UN PAQUETE DE PROBLEMAS DE DIVISIBILIDAD

AUTORAS: PATRICIA CUELLO Y ADRIANA RABINO

1. Múltiplo de 7

A una persona cuya edad oscila entre 9 y 100 años se le pide que escriba su edad 3 veces consecutivas, de tal manera de formar un número de 6 dígitos (por ejemplo: 484848). Demostrar que este número es divisible por 7.

2. ¿Es cierto?

Si divido a 74 por 3 su resto es 2, porque 7+4 es 11 y 1+ 1 es 2 ¿es cierto esto? ¿Vale para todos los números naturales?

3. Múltiplo de 6

Alex tiene *n* cubos pequeños de igual tamaño. Con ellos él trata de construir el cubo más grande posible. Pero descubre que le falta exactamente una fila de cubos pequeños que hubieran formado una arista del cubo grande. Demostrar que *n* es divisible por 6.

4. Paridad. Múltiplo de 8.

El cuadrado de cualquier número impar es 1 más que cualquier múltiplo de 8 (Ejemplos: $5^2 = 1 + 8x3$; $9^2 = 1 + 8x10$). ¿Es cierto?

5. Múltiplo de 5. Congruencia módulo

a) ¿Es posible saber, sin hacer la cuenta, si los resultados de cada uno de los siguientes cálculos son múltiplos de 5? Justificar.

5 x 1748317 + 2
5 x 1748318 + 30
5 x 1748319 + 32
5 x 1748320 + 132

b) ¿Cuál es el resto de dividir cada uno de los números anteriores por 10? (No haga la cuenta)
c) ¿Es verdad que si se divide por 10 un múltiplo de 5, se obtiene como resto 0 ó 5?

6. Desafío
Analiza los siguientes criterios "no tradicionales" y justifica si son o no válidos:

a) Dado un número de tres cifras, si la suma de las cifras de sus centenas y decenas multiplicada por 4 y sumada a las unidades da por resultado número divisible por 6, ese número es divisible por 6
b) Dado un número de tres cifras, si el doble de la cifra de las centenas, más el triple de las cifra de las decenas, más la cifra de las unidades, es múltiplo de 7, ese número es divisible por 7.
c) Si la suma de las cifras de un número es divisible por 4, ese número es divisible por 4.
d) Dado un número de tres cifras, si la suma del cuádruplo de la cifra de las centenas, más el doble de la cifra de las decenas, más la cifra de las unidades, es múltiplo de 8, el número es divisible por 8.

POSIBLES SOLUCIONES

1. Si la edad de la persona está entre 9 y 99 años, el número que la representa tiene dos cifras.
Sea AB ese número, si lo reiteramos tres veces el número obtenido es ABABAB.

Haciendo la descomposición en potencias de 10 del mismo se tiene que:
ABABAB = A.100000 + B.10000 + A.1000 +B.100 +A.10 + B.1
= A(100000+1000+10) + B.(10000+100+1)
= A.101010 + B.10101 donde 101010 y 10101 son múltiplos de 7 (verificarlo) .

Como el producto de múltiplos de 7 es múltiplo de 7 y la suma de múltiplos de 7 también lo es, resulta que el número ABABAB es múltiplo de 7.

2. No es cierto, basta probar por ejemplo con 59 dividido 3. Da como resto 2, sin embargo 5+9 = 14, 1+4 = 5. (Usamos un contraejemplo)

3. Llamemos *a* a la arista del cubo incompleto. Descomponiendo este cuerpo en dos partes y calculando la cantidad de cubitos de ambas partes tenemos:

$(a – 1) \times a \times a + (a – 1) \times a \times 1 = n$
O sea $a^3 – a^2 + a^2 – a = a^3 – a = n$
Factorizando: $a \times (a^2 – 1) = a \times (a + 1) \times (a – 1)$

Este último producto corresponde a la multiplicación de 3 números consecutivos.
El producto de 3 números consecutivos es múltiplo de 6 dado que, por un lado, es múltiplo de 2 (por lo menos uno de los tres números es par, por lo tanto al multiplicar por otro/s el

resultado es par). Por otro lado es múltiplo de 3 ya que en tres números consecutivos, uno de ellos debe ser múltiplo de 3. En consecuencia este producto es múltiplo de 6.

Se puede hacer esta demostración por el Método de Inducción completa, que se utiliza para demostrar propiedades de los números naturales. Este principio indica que si una propiedad se cumple para unl primer elemento, y después se puede verificar que si se cumple para cualquiera también se cumple para el siguiente, entonces queda demostrado que se cumple para cualquier número natural.

Se puede ilustrar esta demostración con el "efecto dominó": Si colocamos piezas de dominó paradas una detrás de otra y hacemos caer el primer dominó de (la) una serie, y nos aseguramos que si se cae una ficha cualquiera ésta hace voltear la siguiente, esto nos asegura que todos caerán.

Volviendo a nuestro problema, la propiedad para el 1° elemento (suponiendo empezar desde n = 1) sería:

$P(1) : a^3 - a = 1^3 - 1 = 0$ se cumple ya que 0 es múltiplo de cualquier número, en particular el 6.

Supongo que si se cumple para cualquier valor *h,* se cumplirá para el siguiente *h + 1,* 0 sea:
$P(h) \Rightarrow P(h + 1)$
Partimos entonces de que P(h) es verdadero, o sea que $h^3 - h$ es múltiplo de 6.
Tengo que demostrar que la propiedad para h + 1 también lo es.
$P(h + 1) = (h + 1)^3 - (h + 1) = h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - h - 1 = h^3 + 3h^2 + 2h$
Se sustituye por conveniencia 2h por 3h – h y asociando llegamos a:
$P(h + 1) = h^3 - h + 3h^2 + 3h = h^3 - h + 3(h^2 + h) = h^3 - h + 3(h + 1)h$

Los dos primeros términos son múltiplos de 6 porque así se había supuesto desde un principio (lo que se denomina hipótesis inductiva), y el último término también lo es porque por un lado es múltiplo de 3 (evidente) y por otro lado, también es múltiplo de dos porque los dos últimos factores son números consecutivos, en consecuencia uno de los dos es par.
Conclusión, toda la expresión es múltiplo de 6.

4. Sí, es cierto. Expresando esta proposición en forma simbólica se tiene:

	$(2k + 1)^2 = 1 + 8x$
Desarrollando el cuadrado:	$4k^2 + 4k + 1 = 1 + 8x$
Cancelando	$4k^2 + 4k = 8x$
Sacando factor común	$4(k^2 + k) = 8x$
	$k^2 + k = 2x$
	$k(k + 1) = 2x$

Llegamos a la conclusión que esta igualdad es cierta **ya que el producto de dos números consecutivos siempre es un número par, pues uno de ellos seguro que es par.**

5. a) Sí es posible. El primer término de cada expresión es múltiplo de 5, sólo resta comprobar que el segundo término lo sea (comprobar con el criterio de divisibilidad). Si es así, la suma lo será.

b) En 5 x 1748318 + 30 el resto es 0, dado que al ser un número par el factor del primer término, ese término es múltiplo de 10, como así también lo es el 30, por lo tanto la suma también lo es.
En 5 x 1748320 + 132 el resto es 2, análogamente al razonamiento anterior.
En 5 x 1748317 + 2 el resto es 7, pues el primer término es múltiplo de 5 pero no de 10, por lo tanto el resto es 5 + 2.
En 5 x 1748319 + 32 el resto es 7, 5 del primer término y 2 del segundo.
Sí. Los múltiplos de 5 terminan en 0 o en 5. Si terminan en 0 también son múltiplos de 10 (resto 0) y si terminan en 5 el resto es 5.

6.
a) Sea ABC el número dado.
Si (A + B) . 4 + C es múltiplo de 6 queremos demostrar que ABC es múltiplo de 6.
Si (A + B) . 4 + C es múltiplo de 6, C debe ser par porque el primer término es par, por lo tanto ABC también es par.
Resta demostrar que ABC es múltiplo de 3.
(A+B) . 4 + C = es 6k
(A+B) . 3 + (A+B) + C = 6k (descomponiendo el primer término en forma conveniente)
(A + B) . 3 + A + B + C = 6k
=> A + B + C = 6k – 3. (A+B) = 3. [2k – (A + B)] que es múltiplo de 3 => ABC es múltiplo de 3.
Por lo tanto ABC es múltiplo de 6.
Presentamos otra demostración que, si bien no es tan general, se puede acercar más al desarrollo que puede llegar a hacer un alumno, esto es analizando cada caso de paridad.

Los valores posibles de C son: 0, 2, 4, 6, 8.
<u>Si C = 0 ó 6</u> entonces
(A+B) . 4 + C = 6k
(A+B) . 4 = 6k
=>(A+B) = 3/2 k
=> k debe ser par para A+B sea una expresión entera. Si k es par entonces (A+B) =
3. k´ (con ´k entero), por lo tanto A+B+C es múltiplo de 3 dado que C es 0 ó 6. Esto significa que ABC es múltiplo de 3.
<u>Si C = 2</u>

- ⇨ (A+B) .4 + C = 6k
- ⇨ (A+B) = 3/2 k – ½

  K debe ser impar para que A+B sea entero
  => A+B = 3/2(2k´ + 1) – ½ = 3k´ + 3/2 – ½ = 3k´+ 1.
  Por lo tanto A+B+C = 3k´ + 3 que es múltiplo de 3. Esto quiere decir que ABC es múltiplo de 3.

<u>Si C = 4</u>

- ⇨ (A+B) . 4 + C = 6k
- ⇨ (A+B) = 3/2 k – 1

  K debe ser par para que A+B sea entero
  => A+B = 3/2(2k´) – 1 = 3k´ – 1.
  Por lo tanto A+B+C = 3k´ -1 + 4 = 3k ´ + 3 que es múltiplo de 3. Esto quiere decir que ABC es múltiplo de 3.

<u>Si C = 8</u>

- ⇨ (A+B) . 4 + C = 6k

- ⇨ $(A+B) = 3/2\ k – 1$
  K debe ser par para que A+B sea entero
  => $A+B = 3/2(2k´) – 2 = 3k´ – 2$
  Por lo tanto $A+B+C = 3k´ -2 + 8 = 3k´ + 6$ que es múltiplo de 3. Esto quiere decir que ABC es múltiplo de 3.

b) Un número es múltiplo de 7 si el número formado por sus cifras sin tener en cuenta la unidad menos 2 veces la unidad es cero o múltiplo de 7. Si el número en cuestión es ABC debe cumplirse que AB – 2C = es múltiplo, o sea 10A + B – 2C es múltiplo de 7.

Se sabe que $2A + 3B + C = 7k$
Multiplicando ambos miembros por 5:
$10 A + 15B + 5C = 7k´$
Restando 14B en ambos miembros:
$10A + B + 5C = 7k´ - 14B$
Restando 7C a ambos miembros:
$10A + B -2C = 7k´ -14B – 7C$, => AB – 2C es múltiplo de 7, por lo tanto ABC es múltiplo de 7.

c) No es válido. Contraejemplo: el 22, 2+2=4 sin embargo el 22 no es múltiplo de 4.

d) Sea el número ABC
Si 4A + 2B + C es múltiplo de 8 entonces ABC es múltiplo de 8.
Para que un número sea múltiplo de 8 debe ser par y múltiplo de 4 (o sea que sus dos últimas cifras sean ceros o múltiplo de 4).
C es par porque los dos primeros términos de la expresión lo son y la suma también.
Entonces C es par, con lo cual ABC es par.

*Hay que demostrar que ABC es múltiplo de 4. Para ello AB debe ser múltiplo de 4, es decir que 10B + C debe ser múltiplo de 4.
Pero sabemos que 4A + 2B + C es múltiplo de 8, con lo cual también lo es de 4:
$4A + 2B + C = 4k$
Sumando 8 B y restando 4A a ambos miembros resulta:
$10B + C = BC = 4k + 8B – 4A$ que es múltiplo de 4, por lo tanto ABC es múltiplo de 4.

*Otra demostración analizando los distintos valores de C.
Si C es par entonces C = 0, 2, 4, 6 u 8.
Queda demostrar que ABC es múltiplo de 4.
<u>Si C = 0 o 4</u>
4A + 2B + C es múltiplo de 8
- ⇨ $4A + 2B = 8k – C$
- ⇨ 2B es múltiplo de 4
- ⇨ B es par y C = 0
- ⇨ $BC = 2x . 10 + 0 = 20x = 4.5x =$ múltiplo de 4, por lo tanto ABC es múltiplo de 4.
  Si C = 4 => $BC = 2x . 10 + 4 = 4 . (5x + 1)=$ múltiplo de 4, por lo tanto ABC también lo es.

<u>S i C = 2 ó 6</u>
4A + 2B + C es múltiplo de 8
- ⇨ $4A + 2B = 8k – 2$

- ⇨ $2A + B = 4k – 1$
- ⇨ $B = 4k – 2ª – 1 = 2 . (2k – A) - 1$
- ⇨ B es impar y $C = 2$
- ⇨ $BC = (2x + 1) . 10 + 2 = 20x + 10 + 2 = 4.(5x + 6)$ = múltiplo de 4, por lo tanto ABC es múltiplo de 4.

Si $C = 6$ la demostración es análoga.

Si C = 8

$4A + 2B + C$ es múltiplo de 8

- ⇨ $4A + 2B = 8k – 8$
- ⇨ 2B es múltiplo de 4
- ⇨ B es par y $C = 8$
- ⇨ $BC = 2x . 10 + 8 = 20x + 8 = 4. (5x + 2)$ = múltiplo de 4, por lo tanto ABC es múltiplo de 4.

¡A trabajar con nuestros alumnos!!! Siempre la Teoría de números despierta curiosidad y sorpresa.