PONGAMONOS DE ACUERDO: ¿CUATRO O SEIS?
CONTENIDOS: RELACIÓN ÁREA-VOLUMEN
AUTORA: ADRIANA RABINO

Un envase de cartón de jugo, vino, leche larga vida, yogurt,… tiene seis caras, ¿por qué lo llamamos tetrabrick?

A. Si desarmamos uno de estos envases, por ejemplo el de leche, veremos que se puede obtener un cilindro de aproximadamente 10 cm de diámetro y 23 cm de altura, construido a partir de un rectángulo de material. Al cerrar este envase en forma de cilindro, el mismo tendrá una altura de 13 cm, sin embargo su volumen supera los 1000 cm^3 o 1 litro que es lo que figura como información en las caras del paralelepípedo original.

- ¿Puedes explicar por qué cambia el volumen?
- Si en vez de armar un cilindro con el mismo material, se arman otra vez paralelepípedos, pero con distintas bases rectangulares, seguirán conteniendo 1 litro? ¿Habrá alguno que contenga más que otros?

B. Hemos visto que a partir de un cilindro la industria del envase obtiene un **hexaedro,** pero más llamativo aún es que a partir de un cilindro se obtenga un **tetraedro**.

- A partir de un hexaedro (caja de leche), construye un cilindro y a partir del mismo un tetraedro.
- ¿Qué volumen estimas que tiene tu tetraedro? ¿Puede contener 1 litro?

C. Recordarán los memoriosos (o recurran a los papás o abuelos) que uno de los primeros envases de lácteos eran tetraedros regulares (uno de los cinco cuerpos platónicos). Por ejemplo, el de la leche Las Tres Niñas (que era riquísima y carísima!) de un litro o la chocolatada de la misma marca que contenía medio litro. Se llamaban TetraPak y fueron desarrollados en la década de 1950 por una empresa sueca del mismo nombre.
En la Argentina los conocíamos como "cartones". Fueron muy populares durante los años sesenta.

- ¿Cuál es el diámetro y la altura del cilindro necesario para formar un tetraedro de 1000 cm^3 de volumen?
- ¿Y si queremos que el tetraedro sea regular?
- ¿Cuál es la relación entre el largo y el ancho de un rectángulo (o el diámetro y el alto del cilindro formado) para que el tetraedro sea regular?

- Tenemos un cilindro correspondiente a un envase de 1 litro cuyo envase posea base cuadrada, cortamos el cilindro a una altura tal que con una de las partes podamos armar un tetraedro regular, ¿Cuál es la altura que permite el armado?
- ¿Se ahorrará materia prima con respecto al envase actual de líquidos (hexaedro)? ¿Con cuál de estos envases se aprovecha más el material?
- ¿Se desaprovecha más espacio al envasar en cajas cilindros (frascos) o envases tetraédricos? (considerando el mismo volumen).

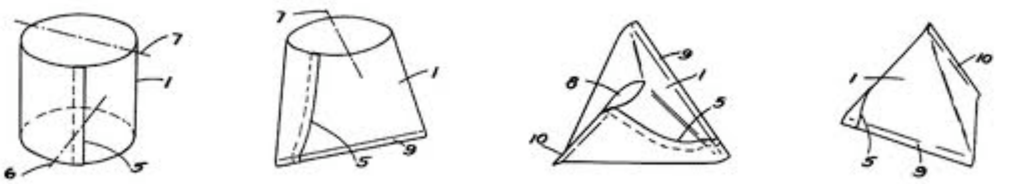
El tetraedro se dejó de fabricar pues aumentan mucho los costos por las dificultades para estibarlos y transportarlos. Es imposible querer ponerlos en cajas unos contra otros, siempre quedan huecos entre ellos. Pero a nuestro criterio una de las razones que más se impusieron para descartar este envase del mercado es su dificultad de asirlo con la mano, y el problema de que se rebalsaba al servir el contenido, dado que no se podía hacerle otro agujero para que saliera el aire. Resultado: ¡un enchastre!
De esta ingeniosa idea lo único que perdura es el nombre, por ello a un envase de seis caras lo llamamos tetra como si tuviera cuatro.

SOLUCIONES
A.

- El volumen no permanece constante (a pesar de que el área, o sea la cantidad de material utilizado, sea la misma), dado que área y volumen son dos magnitudes diferentes (e independientes). Por lo tanto si hacemos variar una de ellas en un cuerpo, la otra puede aumentar, disminuir o permanecer igual.
- La capacidad es una magnitud equivalente al volumen, por lo tanto se comporta de igual manera. Si mantenemos el área constante (usando el mismo material) el volumen puede variar según la forma del cuerpo. Dentro de los paralelepípedos, el cubo es el que contiene mayor volumen o capacidad. A medida que se van "irregularizando" las caras, va disminuyendo el volumen. Por lo tanto el paralelepípedo que tiene dos bases cuadradas tendrá más volumen que aquel que tiene las bases rectangulares (o sea los tres pares de caras opuestas con forma de rectángulo no cuadrado).

B.

- La construcción de tetraedros es sencilla: a partir de un rectángulo, se forma un cilindro uniendo dos lados opuestos, luego se "achatan" las dos bases del cilindro en forma perpendicular, marcando las aristas queda formado un tetraedro.



- El volumen del tetraedro es V = (superficie de la base x altura) / 3 = $188{,}4 cm^2 x 14{,}8 cm : 3 = 929{,}44 cm^3$ aproximadamente.

El procedimiento utilizado puede ser experimental, tomando las medidas del tetraedro creado para poder aplicar la fórmula, PERO también se puede hacer en forma analítica:

- la base del triángulo base es la longitud de la semicircunferencia (respecto a la base del cilindro)
- la altura del triángulo base es la altura del cilindro
- para hallar la altura del tetraedro, el camino más directo es aplicar la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo imaginario que se obtiene al seccionar el tetraedro (ver problema 3.b de Oscar Bressan y su solución). La altura de ese triángulo coincide con la altura del tetraedro. Se sugiere seguir esta explicación con el material concreto.

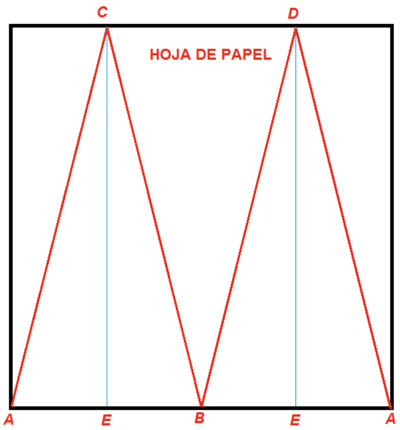
C.

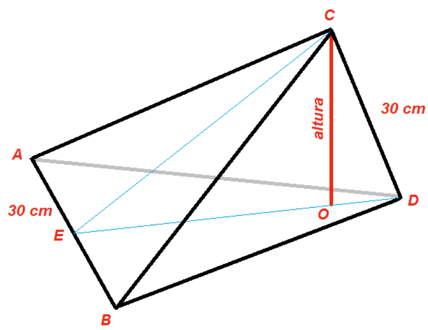
Para resolver estos problemas se sugiere comenzar utilizando método experimental y luego el analítico.

- Utilizando la fórmula del volumen de tetraedro queremos que:
  Sup.base x altura : 3 = $1000 cm^3$
  o sea Sup. Base x altura = $3000cm^3$; fijamos una altura del tetraedro arbitraria, por ejemplo 15 cm entonces

  $$\text{Sup. Base} = 200\ cm^2 \rightarrow b \times \text{altura (triángulo)}:2 = 200cm^2$$

  Por lo tanto buscando las dimensiones de un triángulo (base del tetraedro) de tal manera que el producto de su base por su altura dé como resultado $200\ cm^2$ (recordar la condición que deben tener la longitud de los lados de un triángulo para que éste pueda construirse) y una altura de tetraedro de 15 cm, obtendremos un volumen de $1000\ cm^3$.
  Así, supongamos que el triángulo base tiene como dimensiones 20 cm de base y 20 cm de altura, el cilindro tiene que tener un diámetro de 12,73 cm y una altura de 20 cm. Este dibujo que le "robé" a Oscar puede ayudar a visualizar la situación:





En el dibujo y respecto al ejemplo propuesto, AB =20 cm, EC = 20 cm, por lo tanto la longitud de la circunferencia de la base del cilindro es 40 cm y de ahí se deduce su diámetro.

- Para que el tetraedro sea regular y tenga una capacidad de 1 litro, el cilindro debe provenir de un rectángulo de aproximadamente 40 cm x 18 cm, por lo tanto el cilindro tendrá una altura de 18 cm y un diámetro de 12,73 cm.

- La relación entre el alto y largo del rectángulo que formará un cilindro que a su vez formará un tetraedro es aproximadamente b/h= 40/18 o equivalentes.
- Corroborar la relación anterior.
- El **tetraedro regular** que contiene 1 litro tiene un área aproximada de 692,82 cm^2. Suponiendo un **hexaedro** de dimensiones 6cm x 9cm x 16,5cm (cartón de leche), se tendría un área de 603 cm^2. Si le hacemos una base cuadrada de 7,5 cm x 7,5 cm aprox. (jugos o algunas leches) y altura 17,77cm, su área se optimiza reduciéndose a 589,35 cm^2.
- Compara utilizando envases de 1 litro con forma de cilindro y con forma de tetraedro, poniendo la misma cantidad de envases en dos cajas con las mismas dimensiones (una con cilindros y otra con tetraedros), colocando los mismos de la manera más óptima. Luego sacar la diferencia entre el volumen de la caja y los volúmenes de los envases.

Con tantas desventajas ¿cómo puede ser que alguna vez estos envases en forma de tetraedro hayan sido populares? Porque eran muy fáciles de construir.

Colaboraron en la discusión de este problema Claudia Zuliani, Fernanda Gallego y Ana Bressan

Noticia

NOTICIAS

..

Campaña de reciclado de tetrabricks

En Aluminé

En la localidad neuquina se lanzó el segundo año del programa de reciclado de envases tipo

En la localidad neuquina se lanzó el segundo año del programa de reciclado de envases tipo cajita, que esta vez serán convertidos en contenedores para basura

Una vez vacíos, los envases tipo tetrabrick ocupan mucho lugar en la basura, aumentando en gran medida el volumen de los residuos domiciliarios. Entonces, y como ya había hecho el año pasado, el Municipio decidió volver a implementar un programa de trasformación y reutilización.

Esta vez, se fabricarán contenedores para los cestos de basura instalados en la vía pública y los turistas y habitantes de Aluminé podrán llevar sus cajitas tetrabrick a las oficinas de la Dirección de Gestión Ambiental o llamar al Municipio para que los retire a domicilio.

“Desde la Dirección estamos trabajando con algunas chicas que conformaban el grupo Reciclarte, y con ellas empezó el trabajo. El año pasado hicimos una campaña similar, y convertimos los tetras en planchas aislantes para techos y paredes en algunos mejoramientos”, recordó el Director de Gestión Ambiental, Carlos Suazo.

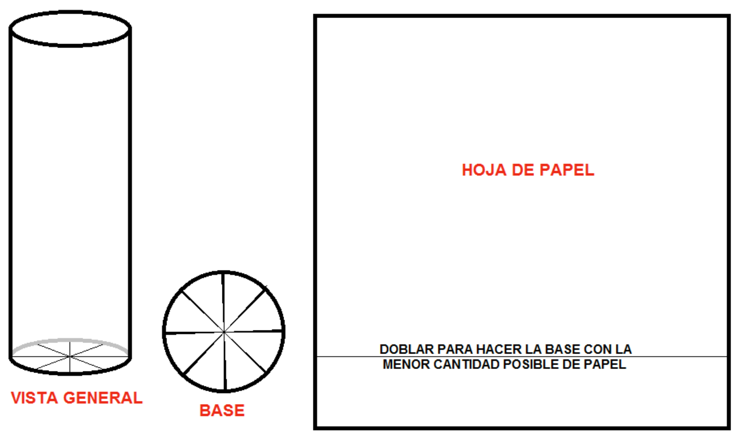
“La metodología de trabajo es la siguiente: abrimos el tetrabrick, cortamos las partes en las que está soldada la caja, y luego de plegarla la pegamos usando una plancha como fuente de calor. Se necesitan unas 50 cajas para armar el contenedor de un cesto”, explicó el funcionario. “Además, al usar esto en vez de bolsas disminuimos la cantidad de basura que se tira y por lo tanto el impacto ambiental, por eso pedimos la colaboración de la comunidad para recolectar la mayor cantidad posible de tetrabricks.”

Diario de Neuquén del 14 de junio de 2011

CONSTRUCCIONES CON UNA HOJA DE PAPEL (Sugerido por Claudia)

AUTOR: OSCAR BRESSAN

1) Se tienen hojas cuadradas de papel de 60 cm de lado. Con una de esas hojas se hace primero un vaso cilíndrico (con base pero sin tapa), tratando que su volumen sea lo mayor posible. Para ello el papel se enrolla formando el cilindro y pegando borde con borde, sin superponer, de modo que el perímetro de la base del cilindro sea igual a 60 cm. La base se hace doblando el papel y cuidando que el papel alcance a llegar justo hasta el centro. Para que el papel cubra la base sin que se superponga en el centro de la misma, se debe doblar a una distancia **igual al radio** del cilindro. O sea que el radio del cilindro más la altura del cilindro suman 60cm.

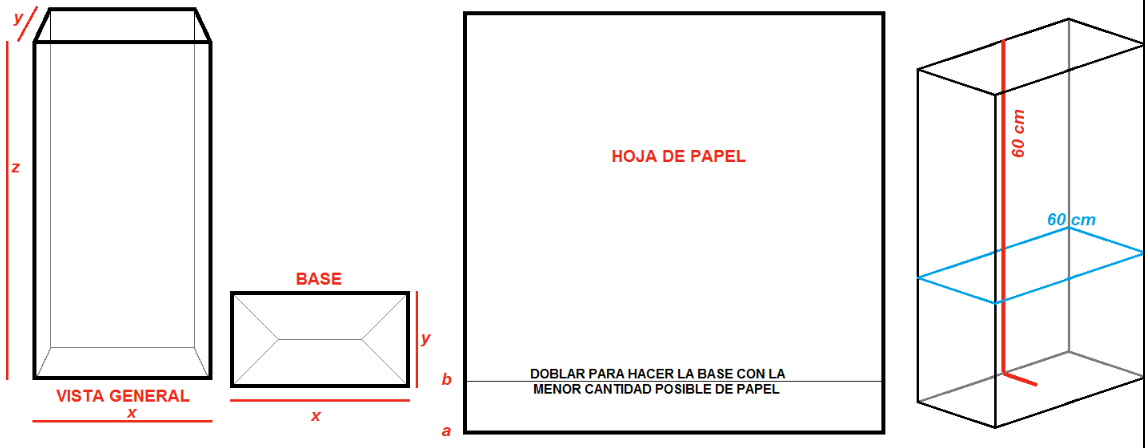


1-a) ¿Cuál es la altura que va a tener ese vaso?

1-b) ¿Cuál es el volumen que va a tener ese vaso?

1-c) ¿Cómo debería ser la relación entre el ancho y el largo de una hoja rectangular de papel para que el vaso tuviera una altura igual que el diámetro de su base?

2) Con otra de esas hojas de 60 x 60 cm se hace un paralelepípedo rectangular con base pero sin tapa.



Seguimos suponiendo que se pega borde con borde con una cinta engomada, sin superponer, para que la base del paralelepípedo tenga un perímetro de 60 cm. La base se hace doblando el papel hacia adentro y al cerrarlo tratando de superponer lo menos posible, para rematarlo en el centro pegando con cinta engomada y doblando hacia adentro las dos aletas triangulares que quedan.

La suma de la menor distancia desde el centro de la base al perímetro de la misma y la altura del paralelepípedo también es de 60 cm.

Sea x el largo del paralelepípedo, y el ancho y z la altura. El valor de x puede variar, y si varía x debe variar y y también z .

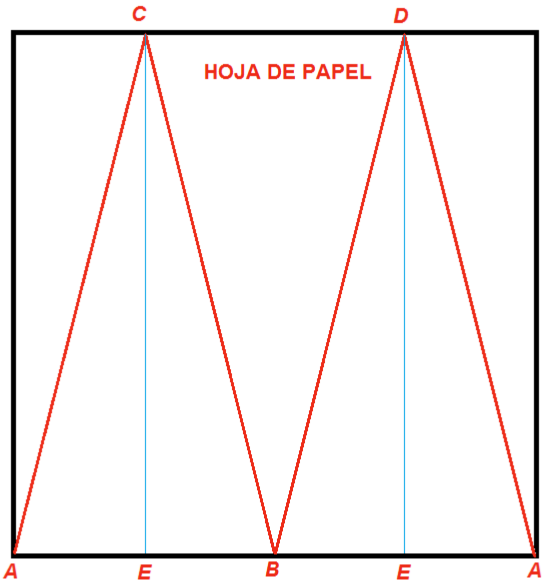
2-a) ¿Qué relación existe entre x , y y el ancho del papel?

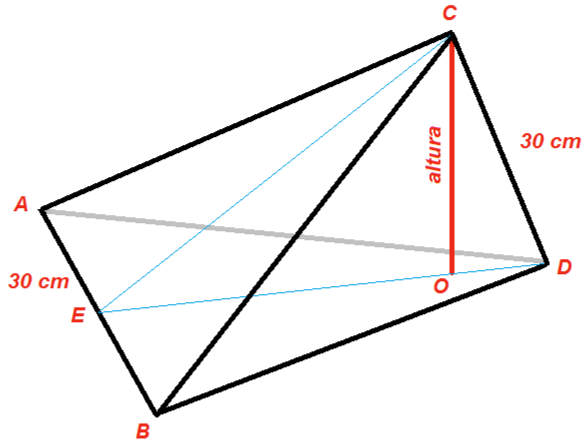
2-b) ¿Qué relación existe entre x , z y el ancho del papel cuando $x < y$? ¿Y cuando $x > y$?

2-c) ¿Cómo varía el volumen del paralelepípedo al variar x? Graficar.

2-d) ¿Cómo debería ser la relación entre el ancho y el largo de una hoja de papel rectangular para que el paralelepípedo sea un cubo?

3) Con una tercera de esas hojas se hacen los pliegues marcados en rojo en la figura que sigue, doblándolos todos para el mismo lado y formando un tetraedro.





3-a) ¿Cuánto miden las aristas mayores del tetraedro?

3-b) ¿Cuál es el volumen del tetraedro?

3-c) ¿Cómo debería ser la relación entre el ancho y el largo de una hoja de papel rectangular de papel para construir un tetraedro regular?

SOLUCIONES

1-a) La altura del vaso va a ser el ancho (o largo, es indistinto) de la hoja (60 cm) menos el radio del cilindro. Dado que el perímetro (circunferencia) de la base es 60 cm, entonces el radio es (aproximando a dos decimales):

Longitud de la circunferencia = 2.π.radio = 60 cm., entonces:

$$\text{radio} = \frac{60\text{cm}}{2\times\pi} = 9{,}55\,\text{cm}$$

y la altura:

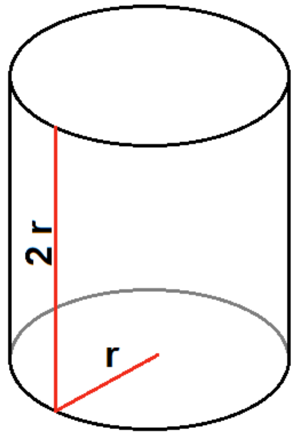
altura = 60 cm - 9,55 cm = 50,45 cm

1-b) El volumen del vaso es (aproximando a dos decimales):

$$\text{volumen} = \pi\times\text{radio}^2\times\text{altura} = \pi\times 9{,}55^2\,cm^2\times 50{,}45\,cm = 14454{,}99\ \text{cm}^3$$

1-c) Pedimos que el diámetro del cilindro sea igual a la altura. Para ello la hoja de papel tiene que tener una altura de tres veces el radio: una vez el radio por la base y dos veces el radio por la altura (ver figura). El ancho de la hoja debe ser la circunferencia de la base, o sea dos veces π por el radio, de modo que:

$$\frac{\text{alto del papel}}{\text{ancho del papel}} = \frac{3 \times r}{2 \times \pi \times r} = \frac{3}{2 \times \pi}$$



Entonces 3/ (2×π) es la relación entre el alto y el ancho del papel.

2-a) El perímetro de la sección transversal (que coincide con la base del paralelogramo) es:

perímetro base del paralelogramo = 2 . x + 2 . y

entonces se cumple que:

$$2\,x + 2\,y = 60 \text{ cm}$$

o sea: $y = 30 - x$

2-b) Cuando $x < y$ la distancia entre a (extremo inferior de la hoja) y b (donde se dobla la hoja para hacer la base) es $x/2$. Entonces:

$$z = 60 \text{ cm} - x/2$$

Cuando $x > y$ la distancia entre a (extremo inferior de la hoja) y b (donde se dobla la hoja para hacer la base) es $y/2$. Entonces

$$z = 60 \text{ cm} - y/2$$

Como y = 30 - x

Entonces la relación entre x y z es:

$$z = 60 - \frac{30 - x}{2}$$

o sea $z = 45 + ½\, x$

2-c) El volumen del paralelepípedo es el producto $x . y . z$. Cuando $x < y$ tendremos:

(Reemplazando y,z en función de x para poner todo bajo una misma variable)

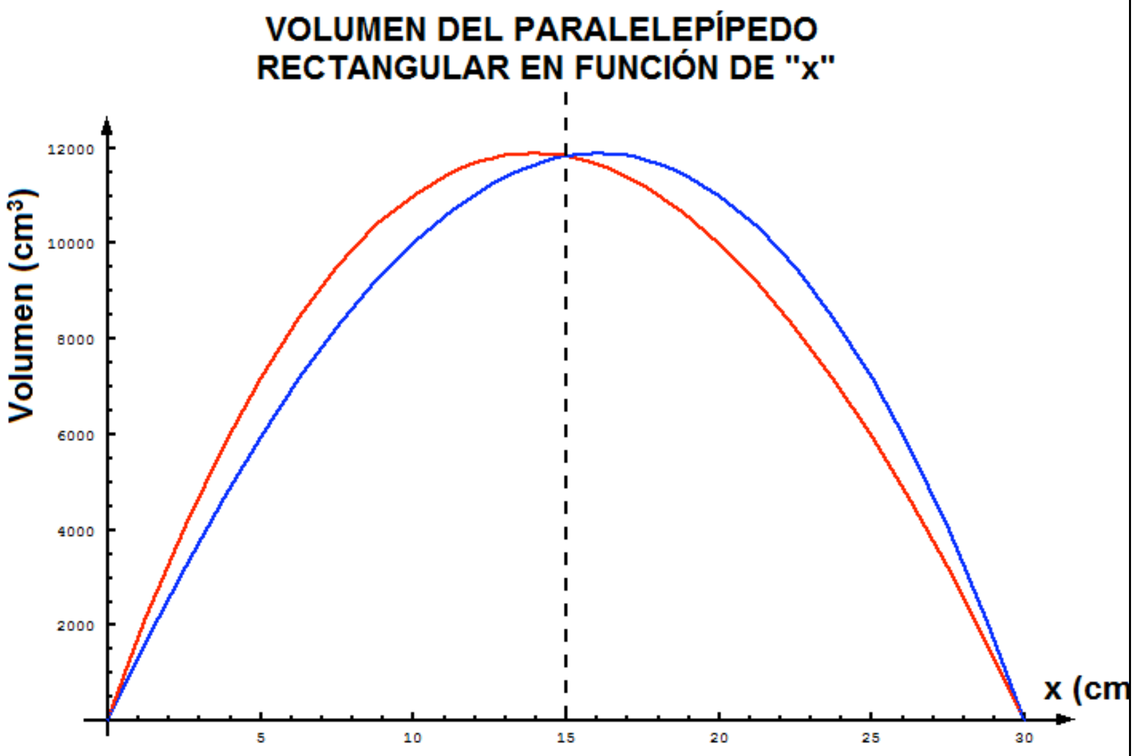
$$volumen = x\ y\ z = x\,(30-x)\,(60-\frac{x}{2}) = \frac{x^3}{2} - 75\,x^2 + 1800\,x$$

Cuando x > y

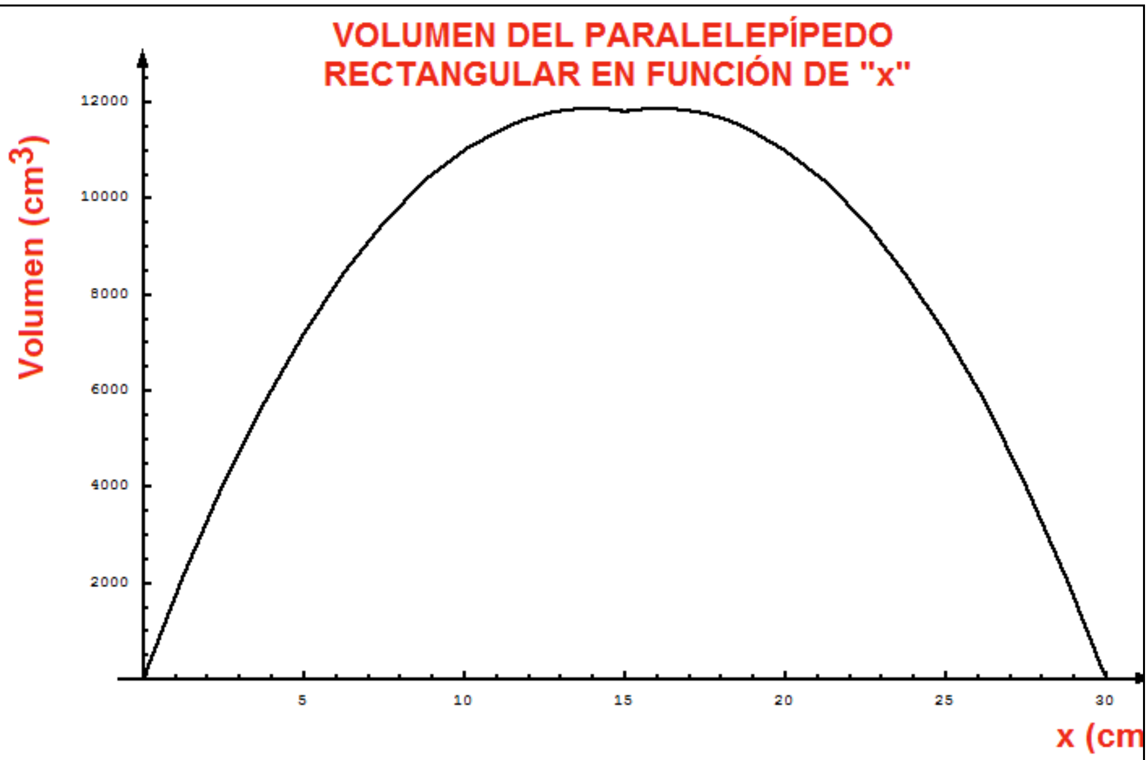
$$volumen = x\ y\ z = x\,(30-x)\,(60-\frac{y}{2}) = x\,(30-x)\,(60-\frac{30-x}{2}) = -\frac{x^3}{2} - 30\,x^2 + 1350\,x$$

que son funciones cúbicas de x. Es conveniente graficarlas para hacerse una cabal idea de cómo son.

Cuando x<y, el gráfico (rojo) corresponde a la primer fórmula y el dominio es (0,15), y cuando x>y, el gráfico (azul) corresponde a la segunda fórmula, siendo el dominio (15,30).



Considerando entonces el dominio (0,30), finalmente el gráfico del volumen del paralelepípedo en función de x es:



Es de destacar que el volumen máximo no se encuentra en x = 15 cm, sino que hay dos máximos en x = 13,9445 cm y en x = 16,0555 cm, para los cuales el volumen resulta ser 11872,2 cm^3 tanto en uno como en el otro.

2-d) Para que el paralelepípedo rectangular sea un cubo debe ser

$x = y = z$

con la cual el perímetro de la sección transversal es b = $4x$ y este es el ancho de la hoja. El largo (h) lo determinamos teniendo en cuenta que

$z(h) = x + \frac{1}{2} x$

La relación del alto de la hoja de papel al ancho es:

$$\boxed{\frac{Alto\ del\ papel(h)}{Ancho\ del\ papel(b)} = \frac{x + \frac{x}{2}}{4\,x} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}}$$

3-a) El tetraedro tiene dos aristas que miden 30 cm y cuatro aristas mayores iguales cuya medida es la distancia que va desde el punto A al punto C. Ya que AE = 15 cm y EC = 60 cm, por Pitágoras (aproximando a dos decimales):

$$\boxed{Arista\ AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{15^2\,cm^2 + 60^2\,cm^2} = 61{,}85\ cm}$$

3-b) El volumen de una pirámide triangular (o tetraedro) es

volumen = 1/3 superficie base × altura

área base = ½ AB × EC = ½ × 30cm × 60cm = 900 cm^2

Determinar la altura tiene ciertas dificultades. Pero si conocemos los tres lados (a, b, y c) de un triángulo cualquiera, su semiperímetro es:

semiperímetro = s = ½ (a + b + c)

y el área del triángulo

$$\boxed{\text{área del triángulo} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Esta fórmula es de Herón de Alejandría que vivió aproximadamente desde el año 10 después de Cristo hasta el año 70.

Vamos a tomar el triángulo CED. Por la fórmula anterior vamos a calcular su superficie y como conocemos su base (ED = 60 cm) vamos a determinar su altura, que es la misma que la del tetraedro (o pirámide triangular). El semiperímetro de CED es:

semiperímetro = s = ½ (60 cm + 30 cm + 60 cm) = 75 cm

área = [75 (75-60) (75-30) (75-60)]^(1/2) = 871,42 cm^2

pero también

área del triángulo = ½ ED × altura

Como conocemos el área del triángulo y la base ED despejamos la altura (a dos decimales):

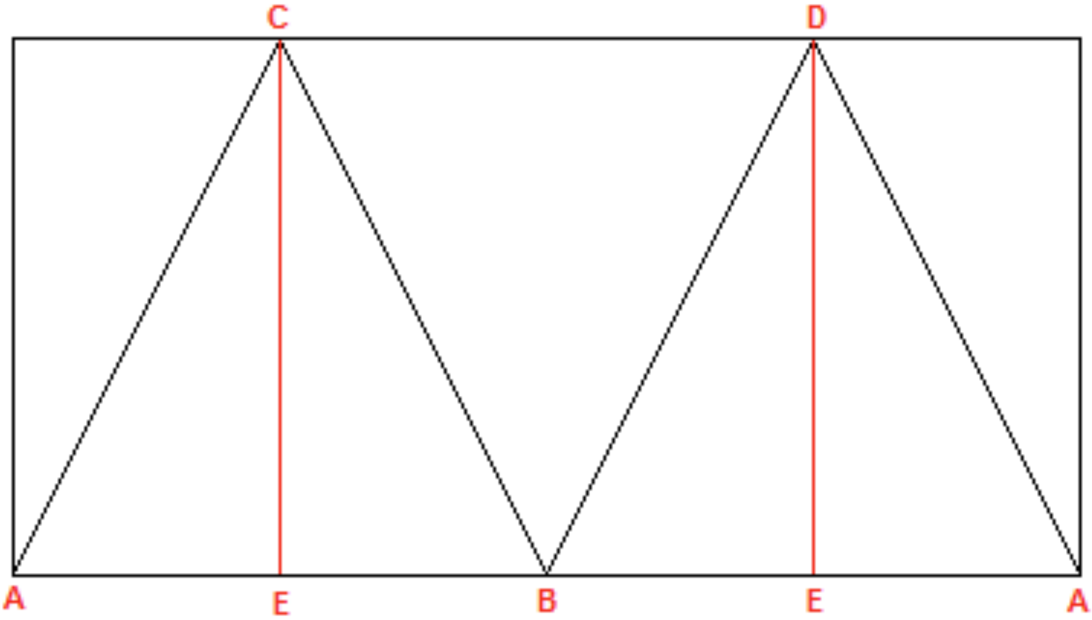
altura = 871,42cm^2 / 30cm = 29,05 cm

Finalmente el volumen del tetraedro será:

volumen = 1/3 superficie base × altura = 1/3 × 900cm^2 × 29,05cm = 8715 cm^3

De modo que el vaso cilíndrico es el que tiene mayor volumen, el paralelepípedo regular nunca llega a superar al vaso cilíndrico pero puede superar fácilmente al tetraedro.

3-c) Un tetraedro regular tiene todas sus aristas iguales.



En consecuencia AB = AC = CB = CD = BD = DA = {.
El ancho del papel debe ser 2 { ; el alto del papel debe ser el cateto CE del triángulo rectángulo AEC, donde AE = { / 2 y AC = { . En consecuencia por Pitágoras:

$$\boxed{CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \ell\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

y la relación entre el alto del papel y su ancho para hacer un tetraedro regular es:

$$\boxed{\frac{alto\ del\ papel}{ancho\ del\ papel} = \frac{\ell\sqrt{\frac{3}{4}}}{2\,\ell} = \sqrt{\frac{3}{16}} \cong 0{,}433}$$