

EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN ALUMNOS DE 7º GRADO CON DIFERENTES EXPERIENCIAS CURRICULARES ¹

David Ben-Chaim, James Fey, William Fitzgerald, Catherine Benedetto y Jane Miller.
(1998, *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 247-273).

ABSTRACT

Se presentaron problemas contextualizados que envuelven números racionales y razonamiento proporcional a alumnos de 7º con diferentes experiencias curriculares. Hay fuerte evidencia de que los estudiantes en la reforma curricular, quienes son estimulados a construir sus propios conceptos y procedimientos de proporcionalidad a través de trabajo colaborativo de resolución de problemas, tuvieron un mejor desempeño que los estudiantes con un enfoque más tradicional, de enseñanza dirigida por el docente. Los alumnos de 7º, especialmente aquellos que estudian el nuevo currículo, son capaces de desarrollar su propio repertorio de herramientas útiles para ayudarlos a producir soluciones y explicaciones creativas. Esto es demostrado a través del análisis de las estrategias de solución aplicadas por los estudiantes a una variedad de problemas de proporcionalidad.

INTRODUCCIÓN:

Un nuevo currículo y estrategias de enseñanza se han desarrollado recientemente para los temas matemáticos de los grados medios. Esto es especialmente así para el tratamiento de los números racionales, incluyendo fracciones, decimales, porcentajes, razón y proporcionalidad. En el currículo tradicional de los grados medios, cada operación aritmética con cada tipo de número racional es enseñada enfocándose en el desarrollo de la habilidad del alumno en el algoritmo determinado, que luego se practica para adquirir rapidez y exactitud en la ejecución. Sólo cuando se ha logrado la habilidad en el cálculo los alumnos son desafiados a aplicarla en problemas prácticos o imaginarios.

Uno de los nuevos proyectos curriculares de los grados medios, el proyecto de Matemática Relacionada (CMP), fue creado para desarrollar un currículo matemático completo con materiales de enseñanza para sexto, séptimo y octavo grados. Este currículo está estructurado para desarrollar el conocimiento y comprensión de matemática de los alumnos y es rico en conexiones, conexiones entre las ideas centrales en matemática y sus aplicaciones. El CMP está organizado alrededor de interesantes problemas de situaciones reales, situaciones fantásticas o situaciones matemáticas interesantes. Los alumnos resuelven estos problemas y haciéndolo observan patrones y relaciones, conjeturan, prueban, discuten, verbalizan y generalizan estos patrones y relaciones. El desarrollo del CMP recibió el aporte de todos los documentos curriculares del NCTM – Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989), Professional Standards for Teaching Mathematics (1991), The Assessment Standards for Mathematics (1995)

El currículum CMP aborda las principales áreas de matemática: número, geometría, medida, álgebra, estadística y probabilidad, a través de ocho unidades de estudio para cada grado. En 6º grado, dos de las ocho unidades introducen las ideas de número racional. En 7º grado, tres de las ocho trabajan con las ideas de semejanza, razón y proporciones, y sus aplicaciones: De acuerdo con toda la filosofía del CMP, el enfoque en estas unidades es el de alentar a los alumnos a construir sus propias estrategias para hacer los cálculos con números racionales, resolver proporciones y aplicar estas habilidades a la resolución de problemas. Este currículo apoya la construcción del concepto de número racional a través de la presentación a los alumnos de serie de problemas contextualizados que requieren razonamiento proporcional y cálculo. Los alumnos colaboran en el trabajo con los problemas compartiendo sus diversas miradas y enfoques con sus compañeros y luego con toda la clase a través de reflexiones matemáticas, discusiones y el diario escrito. (Para mayor información y ejemplos ver Bouck y Lappan), Los materiales del CMP no puntualizan que los alumnos deban manejar algoritmos estandarizados para la suma, resta, multiplicación o división de fracciones. Tampoco procedimientos estandarizados para resolver problemas que incluyan porcentajes (los 3 casos de %), o cualquier método rutinario para resolver proporciones o probar razones por equivalencia (multiplicación cruzada). Mientras que en el currículo tradicional, los textos proveen problemas y los docentes demuestran las soluciones, y luego los alumnos practican individualmente la resolución de los problemas de acuerdo a

¹ Traducción: María Fernanda Gallego- Ana Bressan. Revisión R. Álvarez. GPDM

la forma dada. El entorno para alumnos que experimentan el CMP es completamente diferente en cuanto a los textos usados, organización de la clase y métodos de enseñanza.

La notable diferencia entre el tradicional y el CMP con respecto al abordaje del número racional, cálculo proporcional y resolución de problemas plantea una pregunta muy natural y fundamental para docentes, familiares y otros interesados en el desempeño de los alumnos en este nivel:

¿Cómo comparar la comprensión, las habilidades de cálculo, las estrategias de resolución de problemas y el éxito del CMP y del currículo tradicional?

En particular, es natural preguntarse si el enfoque del nuevo CMP conduce exitosamente a los alumnos a construir efectivas (correctas y/o eficientes) estrategias de cálculo para fracciones, decimales, porcentajes, razones y cálculos proporcionales, y si los alumnos del CMP desarrollan estrategias flexibles y/o efectivas para resolver problemas contextualizados que incluyen números racionales y proporciones. Este informe está dirigido fundamentalmente a ese amplio tema en cuanto al logro del razonamiento proporcional en la reforma y en el currículo tradicional, comparando el trabajo de alumnos de 7° grado del CMP y tradicional sobre una variedad de tareas.

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL:

La proporcionalidad está en el corazón de la matemática de los grados medios. Envuelve relaciones matemáticas de naturaleza multiplicativa. Formalmente, especialmente para un matemático, una proporción es un estado de equivalencia de dos razones, $a/b = c/d$. De acuerdo a la teoría de Piaget en la cual el razonamiento proporcional fue señalado como un punto en el nivel de desarrollo de las operaciones formales, la investigación se ha concentrado en el razonamiento proporcional en alumnos adolescentes.

De acuerdo con el Currículo del NCTM, “la habilidad para razonar proporcionalmente se desarrolla en alumnos de 5° a 8° grado. De allí la importancia de dedicar tiempo y esfuerzo para asegurar su cuidadoso desarrollo”. Sin embargo, la investigación ha mostrado probadamente que “relativamente pocos alumnos de grados altos tienen la habilidad para usar el razonamiento proporcional de manera consistente”. El tema aún “sigue siendo problemático para muchos alumnos” y “hay evidencia que una gran parte de nuestra sociedad nunca adquiere fluidez en el pensamiento proporcional”.

Según Freudenthal los problemas del razonamiento proporcional pueden describirse en 3 grandes categorías:

- 1) Comparar dos partes de un entero simple como “la razón de mujeres a varones en una clase es de 15 a 10” o “un segmento es dividido en la razón áurea”.
- 2) Comparar magnitudes de diferentes cantidades con una conexión interesante, “millas por galón”, “personas por km^2 ”, kg por m^3 ” o precio unitario. Estas comparaciones no son llamadas generalmente razones, sino relaciones, o densidades.
- 3) Comparar magnitudes de dos cantidades relacionadas conceptualmente, pero no pensadas naturalmente como partes de un entero común. “La razón de los lados de dos triángulos es 2 a 1”. Estas comparaciones se refieren a escalas e incluyen cuestiones de ampliación y reducción en transformaciones de semejanza.

La literatura propone tres tipos de tareas para lograr el razonamiento proporcional:

- Problemas con valores que faltan donde se dan tres datos y la tarea consiste en encontrar el cuarto.
- Problemas de comparación numérica, donde se dan dos razones completas y no se pide una respuesta numérica sino comparar las razones.
- Problemas de predicción cualitativa y comparativos que requieran comparaciones independientes de valores numéricos específicos.

Freudenthal (1978, 1983) ha señalado que el valor que falta o los problemas de comparación proporcional pueden resolverse a través de 3 abordajes diferenciados:

- a) Razón interna (sin una magnitud) o razón entre términos sin un sistema (dos longitudes, dos tiempos).
- b) Razón externa (entre dos magnitudes) o razón entre términos de diferentes sistemas (una longitud y un tiempo).
- c) Absteniéndose del cálculo hasta que el resultado sea encontrado formalmente o estableciendo una relación entre los datos dados y luego calcular.

Van den Brink y Streefland (1979) consideran que la comparación cuantitativa de una razón es una actividad importante para ordenar la realidad perceptiva visual.

La revisión de la literatura sobre razonamiento proporcional de Tourniaire y Pulos (1995) señala que la variabilidad en el desempeño depende de un número de factores relacionados con el contexto y la estructura numérica de los problemas de proporcionalidad. Entre las

variables del contexto están la familiaridad del mismo, la presencia de una mezcla y la presencia de cantidades continuas. Entre los factores de la estructura numérica están la presencia de razones enteras, el orden y la complejidad numérica. También informa acerca de estrategias comunes, correctas e incorrectas. Cramer y Post (1993) identificaron estrategias correctas de solución usando razón unitaria, factores de cambio, fracciones y producto cruzado. Touniare y Pulos (1995) señalaron errores causados por ignorar datos fundamentales y el uso de estrategias de adición o diferencia donde la comparación multiplicativa era más apropiada. El libro editado por Harel y Confrey (1994) y una revisión de Behr et al. (1992) ofrecen un detallado análisis teórico de temas en el campo del razonamiento y estructuras multiplicativas. Ellos elaboran algunas de las operaciones mentales teorizadas para subrayar la construcción de las estructuras multiplicativas y proponen algunas nuevas, además de mostrar cómo los estudiantes construyen esas estructuras, y cómo las estructuras pueden cambiar con la experiencia.

PROPÓSITO DEL ESTUDIO:

El fin básico era describir el carácter y la efectividad del razonamiento proporcional en alumnos con diferentes experiencias curriculares, frente a problemas de razón. El propósito principal fue comparar dos poblaciones de alumnos de 12 años con el nuevo y el tradicional currículo americano. Sin embargo, también estábamos interesados en aprender más acerca de cómo aprenden los alumnos de los grados medios de ambas muestras y lo que ellos saben acerca de proporcionalidad.

METODO:

Los datos para este estudio fueron recogidos durante el primer año (94/95) en el cual el CMP fue enseñado de 7° grado durante un curso completo. Aproximadamente 2000 alumnos de 7° grado de 10 estados con siete docentes distintos estudiaron con el programa del CMP durante un año lectivo.

La muestra control consistió en alumnos de 7° grado de diferentes estados con seis docentes distintos. Esta muestra fue seleccionada de toda la población control (cerca de 400 alumnos) constituida por el equipo de evaluación del CMP. Un indicativo de la equivalencia de las dos muestras está dada por los resultados de las pruebas estandarizadas de ambas muestras. Estos mostraron que los resultados del grupo control fueron ligeramente más altos que los alumnos del CMP al comienzo del año, y ligeramente más bajos al final del año. En total fueron 187 alumnos de la muestra CMP y 128 de la muestra control. Ambas muestras fueron evaluadas en una variedad de problemas de proporcionalidad presentados de 3 formas y distribuidos al azar en cada clase participante. Los dos primeros problemas referidos a precio unitario (uno de comparación numérica y el otro donde falta un valor). El tercero y cuarto referidos a relaciones proporcionales entre distancia, tiempo y velocidad. Ambos de comparación numérica. La principal diferencia entre ellos es la estructura numérica ya que uno incluye sólo enteros y el otro fracciones y decimales para tiempo. El quinto se refiere a densidad de población e incluye una tarea de comparación numérica con números enteros relativamente grandes.

Todas las tareas de comparación numérica (problemas 1,3,4,5) incluyen razones diferentes (más difícil que aquellos con razones iguales) (Karplus et al., 1983 a,b) y se originan en circunstancias familiares como comprar soda en un almacén, andar en bicicleta, densidad de población. Sin embargo, el contexto de los problemas no favoreció a los alumnos de ninguna de las dos muestras. No obstante, dada la manera de enseñar de cada currículo, cuando se les pidió comparar diferentes situaciones y explicar su trabajo, los alumnos del CMP estaban más familiarizados con este tipo de preguntas que los del grupo control. En las respuestas se identificaron 3 categorías:

- Respuesta correcta: a) sólo respuesta correcta, b) respuesta correcta con trabajo de apoyo correcto, c) respuesta correcta con trabajo de apoyo incorrecto. Estas categorías fueron creadas porque en cada problema se les pedía justificar sus respuestas.
- Respuesta incorrecta: a) sólo respuesta incorrecta, b) respuesta incorrecta con comprensión parcial, c) pensamiento incorrecto.

La categoría más problemática fue “respuesta incorrecta con comprensión parcial”. En esta categoría fueron ubicadas respuestas de alumnos cuando su pensamiento era correcto pero con errores de cálculo o cuando usaba las relaciones correctas pero con errores en las unidades o cuando completaba la mayor parte del problema correctamente con un error menor cerca del final.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN:

Los cinco problemas de razón se dieron dentro del contexto de una historia acerca de un paseo al zoológico. Los siguientes son los textos de cada problema presentado por una tabla con sus resultados.

“Un paseo al zoológico. Max, Eliza, Alex y Cosima planearon un paseo en bicicleta al zoológico a fin de año. Los alumnos se reunieron en el estacionamiento de la escuela y se fueron juntos al zoo en bicicleta. Después de mirar los animales durante unas horas, se reunieron en las mesas de picnic, cerca de la laguna del pato, para comer y tomar algo antes de regresar a la escuela.

- 1) Max y Elisa compraron provisiones para comer y reportaron los siguientes precios: Gatorade \$2.00 por 16 onzas, jugo \$1.60 por 12 onzas. Compraron jugo. ¿Hicieron la elección más económica? Mostrar los cálculos que llevan a la respuesta.
- 2) Cosima y Alex fueron a comprar barras de granola y manzanas pero perdieron el ticket. Recordaron que las barras de granola cuestan \$2.60 por 8 barras simples y 6 manzanas cuestan \$1.95.
 - a) ¿Cuánto gastaron por 20 barras de granola?. Explicá tu razonamiento.
 - b) ¿Cuánto gastaron por 20 manzanas? ¿Cómo lo sabés?
- 3) Cosima y Alex decidieron competir para ver quién manejaba más rápido. Cozi anduvo 5 millas en 20 minutos. Alex, 7 millas en 25 minutos. ¿Quién fue el más rápido? ¿Cómo lo sabés?
- 4) El sábado siguiente, Max y Elisa recorrieron el camino que rodea el lago. Recorrieron 30 millas y les llevó 1.5 h de tiempo. Después de almorzar, regresaron por el camino corto. Recorrieron 20 millas en $\frac{3}{4}$ h. ¿En qué parte del paseo anduvieron más rápido? ¿Cómo lo sabés?
- 5) En el callejón cercano a la escuela, Max y Alex vieron varios gatos vagabundos. Cuando regresaron a casa hicieron algunas llamadas telefónicas y averiguaron que hay cerca de 1000 gatos vagabundos en la ciudad de Smithville y cerca de 1500 en la ciudad vecina de Jonesville. El área de Smithville es de 60 m² y la de Jonesville de 100 m². ¿Dónde es más probable ver un gato vagabundo? Explicá tu razonamiento.

La mayoría de los alumnos de ambas muestras resolvieron los problemas con trabajo de apoyo. En promedio entre el 80% y 90% de ambas muestras justificaron sus respuestas. Pero la calidad de la escritura fue importante. Los alumnos del CMP demostraron mucha más habilidad en escribir que los alumnos del grupo control. Obviamente este resultado puede atribuirse al hecho de que a los alumnos del CMP se les solicita más frecuentemente escribir y hablar acerca de sus ideas.

La categoría de respuesta correcta con trabajo de apoyo incorrecto, mostró ... Cerca del 13% de ambos ejemplos entraron dentro de la categoría respuesta incorrecta con comprensión parcial. Esta categoría de respuesta generalmente ocurrió cuando el problema implicaba razonamiento seguido de cálculos, como en el caso de los problemas de razones. Los alumnos pueden pensar correctamente, pero cometer errores en los cálculos; o pueden obtener los números e información correctos, pero llegar a una conclusión errónea respecto de unidades de medida. En otros casos, los estudiantes tienen la mayor parte del trabajo bien pero cometieron pequeños errores al final. Se puede asumir que los alumnos en esta categoría están comenzando a comprender el contenido, pero aún no lo tienen consolidado.

PROBLEMAS 1 Y 2:

Los dos primeros problemas requieren el mismo razonamiento referido a cantidad y costo. Sin embargo el primero requiere una comparación numérica mientras que el segundo consiste en encontrar un valor que falta. En ambas muestras el desempeño en el valor que falta fue mejor que en la comparación numérica.

	CMP	CONTRO L
Missing value	72%	44%
Comp. numérica	57%	32%

El problema del valor que falta puede ser más fácil porque consistía de dos partes idénticas, menos complejas que el problema de comparación numérica.

Este resultado confirma las conclusiones de Tourniaire y Pulos (1995) acerca de que “comparar razones es un método avanzado y la habilidad para elegir la comparación más fácil aritméticamente se adquiere mucho después del dominar las técnicas proporcionales”.

Los alumnos del CMP se desempeñaron bien en el problema del valor que falta, por lo tanto hay una posibilidad de ver efectos de esto en el desempeño en el problema de comparación. Este tema de construir modelos y esquemas en la adquisición de la comprensión proporcional, debería ser considerada más ampliamente para descubrir posibles efectos de nuevos métodos y procesos impuestos por la reforma curricular.

Claramente los alumnos del CMP se desempeñaron significativamente mejor que los del grupo control en los primeros dos items. Los porcentajes de estudiantes que dieron solo la respuesta correcta o la respuesta incorrecta sin trabajo de apoyo son relativamente pequeños. Pero es sorprendente que el 13% de los estudiantes del grupo control no intentaran resolver el problema del valor que falta

El desempeño de los alumnos en estos dos problemas no puede juzgarse estrictamente como resultado de su enseñanza en razón y proporción. Generalmente los alumnos están familiarizados con esta clase de situaciones comparativas y tareas a través de la experiencia diaria y en la vida escolar. Esto es particularmente así para razones geométricas y proporciones. De hecho las investigaciones basadas en el trabajo de Piaget (Fuson, 1978) señalan que la realidad perceptiva visual de un chico es fuente de origen para razón y proporción. Post, Behr, Lesh y Wachsmuth (1985) también sostienen que muchas estrategias y procesos de los alumnos se desarrollan independientemente de la enseñanza. Los chicos emplean naturalmente cierta intuición matemática o sistema de conocimiento informal. (Streefland, 1984, 1985; Treffers and Gofree, 1985). Sin embargo estos conceptos han sido enseñados en ambos currículos pero con diferente enfoque.

Se puede inferir razonablemente que el desempeño superior en los alumnos del CMP se debió, en parte, al entorno y al enfoque de la resolución de problemas con que se presenta el mismo.

ESTUDIO DE UN MINI CASO:

Los datos del porcentaje correcto, con o sin justificación, dan una primera imagen aproximada del desempeño de los alumnos en los problemas dados. Empiezan a sugerir la diversidad de estrategias empleadas por los estudiantes del CMP y del grupo control.

Para entender con más detalle el conocimiento del pensamiento proporcional adquirido por los alumnos con cada currículo, el autor reexaminó todos los papeles de los alumnos para identificar la variedad de abordajes empleados. El siguiente resumen de los descubrimientos demuestra la rica variedad estrategias y métodos de los alumnos de 7° al tratar con razonamiento proporcional en el primer problema. En base al análisis del problema, las pruebas de los alumnos y las entrevistas individuales, se identificaron 9 estrategias diferentes para resolver el problema de comparación numérica. Para la mayoría de esas estrategias podemos presentar el trabajo de los estudiantes demostrando los métodos de solución. Para una o dos estrategias, que podrían ser muy sofisticadas para que los alumnos de 7° las apliquen correctamente y las justifiquen matemáticamente, nosotros completamos con nuestro propio análisis. Todos los ejemplos que aparecen debajo son tomados de los trabajos de los alumnos sin editar.

Estrategia 1: “Comparar la razón de dos variables usando razón interna o un método funcional”. Esta estrategia fue acuñada por Freudenthal (1983) y es frecuentemente mencionada por otros (Por ej.: Tournaire y Pulos, 1985; Lamon, 1994). En términos más familiares es la estrategia de la razón unitaria, que se refiere al precio por unidad o unidad por precio. Esta estrategia fue frecuentemente empleada en ambas muestras y resultó a menudo correcta. Sin embargo es importante señalar que fue usada por el 65% de los alumnos del CMP y 24% del grupo control. Dado que a los alumnos del CMP no se les enseña ningún método específico para resolver problemas de razón, pareciera que la razón unitaria surge naturalmente en alumnos que desarrollan estrategias propias.

Un ejemplo del trabajo de un alumno del CMP, cuya respuesta fue clasificada como “correcta con trabajo de apoyo correcto”.

2.00 : 16 = 12.5 Gatorade – 12.5 c precio unitario

1.60 : 12 = 13.3 jugo – 13.3 c precio unitario

No. Ellos no hicieron la mejor elección.

Otro ejemplo de un alumno del CMP que usó correctamente la operación matemática y el cálculo pero interpretó mal los resultados. Su respuesta fue clasificada como “incorrecta con comprensión parcial”. Una explicación posible para su conclusión equivocada fue dada por

un docente de grados medios quien hipotetizó que “usualmente para algunos alumnos el resultado mayor es el mejor”.

$$\begin{aligned} 2.00 : 16 &= 0.125 \\ 1.60 : 12 &= 0.133 \\ \text{Sí, hicieron la mejor elección.} \end{aligned}$$

Otro ejemplo de uso correcto de la unidad por precio:

$$\begin{aligned} 16 : \$2 &= 8 \quad 12 : \$1.60 = 7.5 \\ \text{No, porque por tu dinero te dan más Gatorade que jugo.} \end{aligned}$$

Otro ejemplo de un alumno del grupo control usando la unidad por precio. No es sorprendente que para este alumno haya sido difícil llegar a la conclusión correcta a partir de estos cálculos:

$$\begin{aligned} 16 : \$2 &= 1/13 \text{ c} \\ 12 : \$1.60 &= 1/ \$1.40 \\ \text{No, no hicieron la mejor elección.} \end{aligned}$$

Estrategia 2: “Comparar razones de la misma variable usando razones internas o el método escalar”. (Freudenthal, 1983; Tourniaire y Pulos, 1985; Lamon, 1994).

Este es un ejemplo de respuesta incorrecta de un alumno del grupo control usando esta estrategia:

$$\begin{aligned} 16 : \$12 &= 1R 4 \\ 200 : 1.60 &= 1R 40 \\ \text{Sí, hicieron la elección correcta.} \end{aligned}$$

Su respuesta fue clasificada como “incorrecta con comprensión parcial”. Usó la operación correcta, pero la forma de usar el resto fue un obstáculo para llegar a la conclusión correcta. Otra forma de ver esta estrategia inherente a esta respuesta es comparar las siguientes fracciones:

$$\begin{array}{ll} 16 \text{ onzas} = 1.333\dots = 4/3 & \$2.00 = 1.250 = 5/4 \\ 12 \text{ onzas} & \$1.60 \end{array}$$

O comparar:

$$\begin{array}{ll} 12 \text{ onzas} = 0.75\dots = 3/4 & \$1.60 = 0.80 = 4/5 \\ 16 \text{ onzas} & \$2.00 \end{array}$$

Mientras uno podría extraer una conclusión correcta a partir de cálculos apropiados de esta clase, dicha inferencia nos parece muchísimo más difícil que la estrategia 1, usando razón unitaria. Si bien pocos alumnos trataron de usar la razón interna o estrategia escalar, ilustra la diversidad de procesos de pensamiento que los alumnos desarrollan y aplican a situaciones de proporcionalidad.

Estrategia 3: “Comparar el costo de la misma cantidad encontrando factor común o múltiplo común tal como precio por unidad”.

Un alumno del CMP usó este tipo de estrategia así:

$$\begin{array}{ll} \$1.60 = 0.533\dots & + 0.53 \\ 3 & 2.13 \end{array}$$

Gatorade- \$2.00 por 16 onzas.
Jugo- \$2.13 por 16 onzas.
No, no hicieron la mejor elección.

Otro:

No,... por 48 onzas de Gatorade \$6 y de jugo \$6.40.

Nuevamente, lo que es más notable es la diversidad de maneras que los alumnos encontraron para razonar sobre estas relaciones

Estrategia 4: "Comparar cantidades para un mismo costo encontrando factor común o costo múltiplo común tal como unidad por precio". Por ejemplo, un alumno usó una estrategia de construcción o edificación y encontró que podía comprar 60 onzas de jugo por \$8 y 64 onzas de Gatorade por \$8. Por supuesto, se podría comparar para 40 centavos:

$$\begin{array}{l} \$2.00 : 5 = 40 \text{ c, entonces } 16 = 3.2 \text{ onzas de Gatorade} \\ 12 = 3 \text{ onzas de jugo} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \$1.60 : 4 = 4 = 40 \text{ c, entonces} \\ 4 \end{array}$$

O encontrar la cantidad para \$1:

$$\begin{array}{l} \text{por } \$ \text{ jugo} \\ 16 = 8 \text{ onzas por } \$ \text{ Gatorade} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 = 7.5 \text{ onzas} \\ 1.60 \end{array}$$

Estrategia 5: "Estrategia de construcción". Un ejemplo del trabajo de un alumno que usó esta estrategia:

Gatorade		Jugo	
\$	onzas	\$	onzas
2.00	16	1.60	12
	32	3.20	24
6.00	48		36
		6.40	48

No, porque para 48 onzas Gatorade cuesta \$6.00 y el jugo \$6.40.

A pesar de que otros estudios han encontrado esta estrategia comúnmente en alumnos adolescentes (Hart, 1981; Tourniaire, 1986), nosotros la encontramos en el trabajo de pocos. Esto podría deberse a que las razones no enteras involucradas en este problema no alienta el uso de esta estrategia, confirmándose así otro descubrimiento general que la estructura numérica de un problema influye en la elección de la estrategia de resolución. Otra explicación posible podría ser que ésta y con aplicación a la tabla de razones no aparece naturalmente en alumnos que desarrollan estrategias propias. Si este fuera el caso, se hace necesaria la enseñanza directa en cómo presentar y usar la tabla de razones. Streefland (1985) considera a la tabla de razones como una herramienta de esquematización durante un largo proceso de aprendizaje, y aparte de eso, como contribución para separarse del contexto y descubrir, hacer conciente y aplicar todas las propiedades que caracterizan a la razón y su uso en problemas numéricos.

Estrategia 6: "Considerar razones de diferencias entre las mismas variable". El trabajo de dos alumnos ilustra esta tentativa aritmética pero con un planteo equivocado de situaciones comparativas de razones.

$$\begin{array}{ccccccc} 2.00 & 16 & & 16 & 2.00 & & \\ 1.60 & 12 & & 12 & 1.60 & & \\ 0.40 & 4 & \text{No} & 4 & 40 \text{ c} & \text{Sí} & \end{array}$$

Muchos otros alumnos de ambas muestras usaron más o menos la misma estrategia, pero no pudieron encontrar una explicación aceptable. Esta estrategia sugiere sumar más que multiplicar, y no demasiada comprensión de comparaciones significativas. Prior encontró este error en esta estrategia tratando con problemas que involucran razones no enteras. (Karplus et al., 1983; Tourniaire, 1986).

Nosotros encontramos el pensamiento aditivo (o sustractivo) en respuestas a otras tareas de comparación de razones. Por ejemplo cuando se sabe el número de varones y mujeres en dos clases distintas y se pide comparar la distribución genérica de las clases, a menudo comparan simplemente la diferencia entre el número de varones y mujeres en las dos clases. Este tipo de evidencia del pensamiento aditivo cuando es más apropiado el multiplicativo, señala la importancia de desarrollar el pensamiento proporcional en los grados medios sobre la base de un trabajo en los grados elementales que enfatice la adición y la sustracción.

Estrategia 7: “Responder a los números pero no al contexto del problema”. Estos ejemplos del trabajo de alumnos del grupo control ilustran por un lado, un planteo disparatado de los problemas aritméticos y por el otro, que siendo capaces de abandonar el contexto, podrían estar en un escalón de matematización apropiado para las situaciones. (Freudenthal, 1983, Capítulo 6).

Sí	$2.00 \times 12 = 24$ Gatorade
$1.60 \times 12 = 19.2$	$1.60 \times 16 = 25.60$ jugo
$2.00 \times 16 = 32$	

Asumimos que estudiaron el método del producto cruzado con números desnudos, como es el caso en el currículo tradicional. Si bien es posible usar este método para problemas de comparación, el nivel de pensamiento necesario para interpretar correctamente los resultados es de un nivel superior.

Estrategia 8: “Referirse a una sola variable al ignorar parte de los datos dados en el problema”. Obviamente esta es una estrategia errónea pero su simplicidad es extremadamente atractiva para los alumnos. Está ilustrada con los siguientes ejemplos.

- “Sí, porque cada bebida que comprás es 40 centavos más barata, entonces estás ahorrando mucho dinero”.
- “No, porque Gatorade es más barato porque tiene más onzas”.

De hecho este planteo erróneo señala la importancia fundamental de desarrollar la comprensión en el razonamiento proporcional: la necesidad de pensar una comparación entre dos números como una simple entidad (una razón o fracción) y operar simultáneamente con dos o más de tales comparaciones.

Estrategia 9: “Respuestas afectivas a datos y preguntas numéricas”. Identificamos dos clases de respuestas indicando que los alumnos no estaban centrando su atención en la pregunta comparativa “cantidad y precio”. Por ejemplo:

- “Sí, porque no costó realmente mucho dinero”.
- “Sí, fue bueno porque ahorraron 40 centavos”,
- “No, Gatorade es más rico”.
- “No, porque qué pasa si a algunos de los chicos no les gusta el jugo”.

A veces en la vida real, las situaciones surgen donde las razones matemáticas para una solución no están en el presente de ciertas personas. Se podría argumentar que dichos alumnos eligieron una respuesta subjetiva citando otras razones no matemáticas en sus respuestas. Tales respuestas podrían considerarse correctas si estaban apoyadas en razonamientos correctos. Por ejemplo cuando dijeron: “Sí, hicieron la elección económicamente correcta porque 40 centavos”, si hubieran agregado que a pesar de que Gatorade es más barato, sólo necesitaban 12 latas y las 4 extra se desperdiciarán, podríamos considerar esta respuesta correcta. Al menos estas respuestas sugieren la complejidad de la percepción de los alumnos que seguramente estará presente en alguna clase donde se estudien cuestiones de proporcionalidad.

Nuestro análisis detallado de las respuestas de los alumnos acerca del pensamiento comparativo Gatorade/jugo se corresponde con que los alumnos recurren a una gran variedad de estrategias, correctas e incorrectas, frente a estas tareas. Aún cuando aplicaron estrategias correctas, a menudo fallaron en alcanzar una solución correcta.

En nuestro estudio al comparar el efecto de la reforma y del currículo tradicional en los grados medios, fue especialmente interesante preguntar de qué manera la variedad y la eficacia de los planteos frente a los problemas de proporcionalidad están relacionados con los enfoques educativos fijados en los materiales del currículo y los planteos de enseñanza en las clases del CMP y del grupo control. Por ejemplo, uno podría ver la rica variedad de estrategias de resolución empleadas por los alumnos del CMP como resultado de la variedad de problemas presentados por el CMP. O quizás ver esta variedad de estrategias, varias ineficaces y erróneas, y concluir que si a los alumnos se les enseñara directamente un algoritmo óptimo para las comparaciones de razones, su desempeño podría mejorar. Sin embargo nuestros datos sugieren una conjetura distinta. Los alumnos del CMP, quienes desarrollaron el pensamiento proporcional a través de problemas basados en investigaciones que alentaban la construcción personal de planteos flexibles frente a tales tareas, más que practicar un simple método algorítmico, lograron mejores resultados aplicando estrategias significativas y eficaces en las tareas dadas.

El planteo más eficaz al problema comparativo del precio Gatorade/jugo es probablemente el de la razón unitaria, y en nuestro estudio los alumnos del CMP emplearon esta estrategia mucho más a menudo que los alumnos del grupo control. Tourniaire y Pulos (1985) sostienen que el comparar razones al más alto nivel pareciera estar precedido por la elección del método más económico entre el funcional y el escalar. Karplus argumenta que la habilidad de usar la razón más fácil entre una razón escalar y una funcional es más avanzada que la habilidad de usar estrategias de multiplicación. Además, Post, Behr y Lesh (1988) consideran que el método de la razón unitaria posee mayor interés intuitivo. Así la enseñanza que alienta la construcción del pensamiento proporcional debiera también ayudarlos a encontrar la estrategia de eficacia óptima.

PROBLEMA 2:

En este problema las estrategias más comunes fueron pensar el precio de los paquetes, precios unitarios y combinaciones de estos métodos. Sin embargo hubo muchos alumnos que manipularon números de maneras que no reflejaron la estructura de la información dada o de la pregunta.

Encontramos que 82% de los alumnos del CMP usaron una estrategia basada en el precio del paquete, precio unitario, o una combinación de ambos; éstas fueron usadas por sólo el 62% de los alumnos del grupo control. Todos los alumnos aplicaron la misma estrategia para ambas partes del problema, y muy pocos lograron éxito en una parte y no en la otra.

Estrategia: por precio del paquete

<p>a) 20 barras : 8 barras = 2.5 x \$2.60 = \$6.50 por 20 barras, porque 8 barras entra en 20 2.5 veces. Entonces 2.5 barras más costarán 2.5 veces más. Yo multipliqué 2.5 x \$2.60 (el costo) y fue igual a \$6.50 para 20.</p>	<p>a) 20 barras de granola costarían \$6.50. 8 barras cuestan 2.60 16 barras cuestan \$5.20 4 barras cuestan \$1.30 20 barras cuestan \$6.50</p>
<p>b) 20 manzanas : 6 manzanas = 3.33 x \$1.95 = \$6.50 para 20 manzanas, porque cuando dividís 20 : 6 encontrás que 6 entra 20 3.333 (31/3) veces. Lo que significa que el precio será 3.33 veces más. Entonces multiplicás 3.33 x \$1.95 que es igual a \$6.50.</p>	<p>b) 20 manzanas costarían \$6.50. 6 manzanas cuestan \$1.95 12 manzanas cuestan \$3.90 18 manzanas cuestan \$5.85 2 manzanas cuestan 65 c 20 manzanas cuestan 6.50</p>

Cramer y Post (1993) denominaron a este procedimiento “el factor de cambio”, (ver también Post, Behr y Lesh, 1988), mientras que Hart (1981) lo llamó estrategia “de construcción”. En este caso, el pensamiento de los alumnos es esencialmente aditivo cuando construyen la cantidad más grande a partir de la más pequeña con incrementos iguales. Si esto es un razonamiento multiplicativo, es ciertamente una forma temprana del mismo porque no podemos decir que los alumnos tuvieran una completa conceptualización del marco multiplicativo. Además aunque las razones no eran enteras, aún así 1/2 y 1/3 son las fracciones más familiares para tratar.

Estrategia: por precio unitario

<p>a) \$6.50, porque me figuré lo que costaba una barra de granola si 8 costaban \$2.60. Entonces consideré lo que costaba una (32.5 c) y lo multipliqué por 20 barras de granola y obtuve \$6.50. \$2.60 : 8 barras = 0.325 x 20 = \$6.50</p>	<p>a) Gastaron \$6.50 2.60 : 8 x 20 = \$6.50 0.325 precio unitario \$6.50 precio total</p>
<p>b) \$6.50 Yo lo sé porque me figuré lo que costaría una manzana y lo multipliqué por 20 y obtuve \$6.50. \$1.95 : 6 manzanas = 0.325 x 20 = \$6.50</p>	<p>b) \$6.50 1.95 : 6 x 20 = \$6.50 0.325 precio unitario \$6.50 precio total</p>

Estrategia: una combinación de paquete y precio unitario

<p>Respuestas correctas</p> <p>a) 8: \$2.60 = aproximadamente 32 c una barra $8 : 12 = 20$ 12 barras extras $8 : 8 = 16$ \$2.60 + \$2.60 = \$5.20 4 barras extras $0.32 \times 4 = \\$1.28$ $5.20 + 1.28 = \\$6.48$ \$6.48 por 20 barras</p>	<p>Respuestas incorrectas</p> <p>a) $2.60 / 8$ $+ 2.60 / 8 = 16$ barras 5.20 $2.60 : 8 = 32$ c / barra $+ 0.12 = 4$ barras 5.32 Respuesta: 5.32</p>
<p>b) \$1.95 : 6 aproximadamente 32 c por manzana, \$6.48 por 20 manzanas porque una manzana cuesta lo mismo que una barra y tenía 20 barras y 20 manzanas, entonces sería lo mismo</p>	<p>b) $1.95 / 6$ $1.95 : 6 = 0.3$ $1.95 / 6 = 12$ barras $3.90 : 6$ 5.85 $+ 0.6$ 5.91</p>

Estrategia: atender exactamente a los números: respuestas incorrectas con pensamiento incorrecto

<p>a) 52. Yo multipliqué 2.60 por 20 y obtuve 52, $2.60 \times 20 = 52$</p>	<p>b) 39. Yo multipliqué 1.95 por 20 y obtuve 39. $1.95 \times 20 = 39$</p>
---	---

PROBLEMAS 3 Y 4:

Ambos problemas requerían el mismo conocimiento de razón relacionado con distancia y tiempo (dados tiempo y distancia, comparar velocidades). No obstante en ambas muestras el desempeño de los alumnos en el primer problema fue considerablemente mejor que en el segundo.

	M P	CONTROL
Problema 3	65%	34%
Problema 4	32%	7%

El segundo problema resultó más difícil porque contiene un número decimal y una fracción para el tiempo. Como lo muestra el siguiente análisis, los errores no pueden explicarse simplemente por la dificultad de los cálculos aritméticos.

Una cuidadosa revisión de los trabajos de los alumnos muestra que la mayoría de las respuestas incorrectas de ambas muestras provienen de una confusión entre distancia por unidad de tiempo y tiempo por unidad de distancia. En el primer problema muchos alumnos dividieron el número más grande (20 minutos) por el más chico (7 millas) obteniendo minutos por milla, y asumiendo que habían calculado millas por hora. Estos casos fueron señalados como “respuesta incorrecta con comprensión parcial”. Los siguientes son ejemplos de respuestas correctas e incorrectas del problema 3:

Respuesta correcta

Cozi

$20 \text{ min} : 5 \text{ millas} = 4 \text{ min por milla}$

Alex

$20 \text{ min} : 7 \text{ millas} = 3.57 \text{ por milla}$

Alex anduvo más rápido. Porque anduvo 0.43 min por milla más rápido.

El tuvo que recorrer un camino largo pero le llevó menos tiempo por milla.

Respuesta incorrecta con comprensión parcial

Cozi fue la más rápida.

Yo dividí 20 por 5 y obtuve 4 millas por minuto para Cozi.

Después dividí 25 por 7 3.5 millas por minuto.

Cozi $20 : 5 = 4$ mph.

Alex $25 : 7 = 3.5$ mph
 Cozi anduvo más rápido.

Responde exactamente a los números

Cozi anduvo más rápido. $\frac{25}{5} = 5$, $\frac{20}{7} = 2.9$

Cozi recorrió más en 25 minutos que Alex en 20.

Respuesta correcta con trabajo de apoyo incorrecto

“Alex. Porque él llegó más lejos porque fue derecho.”

Uno podría especular que en el tratamiento tradicional, el número grande de millas dividido un número pequeño de horas permite a algunos alumnos llegar a una respuesta correcta sin comprender lo que se está haciendo. Nuestros hallazgos sugieren que es necesario advertir a los docentes del uso de variedad de unidades de tiempo y distancia en problemas donde los alumnos desarrollen una clara comprensión de la relación estructural fundamental, no un patrón de memoria “número grande dividido número pequeño”. Por supuesto esta tentación de dividir el número más grande por el más pequeño está inducido por muchas otras experiencias en la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división. Claramente los alumnos del CMP se desempeñaron considerablemente mejor que los alumnos del grupo control. Los alumnos del CMP usaron la razón unitaria en ambos problemas, más a menudo que los del grupo control (54% a 27%). Esta estrategia se conoce por ser la más exitosa para este tipo de problemas. Inferimos que el desempeño superior de los alumnos del CMP es resultado del enfoque de la resolución de problemas presentado por el currículo CMP, donde los alumnos construyen en forma personal la comprensión de estructuras matemáticas claves más que practicar algoritmos formales. Parece importante dar tiempo a los alumnos para enfrentarse con estos desafíos fundamentales y compartir su pensamiento con otros alumnos y su docente en pequeño grupo y con toda la clase.

La importancia de pedir fundamentaciones puede verse en la categoría “respuesta correcta con trabajo de apoyo incorrecto”, especialmente en el grupo control. Por ejemplo, en el problema 4 más del 40% de los alumnos de este grupo contestaron correctamente que Max y Elisa anduvieron más rápidamente en el camino de regreso, pero sus razonamientos fueron generalmente incorrectos. Entonces, en un típico examen de matemática donde no se pida justificación de la respuesta, estos alumnos serían calificados correctamente pero sus concepciones erróneas no serían conocidas ni corregidas. Los siguientes ejemplos de alumnos del grupo control ilustran el problema:

† En el camino de regreso porque les llevó 45 minutos.

† $60 : 4 = 15 \times 3 = 45$ min.

Después de almorzar cuando recorrieron un camino corto, porque $\frac{3}{4}$ de una hora es igual a 45 min.

Por otro lado recibimos muchas soluciones lindas para el problema 4 de los alumnos del CMP: Por ejemplo, los siguientes son los diferentes planteos de seis alumnos:

<p>$30 : 1.5 = 20$ millas por hora para el paseo inicial. $20 : 0.75 = 26.6$ millas por hora. Entonces lograron la mejor razón al final, 26.6 millas por hora frente a 20 millas por hora.</p>	<p>En la segunda parte porque les llevó sólo 2.25 para recorrer una milla mientras que el otro camino les llevó 3.00 por milla.</p>	<p>Regresando porque $30 : 1.5$ ó $90 \text{ min} = 0.3$ de velocidad mientras que $20 : 45 \text{ min}$ ó $\frac{3}{4}$ hora = 0.4 de velocidad.</p>
<p>En el camino de regreso porque les llevó sólo $\frac{3}{4}$ de hora recorrer 20 millas. En el otro camino les llevó una hora recorrer 20 millas. Allá 30 millas</p>	<p>$1.5 \text{ h} : 2 = \frac{3}{4}$ de hora $30 : 2 = 15$ millas. Ellos tuvieron la mejor razón en el camino a casa porque recorrieron 15 millas en $\frac{3}{4}$ de hora mientras que en el otro camino recorrieron 20 millas</p>	<p>$30 : 90 = 0.33$ ($1.5 = 90 \text{ min}$) $20 : 45 = 0.44$ Ellos anduvieron más rápido en el camino de regreso. 44 mph – camino de regreso 33 mph - allá</p>

1.5 horas 20 millas por hora	en $\frac{3}{4}$ de hora.	
---------------------------------	---------------------------	--

Es interesante notar que en el último ejemplo el alumno supo que el resultado 0.33 era millas por minuto y aún más, que era un decimal periódico. Sin embargo, más tarde lo convirtió en millas por hora multiplicando por 100 (antes que por 60) ignorando el decimal periódico.

Obviamente el contexto y la estructura numérica de la razón en los problemas 3 y 4 incluyendo el contenido continuo, la complejidad numérica y el tipo de factores reportados en la literatura, son variables causantes de la diferencia en el desempeño de los alumnos. Sin embargo parece poco probable que la familiaridad juegue un mayor rol en el rendimiento en estos problemas. Si así fuera, esto significa que los alumnos del CMP están más familiarizados con este contexto debido a los problemas del CMP currículo.

PROBLEMA 5:

En este problema, con densidad de gatos vagabundos en dos ciudades, se requiere una comparación numérica, y son usados números enteros aunque grandes. En comparación con el problema 3, el rendimiento para ambas muestras decreció drásticamente. El factor familiaridad podría ser una posible causa. Los alumnos de 7° grado están más familiarizados con autos, distancias y velocidad que con problemas de población, área y densidad. Una causa secundaria podría ser el tamaño relativamente grande de los números usados. Ambos factores mencionados anteriormente por diversos autores.

CONCLUSIONES

El propósito de este estudio fue comparar el razonamiento proporcional de alumnos de 7° grado con dos tipos bastante diferentes de experiencias curriculares (CMP reforma curricular y currículo tradicional). En particular, este informe se ha focalizado en la comparación numérica y en problemas de proporcionalidad donde falta un valor, con diferentes contextos y estructuras numéricas. Ambos grupos fueron evaluados a través de un examen escrito sobre problemas de razón. A continuación el 25% de cada muestra fue entrevistada para explorar su pensamiento en la prueba escrita y realizar algunas preguntas sobre proporcionalidad que incluían sólo datos numéricos sin contexto. Los autores de este informe reconocen la limitación al tratar sólo con los resultados de los problemas de razón, sin considerar el amplio repertorio de la proporcionalidad que incluye escala y otras pruebas sobre razón. Los resultados demuestran que los alumnos de la reforma, además de estar su desempeño por arriba de los alumnos del grupo control, fueron capaces de dar explicaciones escritas y orales de buena calidad acerca de su trabajo. Cuando se les pedía explicar o cómo lo sabés, agregaban apoyo escrito a sus respuestas.

Por supuesto, se puede ver los resultados y concluir que ambos, alumnos de la reforma y del currículo tradicional, tienen un largo camino por recorrer hasta lograr dominar las estrategias y habilidades básicas del razonamiento proporcional. De acuerdo con los resultados, un considerable porcentaje de alumnos de ambos grupos dio respuestas incorrectas, cerca de un 15% de todas las respuestas fueron clasificadas como “respuesta correcta con justificación incorrecta”, y el mismo porcentaje como “respuesta incorrecta con comprensión parcial”. Estas respuestas deberían alentarnos a interpretar con cuidado los resultados: algunos alumnos tienen un conocimiento basado en un razonamiento incorrecto mientras que otros tienen ideas buenas pero no tienen habilidad para completar su razonamiento.

A pesar de que los alumnos del CMP no mostraron procedimientos convencionales para resolver proporciones o probar razones por equivalencia, se desempeñaron exitosamente frente a los alumnos del grupo control y demostraron también habilidad para desarrollar una variedad de estrategias, incluyendo algunas de óptima eficacia, para tratar con razones y cálculos proporcionales. Nuestra hipótesis acerca de este desempeño superior podría atribuirse al enfoque de la resolución de problemas inherente al discurso del CMP currículo. En este currículo se alienta a los alumnos a construir su propia comprensión y sus propios procedimientos para el cálculo con números racionales, resolución de proporciones, y a aplicar estas destrezas en la resolución de problemas. Aún así habría más factores que podrían haber influido en el desempeño de los alumnos del CMP. El CMP currículo incluye ocho unidades por grado, 6° y 7°, que cubren un amplio campo de temas junto a los que

tratan con números racionales, proporciones y sus aplicaciones. Uno de los principales rasgos del CMP currículo es la conexión entre las unidades, factor importante para la adquisición del conocimiento en el dominio de los números racionales. Otro factor es el nivel de preparación y los antecedentes de los docentes del CMP versus los docentes tradicionales.

Dado que ésta fue la primera vez que los docentes del CMP enseñaron con los nuevos materiales, los resultados son alentadores y promisorios.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

A través de este estudio identificamos muchas resistencias y dificultades con que tropezaron los alumnos de ambas muestras al tratar con los conceptos de proporcionalidad y sus aplicaciones. Acordando con estudios anteriores sobre la comprensión de los adolescentes de la proporcionalidad, los hallazgos de este estudio señalan el poder y el uso predominante de la razón unitaria en tales problemas. También encontramos evidencias que confirman las conjeturas sobre los efectos de la estructura numérica y la familiaridad del contexto en la dificultad de la tarea. Pareciera que ambos, complejidad de los números y contexto, debieran ser más considerados en los materiales del currículo y en la enseñanza.

Cuando entrevistamos a docentes de 7° grado (del CMP y del tradicional), todos manifestaron interés sobre la enseñanza de este complejo tema de proporcionalidad. Tourniaire y Pulos (1985) y los autores de *Street Mathematics and School Mathematics* (Nunes, Schliemann, y Carraher, 1993) han concluido que no existe un patrón lineal de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. No obstante, hace tiempo, Freudenthal (1983) había recomendado enérgicamente que el proceso de aprendizaje de razón y proporcionalidad debería conducirse de forma tal que las fuentes de insights (conocimientos intuitivos) no obstaculicen el proceso de algoritmización y automatización. Esto puede lograrse retornando una y otra vez durante el proceso de algoritmización y automatización, y aún después a los conocimientos intuitivos. Por eso Streefland (1985) respondiendo al largo proceso de aprendizaje de razón y proporción (Streefland, 1984), esbozó ingredientes de una teoría explicativa de enseñanza y aprendizaje a través de específicas actividades ejemplificadoras, modelos y esquemas visuales originales. Por lo tanto parece esencial trabajar sobre la enseñanza de la proporcionalidad durante varios años de los grados medios. Nuestros hallazgos apoyan estas ideas.

En todos los casos se alienta la variedad de estrategias y formas de resolución que los alumnos encuentran para resolver los problemas. Los alumnos de 7° grado, a los que se les ha dado tiempo para explorar y discutir situaciones aritméticas/problemas de proporcionalidad, son capaces de desarrollar su propio repertorio de herramientas significativas para producir soluciones y explicaciones originales. La enseñanza debiera sacar ventaja de la construcción de este repertorio y continuar extendiéndolo dentro del dominio de la proporcionalidad.

REFERENCIAS:

- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. and Lesh, R.: 1992, 'Rational Number, Ratio, and Proportion', in D. A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: MacMillan Publishing Company, pp. 296-333.
- Bell, A., Greer, B., Grimison, L. and Mangan, C.: 1989, 'Children's performance on multiplicative word problems: elements of descriptive theory', *Journal for Research in Mathematics Education* 20,434-449.
- Bouck, M. and Lappan, G.: in press, 'Developing algorithms for adding and subtracting fractions', in *1998 NCTM Yearbook, Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*.
- Cramer, K. and Post, T.: 1993, 'Proportional reasoning', *The Mathematics Teacher* 86, 404-407.
- Cramer, K., Post, T. and Currier, S.: 1993, 'Learning and teaching ratio and proportions: Research implications', in D. T. Owens (ed), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics*, New York: MacMillan Publishing Company, pp. 159-178.
- Freudenthal, H.: 1978, *Weeding and Sowing: A Preface to a Science of Mathematical Education*, D. Reidel, Dordrecht.
- Freudenthal, H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Strategies*, D. Reidel. Dordrecht, Chapters 5 and 6, pp. 133-209.
- Fuson, K. S.: 1978, 'An Analysis of Research Needs in Projective, Affine, and Similarity Geometries, Including an Evaluation of Piaget's Results in These Areas,' in R. Lesh (ed), *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts*. Columbus, Ohio: ERIC, pp. 243-260.

- Harel, G. and Confrey, J. (eds): 1994, *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press.
- Hart, K. M.: 1981, *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, London: John Murray Ltd.
- Hoffer, A.: 1988, 'Ratios and proportional thinking', in T. Post (ed), *Teaching Mathematics in Grades K-8: Research Based Methods*, Boston: Allyn and Bacon, pp. 285-313.
- Inhelder, B. and Piaget, J.: 1958, *The Growth of Logical Thinking From Childhood to Adolescence*, New York: Basic Books, Inc.
- Karplus, R., Pulos, S. and Stage, E. K.: 1983a, 'Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems', *Educational Studies in Mathematics* 14: 219-233.
- Karplus, R., Pulos, S. and Stage, E. K.: 1983b, 'Proportional reasoning of early adolescents', in R. Lesh and M. Landau (eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York: Academic Press, Inc., pp. 45-90.
- Larnon, S.: 1994, 'Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming', in G. Harel and J. Confrey (ed), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press. pp. 89-120.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. and Phillips, E.: 1996a, *Bits and Pieces I, Understanding Rational Numbers*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Co.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. and Phillips, E.: 1996b, *Bits and Pieces II, Using Rational Numbers*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Co.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. and Phillips, E.: 1997a, *Stretching and Shrinking*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Co.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. and Phillips, E.: 1997b, *Comparing and Scaling*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Co.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. and Phillips, E.: 1997c, *Data Around Us*, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Co.
- Lawton, C.A.: 1993, 'Contextual factors affecting errors in proportional reasoning', *Journal for Research in Mathematics Education* 24, 460-466.
- National Council of Teachers of Mathematics.: 1989, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA.: The Council.
- National Council of Teachers of Mathematics.: 1991, *Professional Standards for Teaching Mathematics*, Reston, VA: The Council.
- National Council of Teachers of Mathematics.: 1995, *Assessment Standards for Mathematics*, Reston, VA: The Council.
- Nunes, T., Schliemann, A. D. and Carraher, D.: 1993, *Street Mathematics and School Mathematics*, Cambridge University Press.
- Post, T. R., Behr, M. J. and Lesh, R.: 1988, 'Proportionality and the development of prealgebra understanding', in A. Coxford and A. Schute (eds), *The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, VA.: The Council, pp. 78-90.
- Streefland, L.: 1983, 'The long term learning process for ratio', in R. Hershkowitz (ed), *Proceedings of the Seventh Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Rehovot, Israel, pp. 182-187.
- Streefland, L.: 1984, 'Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory). Part I - Reflections on a teaching experiment', *Educational Studies in Mathematics* 15, 327-348.
- Streefland, L.: 1985, 'Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory). Part II - The outline of the long term learning process', *Educational Studies in Mathematics* 16, 75-94.
- Tourniaire, F.: 1986, 'Proportions in elementary school', *Educational Studies in Mathematics* 17, 401-412.
- Tourniaire, F. and Pulos, S.: 1985, 'Proportional reasoning: A review of the literature', *Educational Studies in Mathematics* 16, 181-204.
- Treffers, A. and Goffree, F.: 1985, 'Rational analysis of realistic mathematics education - The Wiskobas Program', in L. Streefland (ed), *Proceedings of the Ninth International Conference For the Psychology of Mathematics Education*, Noordwijkerhout, The Netherlands.
- Van den Brink, F. J. and Streefland, L.: 1979, 'Young Children (6-8) - Ratio and Proportion', *Educational Studies in Mathematics* 10, 403-420.
- Oranim School of Education
University of Haifa, Israel
The University of Maryland
Michigan State University

DAVID BEN-CHAIM, JAMES T. FEY, WILLIAM M. FITZGERALD, CATHERINE
BENEDETTO and JANE MILLER