PROBABILIDADES Y GEOMETRÍA
(Problemas extraídos de Sobel, M y Maletsky E. 1991, 3ª ed. Teaching Mathematics. Allyn and Bacon Ed.)

Soluciones a cargo de Oscar Bressan, Ana Bressan y Adriana Rabino.

Estos problemas se puede trabajar recortando y plegando, usando cartones, chinches y elásticos, o bien, usando el Geogebra.

<u>*Probabilidades en triángulos*</u>

1- Un vértice de un triángulo isósceles de papel es elegido al azar y doblado hasta ***coincidir con el punto medio del lado opuesto***

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un trapezoide?
c) ¿Qué acontece si el triángulo es equilátero?

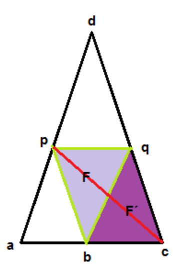
2- Si un vértice de un triángulo isósceles es elegido al azar y doblado haciéndolo coincidir ***con cualquier punto*** *del lado opuesto ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio?*

3- Analiza las preguntas anteriores para un triángulo escaleno.

<u>Soluciones:</u>

1-

a) Para obtener un trapecio el doblez debe resultar paralelo al lado opuesto al vértice elegido y eso solo se obtiene cuando el triángulo es isósceles o equilátero. En el primer caso la probabilidad es de 1/3 (solo se da esto plegando el vértice opuesto al lado desigual) y en el segundo caso es de 3/3, pues el paralelismo del doblez se da cualquiera sea el vértice elegido.



(Nota: Si se decide demostrar el paralelismo entre el doblez y la base considerar:
F y F´ son congruentes (por doblez). Forman un paralelogramo, cada lado del paralelogramo es paralelo al tercer lado. Todos los triángulos son congruentes (por ej., utilizar movimientos para demostrarlo). Por lo tanto el lado ab es congruente con bc y el lado dq es congruente con qc.)

b) En un triángulo isósceles la probabilidad de obtener trapezoides (cuadriláteros de pares de lados opuestos no paralelos) será de 2/3. Si el triángulo es equilátero la probabilidad es NULA.

2-Si el vértice de un triángulo isósceles es elegido al azar y doblado haciéndolo **coincidir con cualquier punto del lado opuesto**, la probabilidad de que se forme un trapecio es 0. Dado que el lado opuesto está formado por infinitos puntos y solo debe darse la situación particular de caer en el punto medio para obtener un trapecio, la probabilidad es un límite y será NULA.

3-.En el caso de un triángulo escaleno serán siempre trapezoides, por lo tanto la probabilidad de obtener trapecios, sea uniendo solo con el punto medio del lado opuesto o con cualquier punto será NULA.

Probabilidades en cuadrados
Un vértice de un cuadrado de papel es doblado sobre otro vértice elegido al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un triángulo?

Solución: 1/3. Resultará interesante analizar que probabilidades de formar triángulos se dan cuando el vértice seleccionado puede coincidir con cualquier punto de los lados del cuadrado.

Probabilidades en hexágonos regulares
Tres vértices elegidos al azar de un hexágono regular de papel son doblados hasta coincidir con el centro del hexágono ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un triángulo equilátero?
Solución**:** 2/20 o 1/10 (resultan 20 triángulos pero 10 coincidentes).

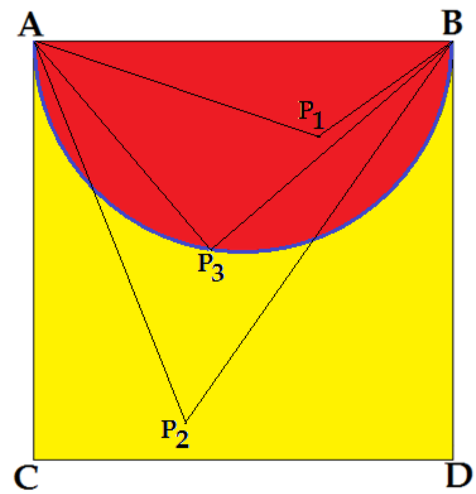
Probabilidades en segmentos
Un segmento es dividido en dos partes. ¿Cuál es la probabilidad de que el segmento de menor longitud sea menor que la mitad de la longitud del segmento mayor? (Cambia el término segmento por soga y trata de visualizar el problema)

Solución**:** El segmento queda dividido en tres partes, pudiéndose cortar 1/3 a izquierda o a derecha. Por lo tanto la probabilidad será de 2/3.

¡Complicando las cosas!!!

En el interior de un cuadrado ABCD se elige un punto P al azar. ¿Cuál es la probabilidad que el triángulo ABP sea obtusángulo? ¿acutángulo? ¿rectángulo?

Solución: Quedan determinadas tres zonas: interior de un semicírculo (en rojo), semicircunferencia (en azul), zona complementaria (en amarillo)



1.Punto P interior al semicírculo (ejemplo: P_1):
Un triángulo que tenga como vértices los puntos A, B y un punto cualquiera **interior** al semicírculo rojo de diámetro *l,* será **obtusángulo** y la probabilidad de que esto ocurra, si el punto se elige al azar dentro del cuadrado, resulta igual al cociente entre el área del semicírculo y el área del cuadrado (teniendo en cuenta que el área de la semicircunferencia a restar del semicírculo es 0!!!).
(Los ángulos en los vértices A y B resultan agudos en tanto son inscriptos abarcando arcos menores que una semicircunferencia. Recordar que todo ángulo inscripto es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. En este caso la suma de estos ángulos no alcanza a formar un ángulo recto, por lo tanto el ángulo en P debe ser obtuso)

$$P(\Delta\ obtusángulo) = \frac{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{8} = 0{,}3927$$

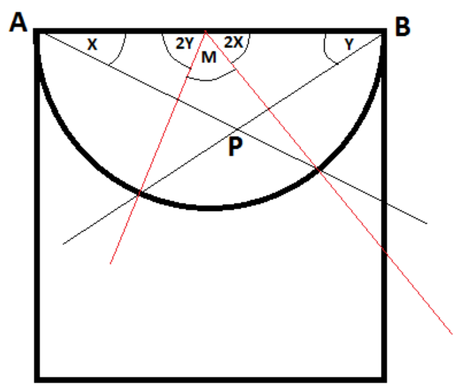
2.Punto P en la zona amarilla (ejemplo P_2):
En cambio, un triángulo que tenga como vértices los puntos A, B y un punto P cualquiera sobre la zona amarilla será acutángulo. La probabilidad de que ocurra esto si el punto se elige al azar dentro del cuadrado, resulta igual al cociente entre al área de la zona amarilla y el área del cuadrado:

$$P(\Delta\ acutángulo) = \frac{\ell^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\ell^2} = 1 - \frac{\pi}{8} = 0{,}6073$$

3.Punto P sobre la semicircunferencia (ejemplo P_3):
Pero existe la zona correspondiente a la semicircunferencia del semicírculo rojo (en azul). Un triángulo que tenga como vértices los puntos A, B y un punto P cualquiera sobre esa semicircunferencia es un triángulo rectángulo
¿Por qué?. Claramente se observa que el ángulo con vértice en cualquier punto P perteneciente a la semicircunferencia, resulta un ángulo inscripto en ella correspondiéndole un central de 180 grados, luego el ángulo en P es recto.

Siendo que el área de una línea es cero, la probabilidad que ocurra que el triángulo sea rectángulo si el punto P **se elige al azar** dentro del cuadrado **RESULTA NULA!!!**

Nota: Demostración modelo: Por ejemplo, para el caso 1.
Hay que demostrar que $X + Y < 90°$ para que el triángulo APB sea obtusángulo.



Se aplica la propiedad que expresa que todo ángulo ángulo inscripto en una circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente, es decir, que abarca el mismo arco de circunferencia.

Como $2X + 2Y + M = 180°$
$X + Y + M/2 = 90°$ (dividiendo ambos miembros por 2)
$\Rightarrow X + Y = 90° - M/2 < 90°$ (por ser $M/2$ un valor positivo)
$\Rightarrow$ (por carácter transitivo) que $X + Y < 90°$
Por lo tanto el ángulo P es obtuso, con lo cual el triángulo APB es obtusángulo.