EL USO DIDÁCTICO DE MODELOS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: UN EJEMPLO DE UNA TRAYECTORIA LONGITUDINAL SOBRE PORCENTAJE[1]

MARJA VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN

Traducción: Ma. Fernanda *Gallego,* para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Escuela de Otoño: "La corriente realista de didáctica de la matemática". 4 al 9 de mayo de 2009. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro. Argentina.

RESUMEN. El propósito de este artículo es describir cómo, dentro del enfoque holandés de la educación matemática, llamado *Educación Matemática Realista* (EMR), se utilizan modelos para promover el progreso de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas. En primer término se presenta información general sobre las características de la EMR relacionadas con el papel de los modelos en este enfoque. Luego, se estudia el uso del modelo de barra dentro de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje que se ha diseñado para *Matemáticas en Contexto*, un currículum para la escuela media en EUA. El poder de este modelo es que se desarrolla a la par, tanto de la enseñanza como de los estudiantes: de un dibujo que representa un contexto relacionado con porcentaje, a una tira para estimar y razonar y a una herramienta abstracta que apoya el uso del porcentaje como operador.

PALABRAS CLAVE: contextos, diseño curricular, educación matemática, modelos, porcentaje, escuela primaria, cambio en los niveles de comprensión.

INTRODUCCIÓN

La *Educación Matemática Realista* (EMR) es una teoría específica de instrucción para la educación matemática (p.ej., Treffers, 1987; De Lange, 1987; Streefland, 1991, Gravemeijer, 1994a; Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Esta teoría es la respuesta holandesa a la necesidad, percibida en todo el mundo, de reformar la enseñanza de las matemáticas. La raíces de la EMR se remontan a comienzos de la década de los setenta, cuando Freudenthal y sus colaboradores pusieron sus cimientos en el antiguo IOWO,[2] el predecesor más temprano del Instituto Freudenthal. Basada en la idea de Freudenthal (1977) de que la matemática —si ha de tener valor humano— debe estar conectada con la realidad, mantenerse cercana a los niños y ser relevante para la sociedad, el uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática. En la EMR, los estudiantes deben aprender matemática desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tienen sentido para ellos.

---

[1] *Educational Studies in Mathematics* **54**: 9–35, 2003. © 2003 *Kluwer Academic Publishers. Impreso en los Países Bajos.*

Por una parte, el adjetivo 'realista' concuerda definitivamente con la forma de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dentro de la EMR, pero por otra, este término también da lugar a confusión. En holandés, el verbo 'zich *realisieren*' significa 'imaginar'. En otras palabras, el término 'realista' se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan *imaginar* (véase Van den Brink, 1973; Wijdeveld, 1980), que a la 'realidad' o autenticidad de los problemas. Sin embargo, esto último no significa que la relación con la vida real no sea importante. Sólo implica que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, e incluso el mundo formal de las matemáticas, pueden ser contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean 'reales' en la mente de los estudiantes.

Aparte de este frecuente malentendido acerca del significado de 'realista', el uso de este adjetivo para definir un enfoque particular de la educación matemática tiene un 'defecto' adicional. No refleja otra característica fundamental de la EMR: el uso didáctico de modelos. En este artículo nos centraremos en este aspecto de la EMR.

En la primera parte de este documento de posición, proporcionaré información general sobre la teoría de la EMR y la función de los modelos dentro de esta teoría. Entre otras cosas, se pondrá especial atención a las dos formas de matematización que caracterizan a la EMR, los distintos niveles de comprensión que es posible distinguir y que tipifican el proceso de aprendizaje, cómo pueden los estudiantes desempeñar un papel activo en el desarrollo de modelos, cómo evolucionan los modelos durante el proceso de enseñanza/aprendizaje y —en consecuencia— cómo promueven y apoyan el cambio de nivel. En la segunda parte de este artículo, se dará un carácter más concreto a esta información general concentrando la atención en el contenido de porcentaje. Se describe cómo el modelo de barra puede apoyar el proceso longitudinal de aprendizaje del porcentaje.

Esta descripción del uso didáctico del modelo de barra se basa en el trabajo de desarrollo que se llevó a cabo en *Matemáticas en Contexto*, un proyecto encaminado a la elaboración de un currículum de matemática para la escuela media en EUA (Romberg, 1997–1998). El proyecto fue financiado por la National Science Foundation (Fundación Nacional para las Ciencias) y ejecutado por el Centro para la Investigación en Educación de Ciencias Matemáticas (CRMSE, por sus siglas en inglés) de la Universidad de Wisconsin-Madison[3] y el Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht. El currículum diseñado refleja el contenido matemático y los métodos de enseñanza sugeridos por los 'Estándares de Programa de Estudios y Evaluación para las Matemáticas Escolares' (NCTM, 1989). Esto significa que la filosofía del currículum y su desarrollo se basan en la creencia de que la matemática, como cualquier otro cuerpo de conocimientos, es el producto de la inventiva humana y las actividades sociales. Esta filosofía tiene mucho en común con la EMR. Freudenthal (1987) pensaba que las estructuras matemáticas no son un conjunto de datos fijos, sino que surgen de la realidad y se expanden continuamente en procesos individuales y colectivos de aprendizaje. En otras palabras, en la EMR los estudiantes son vistos como participantes activos en el proceso de enseñanza/aprendizaje que tiene lugar en el contexto social del aula.

No obstante, además de lo anterior, Freudenthal (1991) insistió también en que el proceso de reinvención debe ser guiado. Se debe ofrecer a los estudiantes un ambiente de aprendizaje en el que puedan construir conocimientos matemáticos y tener posibilidades de alcanzar niveles más altos de comprensión. Esto implica que se deben crear escenarios capaces de promover este crecimiento en comprensión. La creación de tal escenario para aprender porcentaje fue uno de los objetivos del proyecto *Matemáticas en Contexto*. Dentro de este escenario, el modelo de barra fue la principal herramienta didáctica para facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

LA EMR Y EL USO DIDÁCTICO DE MODELOS

Las matemáticas como matematización

Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1971) de la matemática como una actividad humana. Como ya se ha señalado, para él la matemática no era el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas y buscar problemas y, en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, lo cual llamó 'matematización' (Freudenthal, 1968). En términos muy claros, Freudenthal aclaró de qué trata la matemática: "No hay matemática sin matematización" (Freudenthal, 1973, pág. 134).

Esta interpretación de la matemática basada en la actividad tuvo también consecuencias importantes respecto a cómo se conceptualizaba la *educación* matemática. De un modo más preciso, afectó tanto las metas de la educación matemática como los métodos de enseñanza. Según Freudenthal, la mejor forma de aprender matemática es haciendo (ibid., 1968, 1971, 1973), y matematizar es la meta central de la educación matemática:

Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemática como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar la matemática.(Freudenthal, 1968, pág.7)

Si bien en sus primeros escritos Freudenthal se refirió, sin lugar a dudas, a dos clases de matematización, y dejó en claro que no se proponía limitar la matematización a una actividad en el nivel inferior, donde se aplica para organizar las cuestiones no matemáticas de un modo matemático, su atención se centró principalmente en matematizar la realidad en el sentido común del mundo de allá afuera. Se oponía a aislar la matemática de situaciones del mundo real y a enseñar una axiomática prefabricada (Freudenthal, 1973).

Dos formas de matematización

Fue Treffers (1978, 1987) quien colocó las dos formas de matematización bajo una nueva perspectiva, que llevó asimismo a Freudenthal a pensar de otra manera. Treffers formuló la idea de dos formas de matematización en un contexto educacional. Distinguió entre la matematización 'horizontal' y la 'vertical'. En términos generales, el significado de estas dos formas de matematización es el siguiente. En el caso de la matematización horizontal, se presentan herramientas matemáticas y se utilizan para organizar y resolver un problema de la vida diaria. La matematización vertical, por el contrario, representa todo tipo de reorganizaciones y operaciones hechas por los estudiantes dentro de la matemática misma. En su último libro, Freudenthal (1991) adoptó la distinción de Treffers de estas dos formas de matematización, y expresó sus significados así: matematizar horizontalmente significa ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos; y matematizar verticalmente significa moverse dentro del mundo de los símbolos. Esto último implica, por ejemplo, crear atajos y descubrir relaciones entre conceptos y estrategias, y hacer uso de estos hallazgos. Sin embargo, Freudenthal hizo hincapié en que las diferencias entre estos dos mundos están lejos de ser claramente definidas, y que, en su opinión, de hecho no se trata de mundos separados. Además, descubrió que las dos formas de matematización son de igual valor, y subrayó el hecho de que ambas actividades pueden tener lugar en todos los niveles de la actividad matemática. En otras palabras, incluso en el nivel de las actividades de conteo, por ejemplo, pueden darse ambas formas.

Aunque Freudenthal introdujo ciertos matices importantes en la formulación de las dos formas de matematización, no afectan el núcleo de la clasificación de Treffers ni su significación. Más aún, fue mérito de Treffers el haber dejado en claro que, por su enfoque en estas dos formas de matematización, la EMR se distingue claramente, de otras formas de abordar la educación matemática que entonces prevalecían. Según Treffers (1978, 1987, 1991), un enfoque empírico se centra sólo en la matematización horizontal, en tanto que un enfoque estructuralista se limita a la matematización vertical, y en un enfoque mecanicista ambas formas están ausentes. Como lo destacaran Treffers y Goffree (1985), el tipo de matematización en el cual uno se enfoque en la educación matemática tiene consecuencias importantes respecto al papel de los modelos en las diferentes formas de abordar la educación matemática, y también respecto a la clase de modelos que se utilizan.

Niveles diferentes de comprensión

Otra característica de la EMR, estrechamente relacionada con la matematización, es lo que se podría llamar el 'principio de niveles' de la EMR. Los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión en los que puede tener lugar la matematización: de idear soluciones informales conectadas al contexto a alcanzar cierto nivel de esquematización, y finalmente discernir los principios generales que están atrás de un problema y ser capaz de ver todo el panorama. Es fundamental para esta teoría de niveles de aprendizaje —que Freudenthal dedujo de las observaciones e ideas de los Van Hiele (véase, por ejemplo, Freudenthal 1973, 1991)— el hecho de que la actividad de matematizar en un nivel inferior puede ser objeto de cuestionamiento en un nivel más alto. Esto significa que las actividades organizadoras que se llevaron a cabo inicialmente de modo informal, más tarde, como resultado de la reflexión, se tornan más formales.

Esta teoría de niveles de aprendizaje se refleja también en la 'matematización progresiva' que es considerada la característica más general de la EMR y donde los *modelos* —interpretados en términos generales— son vistos como vehículos para promover y apoyar este progreso (Treffers y Goffree, 1985; Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994a; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995, 2002). Se atribuye a los modelos la función de salvar la brecha entre la comprensión informal conectada con la realidad 'real' e imaginada, por una parte, y la comprensión de los sistemas formales por otra.

Interpretación de los modelos en términos generales

Dentro de la EMR, los modelos son vistos como representaciones de situaciones problema, que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas que son relevantes para la situación, pero que pueden tener diversas manifestaciones. Esto significa que el término "modelo") no se toma de modo muy literal. Materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas e incluso símbolos pueden servir como modelos (véase Treffers y Goffree, 1985; Treffers 1987, 1991; Gravemeijer 1994a). Por ejemplo, una situación paradigmática que puede funcionar como modelo es la resta repetida. Dentro del eje de aprendizaje de la división larga, este procedimiento —suscitado, por ejemplo, por el tránsito de un gran número de aficionados en autobús (véase Gravemeijer 1982; Treffers, 1991)— al mismo tiempo legitima y proporciona acceso al algoritmo formal de la división larga. Como ejemplo de una forma de notación, cabe mencionar**se** el lenguaje de flechas. La forma inicial de describir los cambios en el número de pasajeros de un autobús termina utilizándose para describir todo tipo de cambios numéricos más adelante (véase Van den Brink, 1984).

A fin de ser idóneos para brindar el apoyo deseado a los procesos de aprendizaje, los modelos deben reunir al menos dos características importantes. Por una parte, deben estar arraigados en contextos realistas imaginables y, por otra, deben ser suficientemente flexibles para ser aplicados también en un nivel más avanzado, o más general. Esto implica que un modelo debe apoyar la progresión en la matematización vertical sin obstruir el camino de regreso a las fuentes que dan origen a una estrategia: lo que es similar a la noción Vygotskiana de andamiaje (Vygotsky, 1978). En otras palabras, los estudiantes deben ser siempre capaces de volver a un nivel más bajo. Es este carácter de doble sentido de los modelos lo que los hace tan poderosos. Otro requisito para que los modelos sean viables es que —en armonía con la visión de la EMR de los estudiantes como participantes activos del proceso de enseñanza/aprendizaje— puedan ser reinventados por ellos mismos. Para que esto se cumpla, los modelos deben 'comportarse' de forma natural, evidente por sí misma. Deben ajustarse a las estrategias informales de los estudiantes —como si pudieran ser inventados por ellos— y ser fácilmente adaptables a situaciones nuevas.

Una mirada más cercana al poder de los modelos en relación con el cambio de nivel

Al llegar al punto de por qué los modelos contribuyen a elevar los niveles, el trabajo de Streefland entra en escena. Hace alrededor de 15 años, Streefland (1985a) dilucidó, en un artículo holandés, cómo los modelos pueden desempeñar la función de tender un puente entre el nivel informal y el formal: pasando de un '*modelo de*' a un '*modelo para*'. En pocas palabras, esto significa que al comienzo de un proceso de aprendizaje en particular, un modelo se constituye en relación muy estrecha con la situación problema en cuestión, y que más adelante el modelo, específico del contexto, es generalizado a otras situaciones y llega a ser entonces un modelo que puede ser usado para organizar situaciones problema relacionadas afines y nuevas, y para razonar matemáticamente. En esa segunda etapa, las estrategias que se aplican para resolver un problema ya no guardan relación con esa situación específica, sino que reflejan un punto de vista más general. En el cambio mental de 'postimagen' a 'preimagen', la conciencia de la situación problema y el aumento en el nivel de comprensión se hacen evidentes.[4] El cambio de perspectiva implica tanto discernimiento de la aplicabilidad más amplia del modelo construido, como la reflexión sobre lo que se hizo antes (Streefland, 1985a; véase además 1992, 1993, 1996). Especialmente en los contenidos de fracciones, razón y porcentaje, Streefland enriqueció la didáctica de la educación matemática con modelos que tienen esta cualidad de cambio.

Un primer ejemplo está conectado con su diseño de investigación sobre fracciones en el contexto de una pizzería (Streefland, 1988, 1991). En la trayectoria que este autor diseñó, el proceso de aprendizaje se inicia con el modelo 'concreto' de la 'distribución de asientos'[5] para comparar cantidades de pizza, modelo que es evocado por las tareas diseñadas que se presentan a los estudiantes, y esquematizado más tarde por el 'árbol de distribución de asientos' y la tabla de razones, por medio de los cuales se comparan fracciones formales y se efectúan operaciones con fracciones. En este proceso de esquematización y generalización, nuevamente los roles del diseñador y del docente son muy importantes. Mediante el diseño de una trayectoria en la que problemas nuevos motivan a los estudiantes a llegar a adaptaciones del modelo 'concreto' inicial, y acentuando adaptaciones específicas que los estudiantes idean, se orienta el proceso de desarrollo de modelos.

El modelo de barra que se comentará más adelante en este artículo es un segundo ejemplo. En el desarrollo de la enseñanza de una unidad sobre porcentaje, en la cual este modelo de barra es la columna vertebral del progreso, Leen Streefland y yo trabajamos en estrecha colaboración.

Si bien le debemos el concepto de los cambios en los modelos a Streefland, él no realizó su trabajo aisladamente. Una vez más, no se debe subestimar el papel desempeñado por Freudenthal. La distinción entre los dos significados de 'modelo' ya se planteaba en sus escritos de los años setenta, cuando escribió: "Los modelos *de* algo son postimágenes de un trozo de realidad dada; los modelos *para* algo son preimágenes para un trozo de realidad por crear" (Freudenthal, 1975, pág. 6) .[6] En relación con estas dos funciones de los modelos, Freudenthal distinguió también entre 'modelos descriptivos' y 'modelos normativos' (Freudenthal, 1978). Sin embargo, la diferencia con Streefland es que Freudenthal pensaba en los modelos en un nivel didáctico mucho más general —como modelos para lecciones, planes curriculares, descripciones de objetivos, estrategias de innovación, métodos de interacción y procedimientos de evaluación—, y no en el nivel microdidáctico que Streefland tenía en mente. Al aplicar el pensamiento de Freudenthal dentro de un contexto microdidáctico, Streefland puso al descubierto los mecanismos de suba de nivel de los modelos y el uso didáctico de este poder. Sin lugar a dudas, su idea de 'modelo de' y 'modelo para' resultó una revelación para muchos (véase, por ejemplo, Treffers, 1991;

Gravemeijer, 1994a, 1994b, 1997, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995, 2001; Gravemeijer y Doorman, 1999; Yackel *et al*., 2001, Van Amerom, 2002). Es una idea simple, inmediatamente reconocible y aplicable, en la que se da entrada didáctica a la esencia de los procesos de aprendizaje, que es la mejora en el nivel de conocimiento. Por esta razón se ha seguido esta idea al pensar en la didáctica de la educación matemática, tanto dentro como fuera de la comunidad de la EMR.

En particular, Gravemeijer (1994a, 1994b, 1997, 1999) desarrolló esta idea. Mostró que el cambio en los modelos también puede relacionarse con el proceso de crecimiento matemático de un modo más general. La distinción entre 'modelo de' y 'modelo para' lo llevó a dividir el nivel intermedio, entre el nivel situacional y el nivel formal de resolución de problemas y de comprensión matemática, en un nivel referencial y uno general. Además de esto, Gravemeijer hizo hincapié en la relación entre el uso de modelos y el principio de reinvención de la EMR. En virtud del cambio en el modelo —que establece vínculos entre el nivel formal de la matemática y las estrategias informales— el elemento de arriba-abajo que caracterizaba el uso de modelos dentro de los enfoques estructuralista y cognitivo de la educación matemática pudo transformarse en un proceso de abajo-arriba.

¿Cómo hallar modelos idóneos y actividades que provoquen modelos?

Aunque el proceso de abajo-arriba implica que los modelos son inventados por los estudiantes mismos, se les debe proveer de un ambiente de aprendizaje —el conjunto de problemas, actividades y contextos situados en escenarios y trayectorias, junto con el rol estimulante y enfático del docente— para que esto ocurra. Como ya se señaló, dentro de la EMR se toma la reinvención como una reinvención guiada. Sin embargo, una faceta fundamental de este proceso es que los estudiantes deben sentir que tienen la iniciativa en ellos. El surgimiento de modelos y su evolución ulterior deben darse de un modo natural.

El requisito antes señalado impone una gran responsabilidad sobre el desarrollo de materiales educativos. Los diseñadores educativos deben buscar situaciones problema que sean idóneas para la construcción de modelos y que tengan cabida dentro de un escenario o trayectoria que promueva la evolución ulterior del modelo, a fin de que crezca hasta convertirse en un modelo didáctico que abra el camino hacia niveles más altos de comprensión para los estudiantes. Debe quedar claro que esto impone ciertas exigencias a una situación problema de esta índole. Un requisito fundamental es que la situación problema pueda ser esquematizada fácilmente. Otra exigencia es que, desde el punto de vista de los estudiantes, debe existir la necesidad de construir modelos. Este aspecto demanda que el problema incluya actividades que provoquen modelos como, por ejemplo, planear y ejecutar etapas de soluciones, generar explicaciones, identificar semejanzas y diferencias y hacer predicciones. Aunque estos criterios ya dan una buena indicación de lo que es necesario para conseguir que surja un modelo, lo más importante es que las situaciones problema y las actividades lleven a los estudiantes a identificar estructuras y conceptos matemáticos. Para descubrir cuáles problemas y actividades pueden hacerlo, se necesitan 'análisis didácticos fenomenológicos', como los llamó Freudenthal (1978, 1983). Estos análisis se centran en cómo pueden manifestarse los conocimientos y conceptos matemáticos a los estudiantes y en cómo pueden constituirse. Parte de este análisis se lleva a cabo mediante experimentos mentales y deliberación entre colegas —inclusive debates con docentes—donde tanto el conocimiento sobre los estudiantes como las ideas acerca de los conceptos matemáticos deseados funcionan como una preimagen orientadora. No obstante, la parte más importante del análisis se lleva a cabo mientras se trabaja con estudiantes y se analiza su trabajo. De esta forma es posible hallar lo que es importante para constituir el modelo y, por tanto, lo que se debe 'poner' en la situación problema para promover el surgimiento de soluciones específicas respecto a la situación, que sean posibles de esquematizar y que tendrán una perspectiva vertical.

EL MODELO DE BARRA PARA APRENDER PORCENTAJE COMO UN EJEMPLO

En el resto de este artículo se ilustra el uso didáctico de modelos en la EMR mediante el uso del modelo de barra en una trayectoria longitudinal de enseñanza-aprendizaje sobre porcentaje que fue diseñada para el currículum *Matemáticas en Contexto*. En términos sencillos, este modelo de barra se refiere a una tira sobre la cual se representan escalas diferentes al mismo tiempo, lo que permite expresar un monto o cantidad mediante otro monto o cantidad. Por medio de esto, el modelo de barra toca la esencia de un número racional, como es el porcentaje.

La parte principal de la trayectoria de porcentaje se extiende a lo largo de tres unidades de enseñanza de este currículum:

- *Porcentaje*, (Van den Heuvel-Panhuizen *et al.*, 1997): va dirigida a 5º grado e intenta ser una unidad de partida sobre porcentaje;
- *El diario de fracciones*, (Keizjer *et al*., 1998b): va dirigida al 6º grado y cubre el contenido de número racional de modo más amplio; además, contiene material sobre porcentajes, fracciones, decimales y razones;
- *Más o menos* (Keijzer *et al.*, 1998a): va dirigida al 6º grado y se centra en porcentajes, fracciones y decimales.

Debido a que mi propósito principal en este artículo es ofrecer una visión de la trayectoria longitudinal y las relaciones dentro de ella, me limitaré al aprendizaje del porcentaje. Sin embargo, no se debe concluir que, dentro de *Matemáticas en Contexto*, la enseñanza del porcentaje es considerada un eje) de enseñanza separado. Por el contrario, el aprendizaje del porcentaje está incluido dentro de la totalidad del dominio de los números racionales, y está fuertemente interconectado con el aprendizaje de fracciones, decimales y razones con el modelo de barra que relaciona estos conceptos de número racional (véase Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen y Shew, 1998). Sin embargo, el modelo de barra no es el único modelo de apoyo para este contenido. Aparte de la barra, que más adelante se transforma en una línea numérica doble, la tabla de razones y el diagrama circular también desempeñan un importante papel en la trayectoria sobre porcentaje de *Matemáticas en Contexto* (véase Wijers y Van Galen, 1995; Middleton y Van den Heuvel-Panhuizen, 1995). Para mayor claridad, este artículo evitará describir la complejidad que es típica en este proceso de aprendizaje. Tampoco se prestará atención a cómo se desarrolló la trayectoria sobre porcentaje ni a cómo el modelo de barra encontró su lugar dentro de la trayectoria. Con respecto a la unidad *Porcentaje*, puede encontrarse información sobre este proceso de diseño en Van den Heuvel-Panhuizen y Streefland (1993). La evaluación que fue desarrollada para esta unidad se presenta en Van den Heuvel-Panhuizen (1994, 1996).

El propósito de este artículo es describir cómo surge y evoluciona el modelo de barra, y cómo apoya el aprendizaje de los estudiantes, dentro de una serie de unidades de enseñanza como la diseñada para el currículum *Matemáticas en Contexto*. La descripción se basa en instantáneas tomadas de las versiones preliminares de estas unidades,[7] incluyendo cierto trabajo de los estudiantes que muestra hasta qué grado concuerda el proceso propuesto de construcción de modelos con las formas de trabajar y pensar de los estudiantes. Esto último es importante porque les permite reinventar el modelo por su cuenta, o al menos, participar activamente en el proceso de construir modelos.

Breve reseña de la trayectoria de enseñanza/aprendizaje del porcentaje

En las tres unidades de *Matemáticas en Contexto*, la trayectoria de enseñanza/aprendizaje sobre porcentaje comienza con una forma cualitativa de trabajar, con porcentajes como descriptores de situaciones de tantos-de-tantos, y concluye con una forma más cuantitativa de trabajar con ellos utilizándolos como operadores. Durante este proceso de comprensión creciente del porcentaje, la barra cambia gradualmente, de una representación concreta conectada al contexto, a un modelo de representación más abstracto que, además, funcionará como modelo de estimación, y a un modelo que orienta a los estudiantes en la elección de los cálculos que es preciso realizar. Esto significa que el modelo se convierte entonces en un modelo de cálculo. Al final de la trayectoria, cuando los problemas se tornan más complejos, el modelo puede utilizarse también como modelo de pensamiento para entender situaciones problema. Sin embargo, lo anterior no significa que sea posible distinguir etapas separadas en el uso del modelo de barra, ni que exista un orden estricto en el que se aprenden estas diferentes aplicaciones; no es el caso. De hecho, aunque se establece una especie de secuencia en las unidades de enseñanza, las diferentes interpretaciones del modelo de barra son accesibles en todas las etapas del proceso de aprendizaje. Todo depende de cómo los estudiantes vean y utilicen el modelo.

Otro cambio a la barra tiene que ver con su forma. Junto con el cambio de función, la apariencia del modelo cambia. Eventualmente la barra se reduce a una línea numérica doble. Aunque no hay una gran diferencia entre estos dos modelos —ambos pueden verse como una tira en la que en uno u otro lado se utilizan diferentes unidades de medida—, este cambio tiene la ventaja de que el modelo de barra se hace más simple y, por tanto, más fácil de usar, y de que se torna más flexible. Entre otras cosas, este cambio hace al modelo más apropiado para ir más allá del cien por ciento (100%).

Algunas primeras actividades exploratorias

Teniendo en mente el punto de partida de que la educación debe construirse sobre los conocimientos informales preescolares y extraescolares de los estudiantes, la unidad *Porcentaje* —cuyo objetivo es que los estudiantes tengan el sentido del porcentaje— comienza) con un capítulo introductorio en el que los estudiantes se enfrentan con algunos relatos de la vida diaria donde los porcentajes desempeñan un papel. En Streefland y Van den Heuvel-Panhuizen (1992) puede encontrarse una descripción más extensa de lo que estos relatos pueden revelar sobre el conocimiento informal de los estudiantes sobre porcentajes.

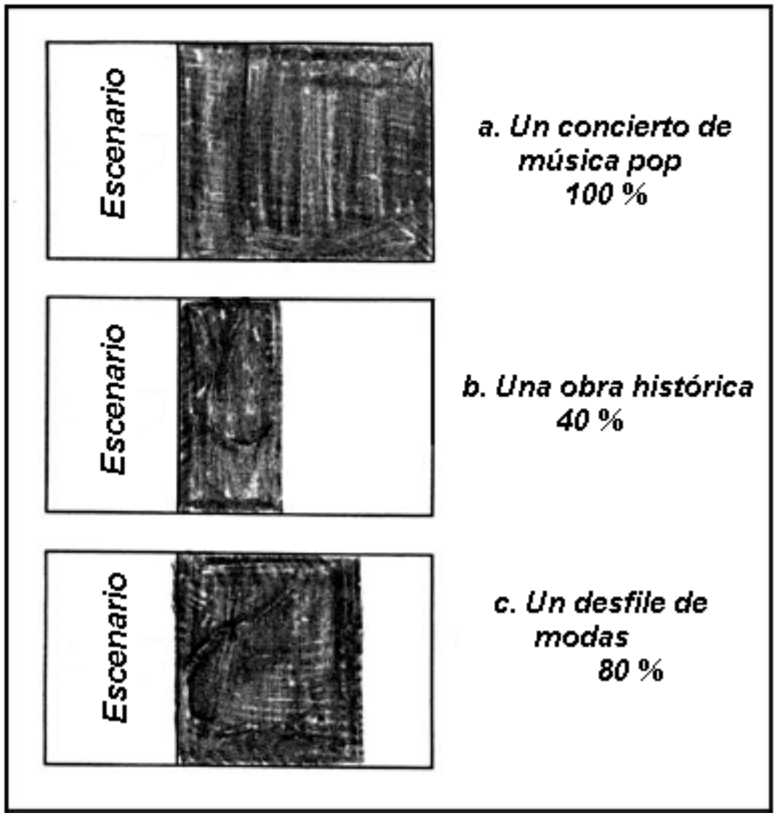

Figura 1. Porcentaje de asientos ocupados en el teatro de la escuela.

Uno de los relatos es acerca de un niño que cuenta a su madre que hay una probabilidad del 95% de que la práctica de futbol siga siendo los miércoles. Además de comentar el significado cualitativo de esto ("95% significa que es casi seguro que ..."), también se pide a los estudiantes que utilicen dibujos para explicar este significado. De esta forma, el primer capítulo incluye algunas actividades exploratorias que preparan la construcción de modelos. Se reserva un papel especial en relación con esto a varias tareas basadas en el teatro de la escuela. Se pide a los estudiantes indicar, con respecto a diferentes espectáculos, qué ocupación tendrá el teatro. Pueden hacer esto coloreando la parte de la sala que está ocupada y luego, escribiendo el porcentaje de asientos ocupados (véase la Figura 1).

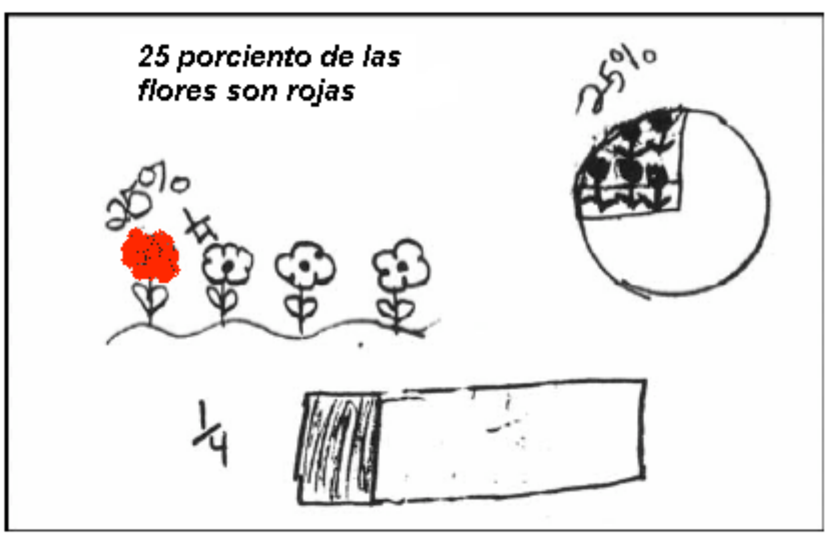

Figura 2. Uso de dibujos para expresar porcentajes.

Fue notable la facilidad con que los niños se pusieron a trabajar en esta tarea. Prácticamente no hubo preguntas. Todo sucedió muy naturalmente, y fue evidente, por la forma de comentar los diferentes espectáculos, que los niños sabían lo que los porcentajes representaban. En el caso de la obra histórica “el teatro estaba lleno menos de la mitad” y “podías elegir fácilmente dónde querías sentarte”.

De igual modo que en la tarea del teatro, en una actividad de resumen al final del primer capítulo, se pide a los estudiantes que utilicen dibujos para expresar lo que se dice en determinadas afirmaciones que incluyen porcentajes. Como se muestra en la Figura 2, los estudiantes propusieron espontáneamente toda clase de modelos, desde dibujos de imágenes hasta diagramas circulares e incluso barras.

Las observaciones durante las pruebas de la unidad de enseñanza mostraron que el dispositivo para provocar el uso de barras con la actividad del teatro escolar funcionaba. Para los estudiantes, esta actividad de colorear salas de teatro se convirtió también en una forma de expresar otros tipos de situaciones de tantos-de-tantos. En otras palabras, aquí se hace un primer cambio de un ‘modelo de’ a un ‘modelo para’. Otra conclusión interesante fue que los estudiantes también usaron espontáneamente fracciones para ‘explicar’ el porcentaje de ocupación. Esto significa que la conciencia de esta conexión entre diferentes números racionales, que en efecto es una de los objetivos finales por alcanzar en el nivel formal general, ya está presente en esencia en el nivel de comprensión informal, conectado al contexto.

El capítulo siguiente de la unidad *Porcentaje* incluye un conjunto de problemas en el contexto del estacionamiento. Se pide a los estudiantes que comparen estacionamientos con respecto a su ocupación. Una vez más, se les pide indicar el grado de ocupación de cada estacionamiento coloreando el marco rectangular que representa el estacionamiento. A continuación, puede determinarse cuál estacionamiento es el que está más completo. (véase la Figura 3).

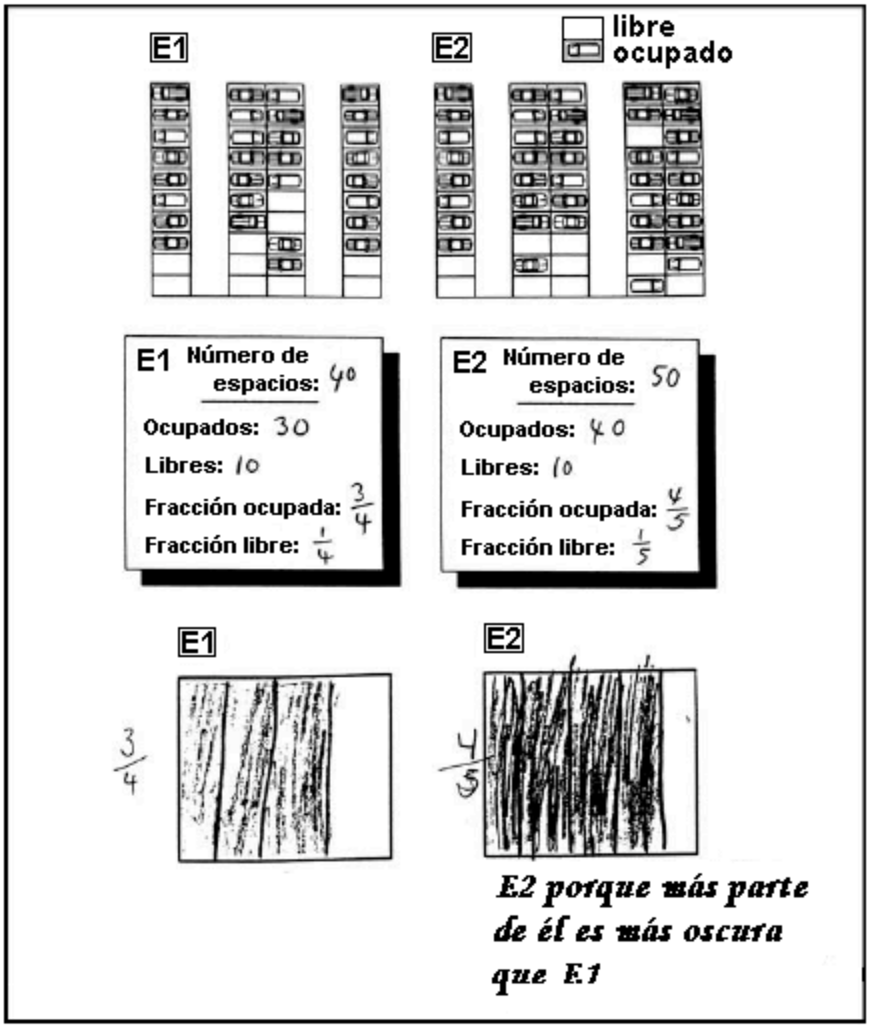

Figura 3. Comparación de la ocupación de estacionamientos.

Surgimiento del modelo de barra

La etapa que sigue es la sustitución del marco rectangular que representa el estacionamiento 'real' por un 'medidor de ocupación'. Este medidor se asemeja, por ejemplo, a un dispositivo para comprobar la cantidad de polvo en una aspiradora o a un indicador de carga para baterías. Como estos, el medidor de ocupación ofrece a los estudiantes una forma de representar la ocupación del estacionamiento. También en este caso los estudiantes pueden colorear la parte ocupada (véase la Figura 4).

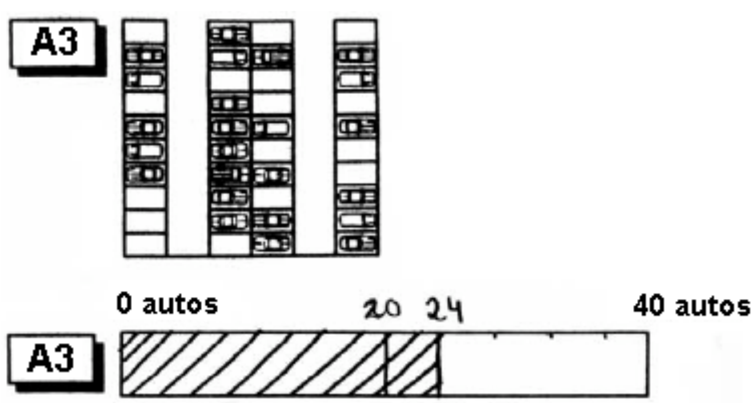

Figura 4. El ‘medidor de ocupación’ muestra la ocupación del estacionamiento.

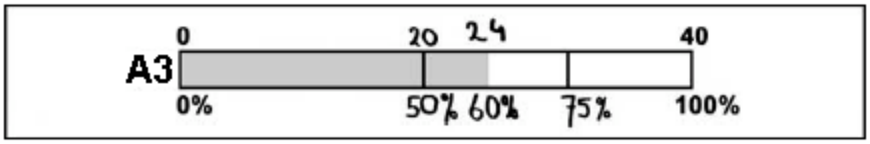

Figura 5. El ‘medidor de ocupación’ indica el porcentaje de ocupación del estacionamiento.

Por otra parte, después de hacer esto, el ‘medidor de ocupación’ representa visualmente para los estudiantes el porcentaje de espacios ocupados. Si el medidor está completamente coloreado, significa que el estacionamiento está completo al 100%. Si están ocupados 24 espacios de 40, el estacionamiento está completo, digamos como una primera respuesta preliminar, en poco más del 50%. Pero después de indicar 75% como el punto medio entre 50% y 100%, y utilizándolo como referencia, 60% podría surgir como ‘una buena conjetura’ (véase la Figura 5).

Según los números reales que se empleen en estos problemas de estacionamiento, se puede utilizar el medidor de ocupación de diversas formas para hallar el porcentaje de ocupación (véase la Figura 6). Si están ocupados 60 espacios de 80 (a), los estudiantes pueden hacer uso de una fracción fácil. En el caso de 50 espacios de 85 (b), se puede aproximar el porcentaje de ocupación mediante una estrategia basada en dividir a la mitad varias veces. Por último, cuando los números son 36 de 40 (c), los estudiantes pueden hacer uso de un porcentaje conocido: 10% de 40 es 4, por lo tanto ... (véase la Figura 6).

En otras palabras, no hay una estrategia fija para resolver estos problemas de porcentaje, y el medidor de ocupación permite esta flexibilidad en el abordaje. Este tipo de enfoque tiene otra gran ventaja, junto a la ventaja didáctica de ser capaz de conectar flexiblemente las diferencias en el conocimiento de los estudiantes con respecto a los números, los puntos de referencia y las relaciones numéricas que los estudiantes tienen a mano. El uso de este abordaje hace posible que el objetivo en el nivel más alto —hacer un uso práctico y flexible de redes de números y propiedades de relaciones y operaciones— ya sea logrado en el nivel más bajo.

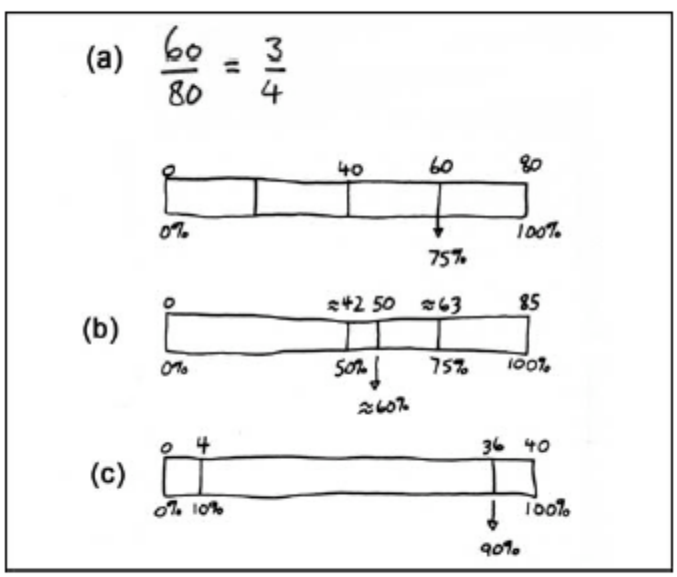

Figura 6. Formas de utilizar el 'medidor de ocupación' para hallar el porcentaje de ocupación.

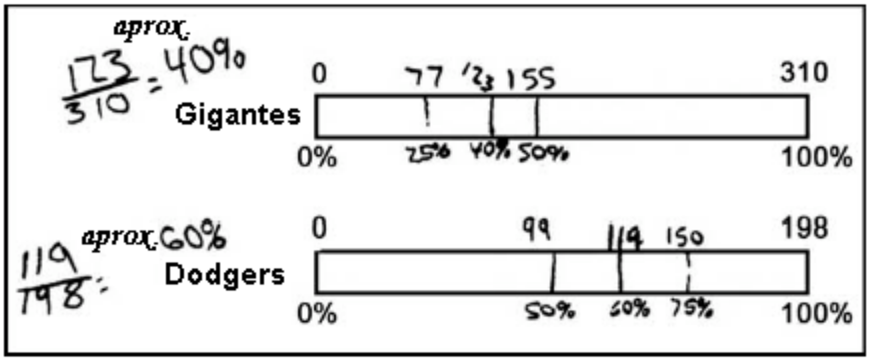

Figura 7. Uso de la barra como modelo de estimación.

La barra como un modelo de estimación

Más adelante, en el capítulo tres de la unidad *Porcentaje*, el 'medidor de ocupación' se transforma gradualmente en un modelo de barra simple. En otras palabras, una vez más se hace un cambio de un 'modelo de' a un 'modelo para'; es decir, desde la perspectiva de la enseñanza: el cambio real, por supuesto, se efectúa en el pensamiento de los estudiantes. El cambio significa que el modelo ya no está más conectado exclusivamente al contexto del estacionamiento, sino que ayuda a los estudiantes, por ejemplo, a comparar la preferencia de los aficionados por determinados recuerdos de béisbol. Por otra parte, el cambio brinda acceso a un nivel más alto de comprensión, en el que se utiliza la barra para razonar acerca de situaciones de tantos-de-tantos. Especialmente en casos en los que los problemas se refieren a números que no pueden convertirse simplemente en una fracción o porcentaje fácil, la barra proporciona un buen soporte para estimar un porcentaje aproximado. En la Figura 7 se muestra un ejemplo de esto. El problema se refiere a dos grupos de aficionados, los de los Gigantes y los de los Dodgers, quienes han sido entrevistados respecto a su recuerdo favorito de béisbol. Se entrevistaron 310 aficionados de los Gigantes, y 123 de ellos eligieron la gorra como su recuerdo favorito. En el caso de los aficionados de los Dodgers, 119 de 198 aficionados eligieron la gorra. Se pregunta a los estudiantes: ¿a cuáles aficionados les gusta más la gorra?

Figura 8. Introducción del 1% como un porcentaje de referencia.

A fin de ofrecer a los estudiantes una estrategia más precisa, más adelante en este capítulo se dirige también su atención al porcentaje de referencia del 1%. Esto se hace de modo más o menos informal mediante un titular en el diario, referido a una muy baja asistencia de aficionados de los Tigers (véase la Figura 8).

La barra como un modelo de cálculo

Este porcentaje de referencia del 1% se introduce para allanar el camino al cálculo de porcentajes, pero el enfoque elegido en esta trayectoria es bastante diferente de la forma habitual de hacer un cálculo preciso usando el 1%: se utiliza para calcular porcentajes de modo aproximado. No se debe confundir con el cálculo preciso mediante una calculadora, el cual viene más tarde. En contraste con esto, aquí el uso del 1% como porcentaje de referencia sigue siendo una forma de estimar. La diferencia con la forma de estimación que se trató en el párrafo anterior es que ahora la barra misma no se utiliza para operar sobre ella, sino que se emplea sólo para guiar a los estudiantes en el cálculo del porcentaje. La barra les dice, de forma comprensible, qué cálculo han de llevar a cabo para hallar la respuesta (véase la Figura 9).

Año del maratón	Número total de competidores	Número de abandonos	Porciento de abandonos	Describe tu estrategia
1991	1,603	91	≈5%	≈16 1,603 1% 16)91 5 -80 11

Figura 9. Uso de la barra como modelo de cálculo con el 1% como porcentaje de referencia.

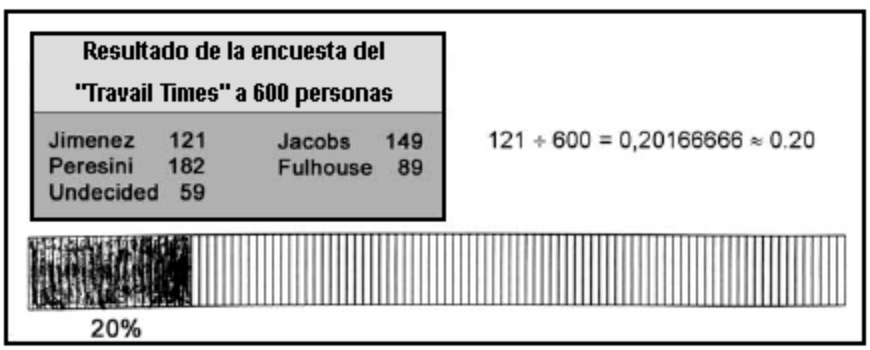

Figura 10. Situación de tantos-de-tantos convertida en (un) porcentaje mediante un decimal.

No obstante, la barra también es pertinente para lo inverso, porque también ayuda a comprender los resultados de los cálculos, lo que puede ser importante para entender la relación entre porcentajes y números decimales. Esto es particularmente importante cuando se trabaja con porcentajes como operadores.

Un primer paso hacia esta próxima etapa en el aprendizaje del porcentaje se da en la unidad del grado 6 *El diario de fracciones*,[8] donde los estudiantes aprenden a convertir situaciones de tantos-de-tantos 'directamente' en un porcentaje. En vez de dividir la parte por el 1% del número total, ahora se divide la parte directamente por el número total. Esta última estrategia da evidentemente un resultado diferente del primero, pero no afecta la razón entre la parte y el todo, como los estudiantes lo han experimentado en su trabajo con la tabla de razones, que tiene un rol muy central en esta unidad de enseñanza. Como resultado del trabajo con la tabla de razones, los estudiantes aprenden gradualmente a interpretar la razón de forma flexible, pueden trabajar hacia una situación de tantos-de-cien y descubrir que también pueden sustituir esta situación de tantos-de-cien por una situación de tantos-de-mil, tantos-de-diez o tanto-de-uno. Las experiencias de este tipo, a su vez, ayudan a interpretar la respuesta decimal de la división, donde se divide la parte directamente por el número total, como una respuesta que es sinónimo de una expresión de tantos de diez, cien, mil, etcétera, y que se puede representar sobre una barra. Según el grado de exactitud que se necesite, cualquier barra es apropiada para esto, pero en el caso de expresar la razón como un porcentaje, la barra de 100 segmentos es la más idónea, como se hace, por ejemplo, en el problema sobre los resultados de una elección (véase la Figura 10).

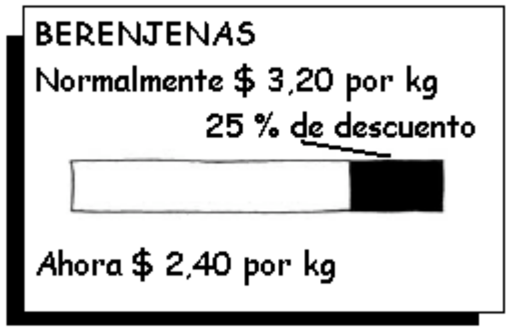

Figura 11. Comprobar el precio de venta mediante una multiplicación.

El porcentaje de votos que Jiménez obtuvo en la elección se halla dividiendo su número de votos por el número total de encuestados. El decimal que aparece en la pantalla de la calculadora indica cuántos segmentos de los cien, tienen que ser coloreados. Al mismo tiempo, es todavía posible hacer una estimación: 121 de 600 es aproximadamente un quinto del total, o alrededor de 20%.

Más adelante en el grado 6, en la unidad *Más o menos*, se plantea**n** a los estudiantes situaciones de cambio. Ellos) aprenden entonces a expresar —tanto de forma aditiva (+25% **ó**– 25%) como multiplicativa (× 1.25 **ó** × 0.75)— situaciones nuevas como un porcentaje de las antiguas. Esta parte de la trayectoria comienza con una situación de reducción de precio**s**. El ejemplo que se muestra en la Figura 11 trata de un supermercado que introdujo nuevas etiquetas de precio. Se pide a los estudiantes que verifiquen el precio de venta haciendo una sola multiplicación en su calculadora.

Después de esta breve introducción relacionada con precios, se exploran más a fondo los porcentajes como operadores en el capítulo final de la unidad *Más o menos*. El capítulo comienza con el contexto de una fotocopiadora capaz de reducir y ampliar. La opción máxima de reducción de la copiadora es de 80%. Entre otras cosas, se plantea a los estudiantes una situación en la que una reducción de 80% no es suficiente, y se necesitan varias reducciones de 80%. En relación con el cálculo del efecto de una doble reducción en las dimensiones de una imagen, se utiliza una tira elástica[9] para hacer una estimación del resultado de la doble reducción (véase la Figura 12).

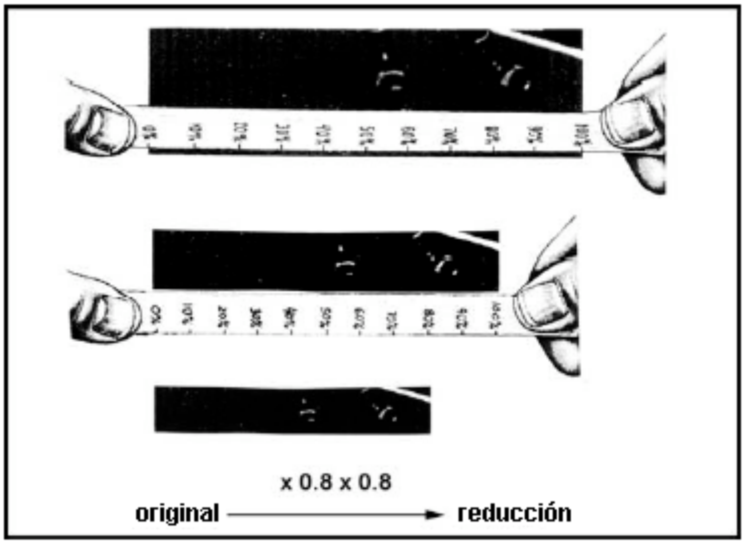

Figura 12. Uso de una tira elástica para hallar el resultado de una doble reducción de 80%.

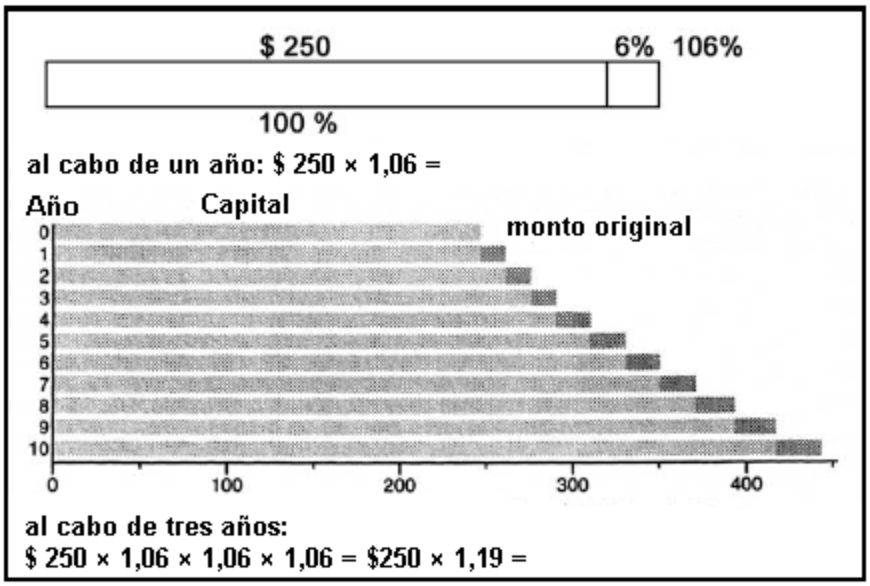

Figura 13. Gráfico) de barras que muestra cómo aumenta el dinero en una cuenta de ahorros con interés.

Más adelante, se tratan aumentos exponenciales —aunque no se hace referencia a ellos como tales ante los estudiantes— en el contexto de una cuenta de ahorros con interés. También en este caso la barra permite visualizar cómo funciona y qué cálculo debe uno hacer para hallar la cantidad total de dinero al cabo de un año, dos años, tres años, etcétera (véase la Figura 13).

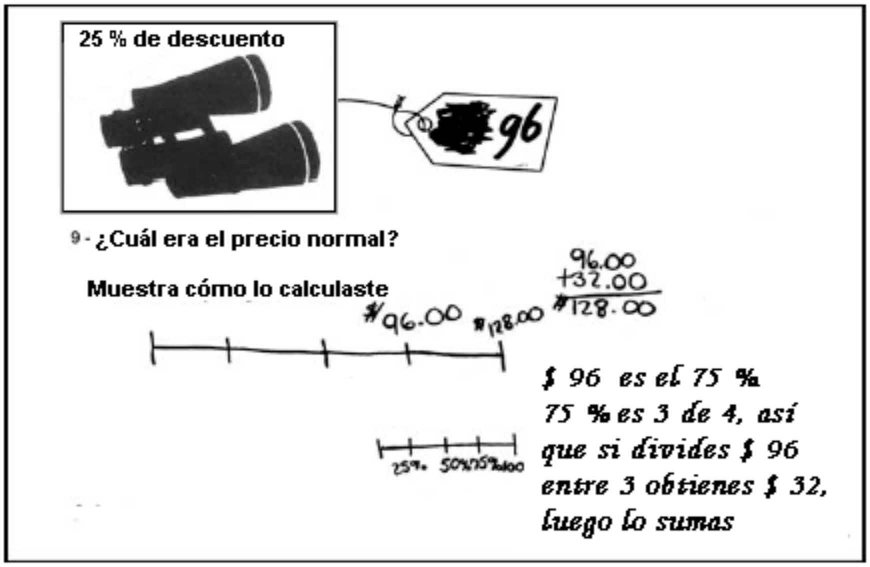

Figura 14. La línea numérica doble como soporte para el razonamiento inverso.

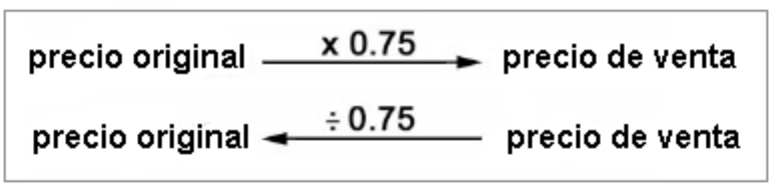

Figura 15. Hallar el precio original como la inversa de hallar el precio de venta.

La barra como un modelo de pensamiento

Como se muestra en el ejemplo anterior, la barra también puede ser útil para entender situaciones complejas. Lo mismo se aplica a situaciones que demandan un razonamiento inverso, como en el caso del problema siguiente. Aquí se da el precio de venta y el porcentaje de descuento, y los estudiantes deben averiguar el precio original (véase la Figura 14).

En el trabajo de (un) estudiante que se muestra en la Figura 14, en vez de la barra se utiliza una simple línea numérica doble para apoyar el razonamiento inverso. Esto confirma de cierto modo el cambio natural de una versión del modelo a otra. Algo crucial respecto a ambas versiones es que ayudan a los estudiantes a entender que el precio de venta es igual al 75% del precio original, y que deben dividir el precio de venta entre 3 y luego multiplicarlo por 4.

Sin embargo, en un nivel más elevado, se puede hallar el precio original mediante una división en un solo paso, dividiendo el precio de venta por tres cuartos o por setenta y cinco centésimos, que es lo opuesto de hallar el precio de venta cuando se ha dado el precio original y el porcentaje de descuento (véase la Figura 15).

De hecho, esta última solución es un ejemplo de matematización vertical. Se basa en un atajo dentro del sistema matemático.

PARA CONCLUIR: UNA REFLEXIÓN SOBRE EL USO DIDÁCTICO DE MODELOS

Las instantáneas precedentes de una trayectoria de enseñanza-aprendizaje sobre porcentaje ilustran cómo dentro de la EMR se utilizan modelos como herramientas didácticas para enseñar matemática. La perspectiva didáctica adoptada en este artículo supone que el foco de atención no estuvo aquí en la modelización como un objetivo de la educación matemática, si bien es, por supuesto, una característica importante de la EMR que, al mismo tiempo, caracteriza el pensamiento reciente sobre la educación matemática. Un buen ejemplo de esto último es el trabajo de Lesh y Doerr (2000). La modelización, en su interpretación, se relaciona con el proceso de desarrollo de modelos, a través del cual los estudiantes adquieren gradualmente una mejor comprensión de una situación problema rica y significativa, describiéndola y analizándola con medios cada vez más avanzados, y pasando por una serie de ciclos de modelización desarrollan finalmente un modelo eficaz con el cual pueden abordar también otras situaciones complejas similares. En este artículo, no obstante, la atención no se centra en cómo enseñar a los estudiantes a resolver problemas construyendo modelos por matematización progresiva, sino en cómo enseñar conceptos matemáticos como número racional y, especialmente, la comprensión del porcentaje. Aunque ambos procesos de aprendizaje son necesarios, tienen mucho en común y se apoyan mutuamente, trabajar sobre la actitud de construcción de modelos de los estudiantes no será suficiente para enseñarles porcentaje.

Este artículo se focaliza más bien en cómo pueden los estudiantes aprender porcentaje y en cómo los modelos pueden usarse didácticamente para llevar a cabo este proceso de aprendizaje.

En términos más precisos, no son los modelos en sí los que hacen posible el crecimiento de la comprensión matemática, sino las actividades de modelización de los estudiantes. Dentro de la EMR, no se entregan a los estudiantes modelos ya hechos que plasman determinados conceptos matemáticos, sino que se les plantean problemas en contexto, presentados de modo tal que susciten actividades de modelización, las que a su vez dan lugar al surgimiento de modelos. Por otra parte, la perspectiva longitudinal de la trayectoria de porcentaje demuestra claramente que el modelo que surge en este caso, el modelo de barra, se desarrolla más y más a lo largo de la trayectoria. Las actividades iniciales de modelización, ejecutadas sobre problemas en contexto vinculados con la realidad de los estudiantes, consiguen que lleguen a realidades nuevas, las que a su vez, vuelven a ser objeto de nuevas actividades de modelización. Este cambio da como resultado que el modelo de barra manifieste su función de distintas formas en puntos diferentes de la trayectoria: de una imagen de una situación de tantos-de-tantos a un medidor de ocupación y a una línea numérica doble. De hecho, las actividades de modelización no producen un modelo único, sino una cadena de modelos. Evocadas por una serie de problemas presentados en un ambiente de aprendizaje que estimula la reflexión y la interacción en el aula, siguen apareciendo nuevas manifestaciones del modelo que dan acceso a nuevas perspectivas, nuevas posibilidades de resolución de problemas y niveles más altos de comprensión, pero al mismo tiempo abarcan manifestaciones previas del modelo. Todo esto implica que el modelo ofrece a los estudiantes oportunidades de progreso, sin obstruir el camino de vuelta a las fuentes en las que se cimienta la comprensión. Lo anterior significa también que el modelo de barra funciona en diferentes niveles de comprensión, y que puede seguir el ritmo del proceso de aprendizaje de largo plazo por el que los estudiantes tienen que pasar. Es esta cualidad de perdurabilidad en particular lo que hace tan poderoso al modelo de barra. Su carácter flexible y general expone las diversas apariencias de los números racionales y sus relaciones mutuas; en consecuencia, los estudiantes dominarán mejor el concepto subyacente de número racional, lo que a su vez se combina con la aplicación del modelo en un nivel cada vez más alto: de representar una situación de parte-todo, a estimar y calcular localmente, y al razonamiento matemático basado en comprensiones logradas en cuanto a relaciones de números racionales.

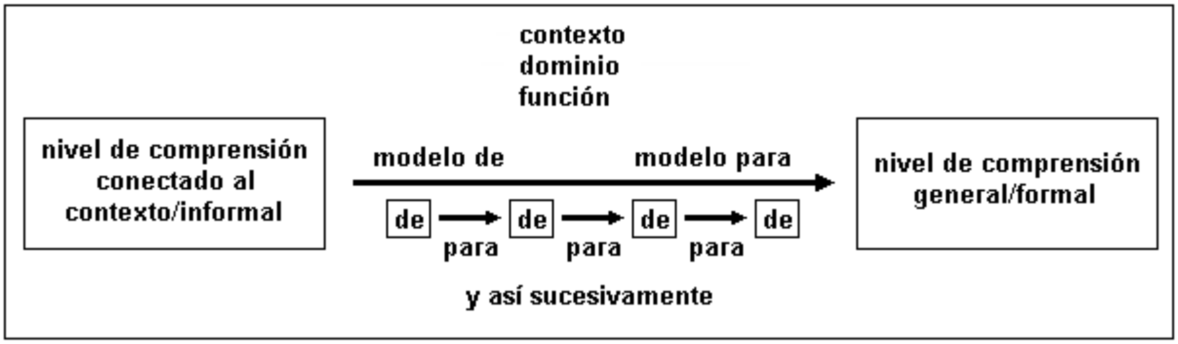

Figura 16. Niveles de comprensión y cambios de ‘modelo de’ a ‘modelo para’.

Así como no se trata de *un* modelo de barra, sino de una cadena de modelos que, juntos, forman el modelo conceptual que incorpora los aspectos importantes del concepto de número racional, tampoco es solo un cambio de modelo de a modelo para. De hecho, hay *una serie de continuos cambios locales*, lo cual implica que un modelo, que en un nivel conectado al contexto simbolizaba una solución informal, al final se transforma en un modelo para soluciones formales en un nivel más general (Figura 16).

Un cambio local de este tipo ocurre, por ejemplo, cuando los estudiantes se dan cuenta de que la forma de simbolizar la ocupación del teatro sirve también para expresar que el 25% de las flores son rojas. Este cambio de *contexto* suele ser el primer paso que confiere al modelo un carácter más general. Otro cambio local tiene que ver con un cambio de *sub*dominios, el cual abre la relación entre diferentes subdominios. Esta transición exige que los estudiantes comprendan que una misma barra se puede utilizar para porcentajes y también para fracciones. Aunque la relación entre estos números racionales basados en fracciones y porcentajes familiares muy conocidos es un importante pilar del programa, este cambio se produce sólo cuando los niños comienzan a utilizarla conscientemente. Ocurre otro cambio local más cuando los diferentes modos en que puede funcionar el modelo se relacionan unos con otros,- y los estudiantes pueden usarlo: lo que al principio era sólo para representar más tarde se utiliza para estimar un porcentaje, o para calcular a la inversa el precio original a partir del nuevo precio rebajado. A la larga, este cambio de *función* conduce a que los estudiantes sean capaces de hacer un uso flexible del modelo y de manipularlo. En ese punto los estudiantes han alcanzado, en efecto, el nivel general y formal de comprensión.

Aunque puede encontrarse cierto grado de ordenamiento en los diversos tipos de cambios locales —los cambios de contexto, por ejemplo, suelen ocurrir primero—,no deben ser vistos como estrictamente secuenciales. Dentro del proceso de aprendizaje los diferentes cambios locales están estrechamente vinculados. En conjunto, forman los bloques que sirven de base para alcanzar el nivel más alto de comprensión.

Al repasar las etapas de la trayectoria que se muestran en este artículo, parece que hemos hallado una buena estrategia para enseñar porcentaje a los estudiantes. Esto se confirmó en las lecciones de ensayo, a través de la experiencia de que las perspectivas de los diseñadores, los docentes y los estudiantes parecieron coincidir la mayor parte del tiempo). Los docentes pudieron identificarse sin dificultad con la trayectoria propuesta. Fue reconocible para ellos antes de que la hubiesen implementado por su cuenta. Esta capacidad inherente para convencer ya es reveladora en sí. Aún más importante, sin embargo, es la experiencia de que los estudiantes llegaron a soluciones que se asemejaban a las pronosticadas en la trayectoria. Esta experiencia proporcionó verdaderamente la sensación de ser capaces de lograr lo que Streefland (1985b, pág. 285) llamó: prever dónde y cómo puede uno anticipar lo que apenas comienza a ser visible a la distancia.

Sin embargo, estas experiencias no deben llevar a la conclusión de que esta trayectoria basada en el modelo de barra es la respuesta última a la pregunta de cuál es la mejor forma de que los estudiantes aprendan el porcentaje. Es sólo una respuesta. La trayectoria representada en este artículo, por consiguiente, no debe ser vista como una receta fija, ni como un embudo en el cual los estudiantes tienen muy pocas opciones de escape para buscar otra forma de alcanzar ciertas comprensiones, sino como un *modelo para* enseñar y aprender porcentaje en el que el uso didáctico de modelos desempeña un papel fundamental.

NOTAS

1. Este artículo es una versión adaptada de Van den Heuvel-Panhuizen (1995).

2. IOWO son las siglas del *Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs* (Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática).

3. El CRMSE es el antecesor del Centro Nacional para el Mejoramiento del Aprendizaje y Logro de los Estudiantes en Matemáticas y Ciencias (NCISLA, por sus siglas en inglés) de la Universidad de Wisconsin-Madison.

4. Streefland (1985a, pág. 63) lo planteó en holandés como sigue: “In de mentale omslag van nabeeld tot voorbeeld worden bewustwording en niveauverhoging in het leerproces manifest” .

5. La ‘distribución de asientos’ (o ‘distribución de mesas’) se refiere a cómo se sientan los niños en la pizzería. La distribución de asientos indica cuánta pizza hay en la mesa y cuántos niños están sentados a esa mesa.

6. Ésta es la traducción al español de: “*Modellen van* iets zijn *nabeelden* van een stuk gegeven werkelijkheid; *modellen voor* iets zijn *voorbeelden* voor een te scheppen stuk werkelijkheid.”

7. La versión preliminar de *Porcentaje* fue elaborada por Marja van den Heuvel-Panhuizen y Leen Streefland. Esto tuvo lugar de 1991 a 1993. La versión preliminar de *El* d*iario de fracciones* fue elaborada por Keijzer, Van Galen y Gravemeijer. *Más o menos* fue diseñada en versión preliminar por Keijzer, Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers.

8. La versión preliminar de esta unidad se llamó *Travail Times*.

9. Esta tira elástica fue idea de Abels (1991).

REFERENCIAS

Abels, M.: 1991, ‘Procenten in W12-16’, *Nieuwe Wiskrant* 10(3), 20–25.

De Lange, J.: 1987, *Mathematics, Insight and Meaning*, OW&OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos.

Freudenthal, H.: 1968, ‘Why to teach mathematics so as to be useful?’, *Educational Studies in Mathematics* 1, 3–8.

Freudenthal, H.: 1971, ‘Geometry between the devil and the deep sea’, *Educational Studies in Mathematics* 3, 413–435.

Freudenthal, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Riedel Publishing Company, Dordrecht, Países Bajos.

Freudenthal, H.: 1975, ‘Voorwoord’, en R. de Jong, A. Treffers y E. Wijdeveld (eds.), *Overzicht van Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Leerplanpublikatie* 2, IOWO, Utrecht, Países Bajos.

Freudenthal, H.: 1977, ‘Antwoord door Prof. Dr H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat’ [Respuesta del Prof. Dr H. Freudenthal al serle otorgado un doctorado honorario], *Euclides* 52, 336–338.

Freudenthal, H.: 1978, *Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Países Bajos.

Freudenthal, H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Riedel Publishing Company, Dordrecht, Países Bajos.

Freudenthal, H.: 1987, 'Mathematics starting and staying in reality', en I. Wirszup y R. Street (eds.), *Proceedings of the USCMP Conference on Mathematics Education on Development in School Mathematics around the World*, NCTM, Reston, VA.

Freudenthal, H.: 1991, *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Países Bajos.

Gravemeijer, K.: 1982, 'Het gebruik van contexten', *Willem Bartjens* 1(4), 192–197.

Gravemeijer, K. P. E.: 1994a, *Developing Realistic Mathematics Education*, CD-ß Press / Instituto Freudenthal, Utrecht, Países Bajos.

Gravemeijer, K. P. E.: 1994b, 'Educational development and developmental research in mathematics education', *Journal for Research in Mathematics Education* 25(5), 443–471.

Gravemeijer, K. P. E.: 1997, 'Mediating between concrete and abstract', en T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, Lawrence Erlbaum, Hove, Sussex, Reino Unido, págs. 315–343.

Gravemeijer, K: 1999, 'How emergent models may foster the constitution of formal mathematics', *Mathematical Thinking and Learning* 1(2), 155–177.

Gravemeijer, K. y Doorman, D.: 1999, 'Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example', *Educational Studies in Mathematics* 39, 111–129.

Keijzer, R., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Wijers, M., Shew, J., Brinker, L.J., Pligge, M. A., Shafer, M. C. y Brendefur, J.: 1998a: 'More or Less', en T. A. Romberg (ed.), *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade* 5–8, Encyclopaedia Britannica Educational Corporation, Chicago, IL.

Keijzer, R., Van Galen, F., Gravemeijer, K., Shew, A., Cole, B. R. y Brendefur, J.: 1998b, 'Fraction Times', en T. A. Romberg (ed.), *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade 5–8*, Encyclopaedia Britannica Educational Corporation, Chicago, IL.

Lesh, R. y Doerr, H. M.: 2000, 'Symbolizing, communication and mathematizing: Key components of models and modeling', en P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, págs. 361–383.

National Council of Teachers of Mathematics: 1989, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston VA.

Middleton, J. A., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Shew, J. A.: 1998, 'Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number', *Mathematics Teaching in the Middle School* 3(4), 302–311.

Middleton, J. A. y Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1995, 'The ratio table', *Mathematics Teaching in the Middle School* 1(4), 282–288.

Romberg, T. A. (ed.): 1997–1998, *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade* 5–8, Encyclopaedia Britannica Educational Corporation, Chicago, IL.

Streefland, L.: 1985a, 'Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron', *Nieuwe Wiskrant* 5(1), 60–67.

Streefland, L.: 1985b, 'Vorgreifendes Lernen zum Steuern Langfristiger Lernprozesse', en W. Dörfler y R. Fischer (eds.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik.*

Beiträge zum 4. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik in Klagenfurt in 1984, Hölder-Pichler-Tempsky, Viena, Austria, págs. 271–285.

Streefland, L.: 1988, 'Reconstructive learning', en *Proceedings of the XII PME Conference*, Veszprein, Hungría, Vol. I, págs. 75–91.

Streefland, L.: 1991, *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

Streefland, L.: 1992, 'Het ontwerpen van een wiskundeleergang', *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs* 10(4), 3–14.

Streefland, L. y Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1992, 'Evoking pupils' informal knowledge on percents', *Proceedings of the Sixteenth PME Conference*, University of New Hampshire, Durham, NH, Vol. III, págs. 51–57.

Streefland, L.: 1993, 'The design of a mathematics course. A theoretical reflection', *Educational Studies in Mathematics* 25(1–2), 109–135.

Streefland, L.: 1996, Learning from History for Teaching in the Future, Utrecht, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Países Bajos. (Conferencia normal pronunciada en la ICME-8 en Sevilla, España)

Treffers, A. y Goffree, F.: 1985, 'Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program', en L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology ofMathematics Education*, OW&OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos, Vol. II, págs. 97–121.

Treffers, A.: 1978, *Wiskobas Doelgericht*, IOWO, Utrecht, Países Bajos.

Treffers, A.: 1987, *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Países Bajos.

Treffers, A.: 1991, 'Didactical background of a mathematics programm for primary education', en L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, CD-ß Press / Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos, págs. 21–56.

Van Amerom, B.: 2002, *Reinvention Early Algebra. Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra*, CD-ß Press / Instituto Freudenthal, Utrecht, Países Bajos.

Van den Brink, J.: 1973, 'Bijna noemen', *Wiskobasbulletin* 3, 129–131.

Van den Brink, J.: 1984, 'Numbers in contextual frameworks', *Educational Studies in Mathematics* 15, 239–257.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Streefland, L.: 1993, 'Per Sense – Een onderwijspakketje over procenten', en M. Dolk y W. Uittenbogaard (eds.), *Procenten – Op de grens van basisschool en basisvorming*, Panamá / HMN & Freudenthal Instituut, Utrecht, Países Bajos, págs. 25–48.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1994, 'Improvement of (didactical) assessment by improvement of the problems: An attempt with respect to percentage', *Educational Studies in Mathematics* 27(4), 341–372.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1995, 'A representational model in a long tEMR learning process – the didactical use of models in Realistic Mathematics Education', trabajo presentado en la conferencia AERA, San Francisco, CA.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1996, *Assessment and Realistic Mathematics Education*, CD-ß Press, Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Streefland, L.,Meyer, M., Middleton, J. A. y Browne, J.: 1997, 'Per Sense', en T. A. Romberg (ed.), *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade* 5–8, Encyclopaedia Britannica Educational Corporation, Chicago, IL.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 2001, ‘Realistic Mathematics Education in the Netherlands’, en J. Anghileri (ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative Approaches for the Primary Classroom*, Open University Press, Buckingham, Reino Unido, págs. 49–63.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 2002, ‘Realistic Mathematics Education as work in progress’, en F.L. Lin (ed.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwán, Universidad Normal Nacional de Taiwán, Taipei, Taiwán, págs. 1–42.

Vygotsky, L.S.: 1978, *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Wijdeveld, E.: 1980, ‘Zich realiseren’, en IOWO, *De Achterkant van de Möbiusband*, IOWO, Utrecht, Países Bajos, págs. 23–26.

Wijers, M. y Van Galen, F.: 1995, ‘Breuken, procenten en kommagetallen in het Middle School Project’, en C. van den Boer y M. Dolk (eds.), *Rekenen in de Bovenbouw van de Basisschool*, Panamá / HvU & Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos, págs. 65–74.

Yackel, E., Underwood, D., Stephan, M. y Rasmussen, Ch.: 2001, ‘Didactising: Continuing the work of Leen Streefland’, en M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos, Vol. 1, págs 239–249 y 251–253.

Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht,

Aïdadreef 12, 3561 GE Utrecht, Países Bajos,

Teléfono +31 (0)302635548, Fax +31 (0)302660430,

Correo electrónico: m.vandenheuvel@fi.uu.nl