqué la fórmula de la divina proporción a la joven Zaira, y verifiqué que su belleza

se expresaba por el número:
808/500 que difiere muy poco del valor que define la perfección (el valor de la relación 809/500 es un número decimal 1,1618. Beremís halló para la joven Zaira el número 1,616 que difiere en dos milésimos del resultado más aproximado antes indicado).
Mediante ese resultado pude afirmar al apasionado Hassan que su novia era encantadora.
- ¿Y no temes equivocarte, amigo? –observé-. La belleza femenina resulta, a veces, de ciertos detalles que la Matemática no puede apreciar. ¡Cuántas veces el encanto de la mujer resulta de la manera de sonreír, del tono de voz, de cierta delicadeza de espíritu y de mil otros pequeñísimos detalles que, en ocasiones, para los enamorados, son todo! Beremís no respondió. Bajó la cabeza y quedó en silencio, como si estuviese preocupado por nuevas y profundas meditaciones .

El número áureo es un número irracional y se lo simboliza con la letra griega τ (tau) o con la letra griega φ (phi) en honor al escultor griego Fidias y su expresión matemática es:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989484820458683436563 8...$$

Algunas expresiones o propiedades curiosas de este número:

φ = 1,61803...........   1/ φ = 0,61803...............

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots\dots\dots}} \qquad \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots\dots\dots}}}}$$

Se dice que dos números positivos **a** y **b** están en razón áurea si y sólo si:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Para obtener el valor de φ a partir de esta razón considere lo siguiente:

Que la longitud del segmento más corto *b* sea 1 y que la de *a* sea *x*. Para que estos segmentos verifiquen la razón áurea deben cumplir que:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

Multiplicando ambos lados por x y reordenando:

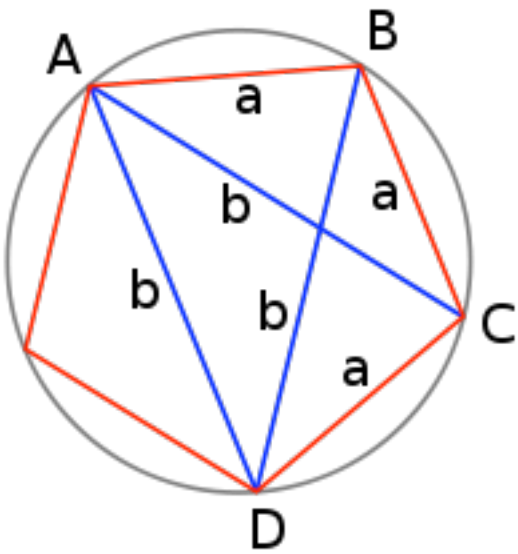
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Mediante la fórmula general para obtener las raíces de las ecuaciones de segundo grado se obtiene que las dos soluciones de la ecuación son

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1,61803$$

La solución positiva es el valor del número áureo.

También se puede calcular el número áureo usando el teorema de Ptolomeo en un pentágono regular.



Claudio Ptolomeo desarrolló un teorema conocido como el teorema de Ptolomeo, el cual permite trazar un pentágono regular mediante regla y compás. Aplicando este teorema un cuadrilátero es formado al quitar uno de los vértices del pentágono, Si las diagonales y la base mayor miden **b**, y los lados y la base menor miden **a**, resulta que $b^2 = a^2 + ab$ lo que implica:

$$\frac{b}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}\,.$$

ALGUNAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Se proponen algunas actividades con los alumnos a partir del texto. Por ejemplo:

- Verifica la proporción áurea en el rostro, manos y cuerpo de tu compañero/a.
- Verifica si los objetos con forma de rectángulo más usuales (tarjetas de crédito, postales, fotos, etc.) respetan la proporción áurea.

Después de ver la película Donald en el Mundo de las Matemágicas preguntar:

- ¿Dónde se encuentra el número áureo en la naturaleza?

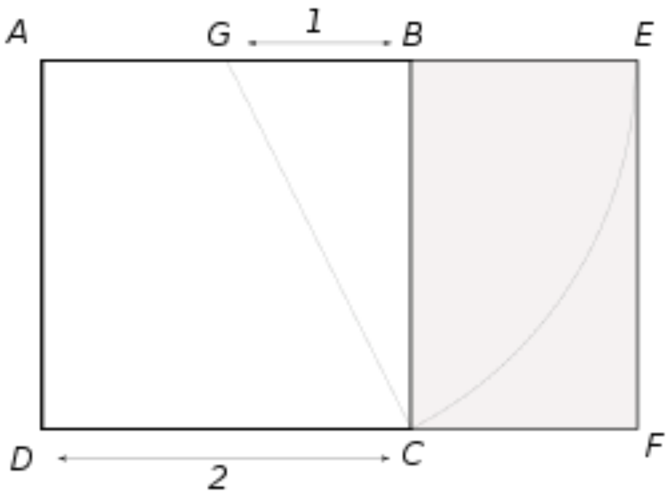
Traer revistas y diarios para:

- Buscar edificios antiguos y modernos y comprobar si en determinadas dimensiones se verifica la proporción áurea.
- ¿Qué otro número irracional conoces?
- ¿Cómo podemos encontrar otros números irracionales? ¿Habrá otros? ¿Cuántos?
- ¿Cuáles serán las características de un número irracional?

INFORMACIÓN INTERESANTE PARA ELABORAR MÁS PREGUNTAS

El número de oro –también llamado *divina proporción* por el monje veneciano Luca Pacioli, *sectia divina* por Kepler, *sectia áurea* por Leonardo da Vinci, *número dorado, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción* – es un número conocido desde la antigüedad por sus atributos estéticos, sus propiedades matemáticas y los símbolos místicos que se le asignaron.

Si se traza un rectángulo, se comprueba que la figura tiene su aspecto más armonioso cuando la relación de su largo y ancho es igual al número de oro.
Euclides obtiene el rectángulo áureo AEFD a partir del cuadrado ABCD. El rectángulo BEFC es asimismo áureo.



El rectángulo *AEFD* es áureo porque sus lados AE y AD están en la proporción del número áureo. Euclides en su proposición 2.11 de *Los elementos* obtiene su construcción.

Con centro en G se obtiene el punto E, y por lo tanto

$$GE = GC = \sqrt{5}$$

resultando evidente que

$$AE = AG + GE = 1 + \sqrt{5}$$

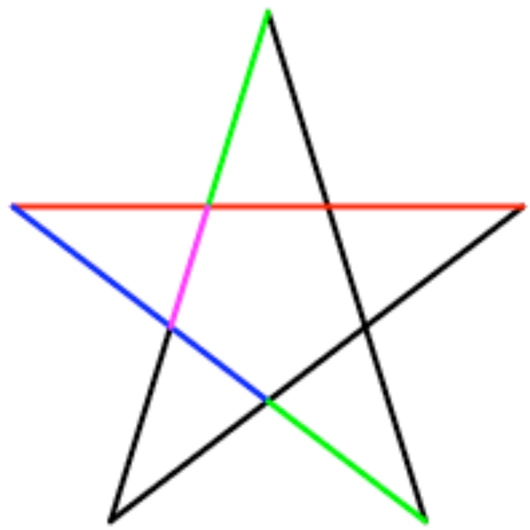
de donde, finalmente

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Por otra parte, los rectángulos AEFD y BEFC son semejantes, de modo que este último es asimismo un rectángulo áureo.

El número de oro interviene en muchas otras figuras, pentágonos y decágonos regulares o estrellados, y por eso ese número está en todas las obras de arte en las que se manifiestan estas estructuras, tanto en pintura como en arquitectura, tanto en la ciencia geométrica como en la astronomía. Asociado con el pentáculo o estrella de cinco puntas, símbolo de los pitagóricos, figura en monedas antiguas y en las rosetas

de nuestras catedrales, fue adoptado como uno de los símbolos de Dios por los griegos de la antigüedad y los cristianos del Renacimiento.
El pentagrama siguiente ilustra algunas de las razones áureas: los segmentos rojo y azul, azul y verde, verde y morado.



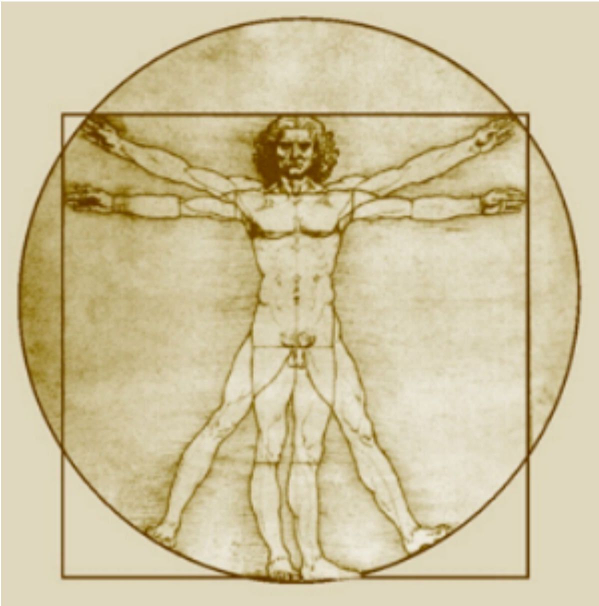
Cada intersección de partes de un segmento, interseca a otro segmento según la razón áurea.
El pentagrama incluye diez triángulos isósceles: cinco acutángulos y cinco obtusángulos. En ambos, la razón de lado mayor y el menor es φ. Estos triángulos se conocen como los triángulos áureos.

Leonardo da Vinci, el pintor Serusier, el arquitecto Le Corbousier, el astrólogo y astrónomo Kepler...afirmaron el papel esencial de este número. Semejante número, inserto en la naturaleza e innato en el hombre, no podía dejar de seducir a los místicos.

El *Hombre de Vitruvio* es un famoso dibujo acompañado de notas anatómicas de Leonardo da Vinci realizado alrededor del año 1492 en uno de sus diarios. Representa una figura masculina desnuda en dos posiciones sobreimpresas de brazos y piernas e inscrita en un círculo y un cuadrado. Se trata de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos de arquitectura de Vitruvio, arquitecto de la antigua Roma, del cual el dibujo toma su nombre. (ver en esta misma página en experiencias de aula: El hombre de Vitruvio)

El dibujo está realizado en lápiz y tinta y mide 34,4 x 25,5 cm. En la actualidad forma parte de la colección de la Galería de la Academia de Venecia.

El cuadrado está centrado en los genitales, y el círculo en el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es la razón áurea. Para Vitruvio el cuerpo humano está dividido en dos mitades por los órganos sexuales, mientras que el ombligo determina la sección áurea. En el recién nacido, el ombligo ocupa una posición media y con el crecimiento *migra* hasta su posición definitiva en el adulto.



Leonardo da Vinci, tomando como figura al ser humano, fue el autor de un canon de las proporciones, considerando el rostro femenino "matemáticamente hermoso" si la línea C de los ojos divide a la medida total AB en media y extrema proporción:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

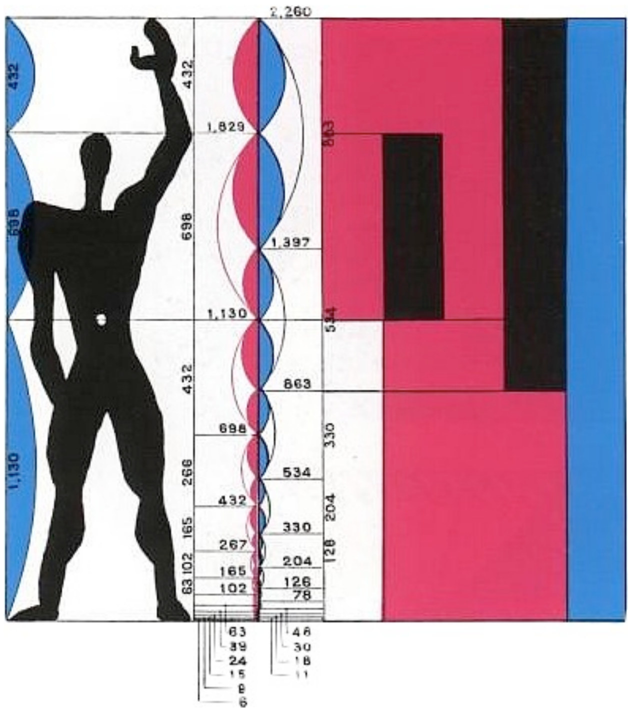
La Anatomía de los humanos se basa en una relación Φ estadística y aproximada, así vemos que:

- La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
- La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
- La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
- La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, si dividimos todo es Φ.
- La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz
- Es Φ la relación entre el diámetro externo de los ojos y la línea inter-pupilar
- Cuando la tráquea se divide en sus bronquios, si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene Φ,

o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas).

Le Corbusier escribió varios libros en los que expuso sus ideas en forma complementaria a sus propios proyectos. La Segunda Guerra Mundial redujo sus posibilidades de proyectar, lo que hizo que dedicara más atención a la teoría. Entre los años 1942 y 1948 desarrolló el Modulor, un sistema de medidas en el que cada magnitud se relaciona con las demás según la Proporción Áurea y a la vez se corresponde con las medidas del cuerpo humano. El Modulor es aplicable al diseño funcional y estético en arquitectura.

Con el Modulor Le Corbusier retomó el antiguo ideal de establecer una relación directa entre las proporciones de los edificios y las del hombre. El libro se publicó en 1950 y, tras el éxito obtenido, le siguió el Modulor 2 en 1955. En este último las medidas se adaptan al tipo latino (aprox. 1.72 metros de estatura) mientras que el anterior se basaba en el tipo sajón (1.82 m).



El número áureo también está relacionado con los sólidos platónicos, en particular con el icosaedro y el dodecaedro, cuyas dimensiones están dadas en términos del número áureo. Los 12 vértices de un icosaedro con aristas de longitud 2, pueden darse en coordenadas cartesianas por los siguientes puntos: $(0, \pm 1, \pm\varphi)$, $(\pm 1, \pm\varphi, 0)$, $(\pm\varphi, 0, \pm 1)$

Los 20 vértices de un dodecaedro con aristas de longitud $2/\varphi=\sqrt{5}-1$, también se pueden dar en términos similares: $(\pm1, \pm1, \pm1)$, $(0, \pm1/\varphi, \pm\varphi)$, $(\pm1/\varphi, \pm\varphi, 0)$, $(\pm\varphi, 0, \pm1/\varphi)$

Las 12 esquinas de los rectángulos coinciden con los centros de las caras de un dodecaedro.

Para un dodecaedro con aristas de longitud a, su volumen y su área total se pueden expresar también en términos del número áureo:

$$V = \frac{4 + 7\varphi}{2} \cdot a^3$$

Si tres rectángulos áureos se solapan paralelamente en sus centros, las 12 esquinas de los rectángulos áureos coinciden exactamente con los vértices de un icosaedro, y con los centros de las caras de un dodecaedro:

El punto que los rectángulos tienen en común es el centro tanto del dodecaedro como del icosaedro.

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea y/o los números de Fibonacci:

- Leonardo de Pisa (Fibonacci), en su *Libro de los ábacos* (Liber abacci, 1202, 1228), usa la sucesión que lleva su nombre para calcular el número de pares de conejos *n* meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos están aislados por muros, se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad, tardan un mes desde la fecundación hasta la aparición y cada camada es de dos conejos). Este es un problema matemático puramente independiente de que sean conejos los involucrados. En realidad, el conejo común europeo tiene camadas de 4 a 12 individuos y varias veces al año, aunque no cada mes, pese a que la preñez dura 32 días. El problema se halla en las páginas 123 y 124 del manuscrito de

1228, que fue el que llegó hasta nosotros, y parece que el planteo recurrió a conejos como pudiera haber sido a otros seres; es un soporte para hacer comprensible una incógnita, un acertijo matemático . El cociente de dos términos sucesivos de la Sucesión de Fibonacci tiende a la sección áurea o al número áureo si la fracción resultante es propia o impropia, respectivamente. Lo mismo sucede con toda sucesión recurrente de orden dos, según demostraron Barr y Schooling en la revista The Field del 14 de diciembre de 1912.[7]

- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
- La distribución de las hojas en un tallo. Ver: Sucesión de Fibonacci.
- La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).
- La distancia entre las espirales de una Piña.

- La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol o de cefalópodos como el nautilus.

- Hay por lo menos tres espirales logarítmicas más o menos asimilables a proporciones aúreas. La primera de ellas se caracteriza por la relación constante igual al número áureo entre los radiovectores de puntos situados en dos evolutas consecutivas en una misma dirección y sentido. Las conchas del *Fusus antiquus*, del Murex, de *Scalaria pretiosa*, de *Facelaria* y de *Solarium trochleare*, entre otras, siguen este tipo de espiral de crecimiento.[8] [9] Se debe entender que en toda consideración natural, aunque involucre a las ciencias consideradas más matemáticamente desarrolladas, como la Física, ninguna relación o constante que tenga un número infinito de decimales puede llegar hasta el límite matemático, porque en esa escala no existiría ningún objeto físico. La partícula elemental más diminuta que se pueda imaginar es infinitamente más grande que un punto en una recta. Las leyes observadas y descriptas matemáticamente en los organismos las cumplen transgrediéndolas orgánicamente.[10]

- Para que las hojas esparcidas de una planta (Ver Filotaxis) o las ramas alrededor del tronco tengan el máximo de insolación con la mínima interferencia entre ellas, éstas deben crecer separadas en hélice ascendente según un ángulo constante y teóricamente igual a 360º (2 - φ) ≈ 137º 30' 27,950 580 136 276 726 855 462 662 132 999..." En la naturaleza se medirá un ángulo práctico de 137º 30' o de 137º 30' 28" en el mejor de los casos. Para el cálculo se considera iluminación vertical y el criterio matemático es que las proyecciones horizontales de unas sobre otras no se recubran exactamente. Aunque la iluminación del Sol no es, en general, vertical y varía con la latitud y las estaciones, esto garantiza el máximo aprovechamiento de la luz solar. Este hecho fue descubierto empíricamente por Church y confirmado matemáticamente por Weisner en 1875. En la práctica no puede medirse con tanta precisión el ángulo y las plantas lo reproducen "orgánicamente"; o sea, con una pequeña desviación respecto al valor teórico.
- En la cantidad de elementos constituyentes de las espirales o dobles espirales de las inflorescencias, como en el caso del girasol, y en otros objetos orgánicos como las piñas de los pinos se encuentran números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci. El cociente de dos números sucesivos de esta sucesión tiende al número áureo.
- Existen cristales de Pirita dodecaédricos pentagonales (piritoedros) cuyas caras son pentágonos irregulares. Sin embargo, las proporciones de dicho poliedro irregular **no** involucran el número áureo.