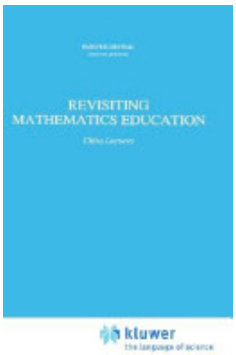
Hans Freudenthal
Universidad de Utrecht

Revisiting Mathematics Education

China Lectures

Capítulo 1



Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/ London 1991

Disculpa y explicación

Así comienza el autor su obra, explicando que “esto no es ni un prefacio ni una introducción sino más bien una disculpa y una advertencia: el presente libro no agrega más que a sí mismo a la obra que ya he publicado”. Y su disculpa es por este hecho: por haber renunciado a la originalidad.

Con la sinceridad y claridad que lo caracterizara, sigue explicando que trató de hacer una recopilación de su gira por China, una “nueva visita o revisión” de su postura y reflexión sobre la Educación Matemática.

Intentamos a través de esta traducción, ofrecer un capítulo de su último texto original. Pedimos disculpas desde ya por todas las imperfecciones, ya que el inglés de Freudenthal, como acota Alan Bishop en la introducción, es “Freudenthal-English” y a veces no es fácil de traducir. Pero lo que en todo momento se trató de mantener es el espíritu del maestro, su trato directo y sin tapujos, su convicción sin soberbia, su humildad de sabio, su humanidad y amor puesto en pos de la educación matemática de los niños, jóvenes y de todos aquellos que poseen el derecho de acceder a ella.

Esperamos haber podido lograr que la traducción opere como una especie de “puente” que acerque al lector al creador de la Educación Matemática Realista.

Diana Rosenberg (GPDM)

Traducción realizada por A. Rosenberg en 2009 y revisada por Ma. Inés Brumana y A. Bressan para uso interno del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Bariloche. 2012.

Capítulo 1

Matemática fenomenológicamente

1.1. ¿Qué es Matemáticas?

1.1.1 Seguro y cierto

¿Qué es matemáticas? Una pregunta espinosa. ¡No lo busque en el diccionario! Siempre que lo hice la respuesta fue errónea.

"Matemáticas" aparece en plural al igual que todavía es en francés "les mathematiques". En efecto, hace mucho tiempo atrás significaba un plural: las cuatro artes (las liberales que valía la pena que cultivaran los hombres libres). Matemáticas era el quadrivium, la suma de aritmética, geometría, astronomía y música, mucho más estimadas que las (más triviales) del trivium: gramática, retórica y dialéctica. Recién cuando este plural ya no fue entendido como tal, su "s" final fue usurpada por ciencias como física y economía, que históricamente no la merecían.

Inspeccionando más de cerca parecería que he contestado la pregunta "qué eran las matemáticas", a saber, en la era greco romana, en la edad media e inclusive algo después.

En la medida en que me son familiares las lenguas, puedo afirmar que el holandés es la única lengua en la cual el término matemáticas no es ni derivado ni se asemeja al internacionalmente aceptado de *Matemática*. El término holandés fue virtualmente acuñado por Simon Stevin (1548-1620), Wiskunde, la ciencia de lo que es cierto. Wis en zeker, seguro y cierto, es todo aquello que no admite duda alguna, y kunde, quiere decir conocimiento, ciencia, teoría. En efecto, desde la época de Stevin y aún antes, los matemáticos se han comportado como si esto fuera la definición correcta de matemática, pero como parecía ser una pretensión más que una definición no pudo caer en gracia a los ojos de los autores de diccionarios.

Aún cuando parecería ser pretensioso, fue una afortunada elección de Stevin denominar a una ciencia (y bastantes otras) por lo que entendió como su propiedad más característica, antes que por su contenido. La propiedad más característica de la matemática era la certeza, o por lo menos eso creía él. Pero, ¿cuán cierta es la "certeza"? ¿No es, en realidad, el sentido común la certeza primera, la más cercana, y no hay algo tan alejado del sentido común como la matemática? El sentido común da las cosas por sentado, por razones buenas o malas. La matemática pide buenas razones, como lo hace cualquier ciencia, quizás hasta mejores que cualquier otra. La necesidad de certeza en la ciencia no es satisfecha dando las cosas por sentado, la certeza debe buscarse y, en la matemática, esto se hace mediante una actividad mental muy peculiar. Es esa actividad mental, más que el contenido de la materia, lo que caracteriza a la matemática como el campo en el cual esta actividad puede ser ejercida más adecuadamente y con mayor eficacia. Debemos recordar esto para tratarlo más específicamente a su debido tiempo: esto es, el método matemático como actividad mental que, por alguna misteriosa razón, crea certeza y lo hace, aparentemente, sin parangón.

¿La matemática como el campo del más adecuado y eficaz uso del método matemático? Entonces hay campos fuera de la matemática en los cuales el método matemático se aplica, quizás menos adecuada y eficazmente. ¿O es que realmente estos campos no están fuera de la matemática? ¿Hasta dónde se extiende el campo la matemática? ¡Volvamos a Stevin! De hecho él no usó la palabra wiskunde sino wisconst, o como lo escribiríamos hoy en día, wiskunst. Kunde significa ciencia mientras que kunst significa arte. En nuestras escuelas de medicina se enseña "geneeskunde", la ciencia de curar, mientras que la práctica médica es "geneeskunst", el arte de curar. Como dador de nombres a dominios de investigación, Stevin prefirió el sustantivo kunst al de kunde, arte al de ciencia. "Arte" en "Arte y Ciencias" suena diferente de "arte" en "Arte y Oficios" ¿Con qué segundo sustantivo combinó Stevin "arte"? Stevin era ingeniero, pero estoy seguro que él lo entendió de ambas maneras, como lo hicieran muchos, tanto antes como después de él.
La matemática como un arte, un arte mental, sin duda, que para mucha gente estará más cerca de los "oficios" que de las ciencias, una herramienta más bien que un objetivo en sí misma, más importante porque funciona más que porque es cierta. Pero, ¿por qué funciona?, ¿porque es cierta? A pesar de que mucha gente confía en la matemática más de lo que ella merece, resulta útil solamente si es correctamente aplicada. ¿Pero que es correcto o erróneo? ¿Hay alguna manera de verificarlo? Y, si la hubiere, ¿no sería tal verificación una vez más matemática? Y si lo fuera, ¿en qué medida? Una vez que uno admitió que la matemática es un arte, no se puede eludir la responsabilidad de juzgar si, en casos particulares, está siendo usada apropiadamente o más bien abusada; mientras se intenta decidir, uno se comporta una vez más como matemático. Tratemos de ilustrar esto con un ejemplo histórico bien conocido: a pesar de sus precursores, la probabilidad comenzó con la discusión de dos problemas. El segundo era el *probléme des partis*. Permítanme presentarlo en una versión simplificada: dos personas A y B se pusieron de acuerdo en una serie de juegos (con igual probabilidad de ganar para cada uno): el primero en ganar cinco puntos va a llevarse todas las apuestas. Sin embargo, la serie debe ser interrumpida cuando el resultado es A: 4 B: 3 ¿Cómo se dividen las apuestas? Las personas no coincidían. Algunos decían: la razón era 4:3; otros decían (5-3):(5-4). Efectivamente, hay algo para decir a favor de cada una de estas perspectivas. Pero, ¿qué dice la matemática? O mejor dicho, ¿qué dijo el matemático Pascal cuando se le pidió su opinión? Hoy en día diríamos: ¡Subastemos el estado de cosas! ¿Cuánto pagarían A' y B' para continuar? Si B igualara los tantos, las apuestas deberían dividirse cincuenta-cincuenta pero la probabilidad de que lo hiciera es, de hecho, del 50%. Por lo tanto, él puede reclamar solamente un cuarto de las apuestas. Y así la justa razón del reparto es 3:1.
¡He aquí el matemático llamado a decidir sobre la correcta o errónea manera de aplicar el arte de la aritmética! En efecto, no era de ninguna manera obvio al principio que la decisión, más que ser una cuestión de opinión o de gusto o de sopesar pros y contras, fuera otra vez una de aritmética, es decir de matemática. Y se necesitaba con urgencia un matemático para descubrir esta perspectiva.
Como herramienta útil, la matemática ha conquistado una rica variedad de áreas de rápida expansión de la ciencia y de la sociedad; y, como

herramienta, se ha mostrado indispensable para una multitud de personas, que usan la matemática porque les resulta imprescindible.
Pero nuevamente: ¿cuán segura y cierta es esta matemática?
El Voyager 2 llegó un segundo tarde a su encuentro con Neptuno- luego de haber viajado por 12 años, es verdad. Así de segura y cierta es la matemática. ¿O lo es realmente? Los astrónomos cuentan en millones de años y, en la escala de millones de años, un segundo sería un día.- al menos si se admite la proporcionalidad. Pero ¿segura y cierta? Cuando predijeron el momento de la aproximación más cercana, agregaron algunos ·+ o – para dar cuenta del "error medio". "La matemática conoce solamente números precisos" una vez escuché a un purista afirmar. "¿Y qué pasa entonces con el cálculo de error?" le pregunté. "Eso es física, geodesia, astronomía" replicó él; "inventadas, efectivamente, por matemáticos involucrados con la matemática "fuera" de la matemática". Juzgar cuán segura y cierta alguna matemática aplicada pueda ser es nuevamente matemática, matemática formal en cálculo de error; como tal es segura y cierta siempre y cuando sea correctamente usada, esto quiere decir, con comprensión y no como receta, que es lo que lamentablemente ocurre más frecuencia en su versión educativa. Hoy en día la teoría del error, tal como es aceptada, ya no alcanza para juzgar cuán segura y cierta es la matemática "fuera" de la matemática. ¿Qué podemos decir de los numerosos "modelos matemáticos? La matemática es segura y cierta hasta el grado en que uno se enfrenta con la pregunta cuán segura y cierta es. Pero no nos olvidemos de la matemática como un fin en sí misma, que atrajo adeptos tan tempranamente como en la antigüedad babilónica, y que históricamente ha mostrado ser indispensable como un motor potente para su propio desarrollo a largo plazo. Es un importante aspecto, pero de menor importancia para nosotros aquí, ya que nuestro sujeto de la educación matemática abarca un grupo mucho más grande que sólo el de futuros profesionales, de los cuales una vez más una pequeña minoría elige la matemática como un fin en sí misma.
Aún cuando la certeza "interna" de la matemática es dada por sentado, resta algo por decir sobre su certeza "externa". La respuesta a esto está prediseñada: depende del comportamiento matemático de quien se arriesga - un punto a seguir discutiendo. De todos modos, Simon Stevin puede haber tenido buenas razones para caracterizar a la matemática como lo que es seguro y cierto, y sus predecesores y sucesores tuvieron que comportarse de acuerdo con esta afirmación, aun cuando dejaron de reflexionar sobre ello. Pero, ¿qué pasa con la gran mayoría? ¿Somos demasiado audaces al suponer que aun para el hombre de la calle la certeza es el rasgo más distintivo de la matemática, mucho más allá de los límites de su habilidad para manejarla? Si esta suposición es correcta, uno puede preguntarse cómo se llegó a esa confianza en la certeza de la matemática. La respuesta está determinada por la manera y el grado con los que la gente ha conocido la matemática.

A mucha gente se le enseñó la matemática como un conjunto de reglas de procesamiento o como las llamamos en matemática de algoritmos -una experiencia agradable si ellos han aprendido a manejarlas y una desagradable si han fallado. Una razón por la cual los docentes la enseñan de esta manera es la tradición: es la manera en que la aprendieron, mientras que han olvidado que no fue la manera en la que realmente entendieron la matemática si es que alguna vez lo hicieron. La otra razón es la estructura de la matemática que, a diferencia de cualquier otra ciencia, puede ser montada sobre reglas y algoritmos. Es un hecho sorprendente que esas reglas nunca fallen o -si fallan- entonces es el usuario quien se siente culpable, busca errores propios y los trata de reparar. Pero, ¿a quién le resulta sorprendente este hecho? ¿O es simplemente una creencia infundada -subjetivamente infundada? Permítanme cerrar esta subsección contando una pequeña historia:

Una mujer de 75 años, cuya ayuda es regularmente requerida por chicos y estudiantes sumergidos en sus deberes, conoció - quizás por primera vez en su vida - a un matemático profesional, justo cuando había enseñado a un estudiante de College el algoritmo (euclidiano) para encontrar el máximo común divisor de dos números enteros. Preguntó al matemático por qué esto funciona o más bien, si es que había alguna razón del porqué. El matemático le ayudó a contestar la pregunta por sí misma. Quizás valga la pena mencionar como lo hizo. Dio una simple pista: si a y b son dos números enteros y $a>b$ (en realidad eligió un par de dichos números), compare el máximo común divisor de a y b con el de a y $a-b$.

La siguiente vez le planteó otra pregunta: fue sobre un algoritmo anticuado para encontrar la raíz cuadrada, en el cual había creído toda su vida. Ahora el matemático se negó y en su lugar le enseñó un algoritmo mucho más eficaz, al que aceptó comprehensivamente.

Otra vez le preguntó por qué bajo la adición, sustracción y multiplicación de dos números la suma de los dígitos se comportaba en corrrespondencia con los números originales -un fenómeno que fue fácilmente explicado.

Nunca le preguntó al matemático por qué, haciendo aritmética, la operación inversa es la ”prueba la suma”, por qué los algoritmos de varias operaciones aritméticas funcionan, por qué las operaciones son conmutativas, por qué la factorización de primos es única. ¿Por qué tenía dudas de ciertas reglas (si es que las tuvo) y aceptó otras? Más adelante trataremos de contestar esta pregunta.

1.1.2. La matemática como sentido común

Antes pregunté si el sentido común no es en realidad la certeza primordial, la más abundante y confiable fuente de certeza. En cierto sentido lo es, a pesar de que desde tiempos lejanos, los filósofos y exploradores nos han advertido contra el sentido común, que es fácilmente engañado por la sabia Naturaleza. El hierro es más frío que la madera -esto es sentido común, al menos en la medida en que uno usa el termómetro del sentido común de sus propios dedos. Desgraciadamente algunas veces esta afirmación deja de ser verdadera: por ejemplo, cuando se lo expone al resplandeciente sol, al hierro se lo siente más caliente que a la madera. “La conducción del calor” nos ayuda a salir de este dilema. Éste es un sentido “no común”, aunque si común para los físicos y para la gente que aprendió y no olvidó las lecciones de física. La debilidad de las lecciones escolares es que se olvidan y las de física no son una excepción a esta regla. Cuando esto ocurre, es buena suerte si la materia aprendida no valió la pena recordarla y mala suerte si

hubiera valido la pena. A su debido tiempo reconsideraremos y discutiremos la pobre permeabilidad de la membrana que separa la experiencia escolar y áulica de la experiencia de vida y vamos a buscar medidas para mejorarla.
Mi ejemplo confrontó el sentido “no común” de los físicos con el sentido común de la gente común. Pero, ¿es realmente tan sencillo? Si algo es de sentido común, eso es visto por cómo es verbalizado en la lengua común. De acuerdo con el sentido común el sol sale y se pone. Por el principio de autoridad ha sido aceptado que esta afirmación es corregida, si es necesario, por el adverbio “aparentemente”. Lo que es más, los argumentos que dan sustancia a por qué la realidad es diferente, son aceptados por el principio de autoridad, como resulta aparente desde la manera casi verbal en la cual son repetidos. Me pregunto cuántas personas estarían en condiciones de decir qué fenómenos y argumentos en este caso particular llevó a los astrónomos a distinguir entre apariencia y realidad. Pero muchas distinciones entre apariencias y realidades también se han movido al estado de sentido común y son verbalizadas en lenguaje común, aun en el lenguaje cotidiano. Sin embargo, la salida y la puesta del sol ocurre en este contexto de apariencias y realidad solamente en la medida en que nos referimos a la astronomía e inclusive los astrónomos no son astrónomos todo el tiempo.
De acuerdo con el sentido común la tierra era plana. Esta afirmación basada en el sentido común difiere esencialmente de la precedente porque en (lo que los matemáticos llaman) una primera aproximación la tierra efectivamente es localmente plana y nos permite aún hoy comportarnos como si así fuera. Sin embargo, no sólo como astrónomos estamos comprometidos con su redondez, sino también como viajeros, y tan tempranamente como se nos muestran globos terráqueos y mapas. A pesar de esto, inclusive los adultos muchas veces se preguntan sorprendidos por qué el sol está más caliente al mediodía que a la mañana y por la tarde cuando está “más cerca de la tierra”. Sin embargo, este conflicto del sentido común no es más que un ejemplo de bajo nivel de un comportamiento que no es inusual aun en niveles de mayor cognición; de hecho, es un ejemplo, y uno que llama la atención, de la aplicación de modelos simplistas en vez de aquellos rápidamente disponibles y sofisticados. Si la cosas no han cambiado mientras tanto, el principio didáctico en física y química es pelear contra el sentido común, exorcizándolo: las ideas del sentido común obstruyen la científicas. Los investigadores se preguntan por qué la gente- aun aquellos que han recibido instrucción en física en la escuela- siguen adhiriendo a las ideas del sentido común, que debería haber sido expelido hace ya mucho. Tomemos el siguiente ejemplo:

> Una y otra vez, a los estudiantes se les presentan pruebas del siguiente tipo: un ciclista, dos flechas opuestas en el piso, y la pregunta de si la fuerza hacia adelante es mayor que la que va hacia atrás (la de fricción). O el recorrido parabólico de una pelota tirada para arriba y la pregunta de en qué punto experimenta la fuerza máxima. Los investigadores buscan una y otra vez explicaciones del por qué mucha gente reprueba estos exámenes. Olvidan que muy frecuentemente la fuerza está asociada con velocidad (más que con la aceleración). Descartes y Leibniz matematizaron la fuerza como una función de la rapidez (a pesar de que no estaban de acuerdo respecto del tipo de función) e inclusive en el siglo

pasado la conservación de la fuerza significaba conservación de la energía. Aún hoy en día (y aún en el lenguaje técnico) la definición de Newton de fuerza no ha sido desplazada para nada por otros usos. A pesar de que el físico en la calesita siente la fuerza centrífuga, el físico afuera la llama aparente. ¿No sería sabio reconocer este hecho en la enseñanza y tratar de manera comparativa con varios conceptos de fuerza y apreciarlos de acuerdo con sus méritos?

Por lo general, entiendo que en la enseñanza sería más recomendable comenzar con ideas de sentido común antes que rechazarlas como si fueran desactualizadas y optar por suprimirlas. Esta convicción es apoyada en todo caso por el hecho del desarrollo más o menos espontáneo de la matemática.
En la matemática anclada en el sentido común el ejemplo más sorprendente es, sin duda, el número entero. (La Semejanza es otro ejemplo, aunque superficialmente menos sorprendente). Los niños adquieren el número en el flujo de actividades físicas y mentales, y esto hace difícil para los investigadores encontrar cómo ocurre esto en detalle. La adquisición del número es fuertemente apoyada (si no hecha posible) por los correspondientes numerales en la lengua hablada, cuya adquisición puede ser más fácilmente seguida por una investigación observacional. A medida que el niño adquiere los medios estructurales sintácticos para construir nuevas oraciones, lo mismo ocurre con los medios estructurales morfológicos para construir numerales hablados, lejos de la necesidad y muy lejos de la apropiación física y (al menos inicialmente) mental del número. Siguiendo en esta secuencia está la primera expresión verbalizada de la mente matemática, un rasgo sorprendente que puede difícilmente ser sobreestimado, a pesar de que no ha llamado mucho la atención, debido a que es simplemente un hecho y es experimentado como sentido común, que no debe ser cuestionado. La morfología de los numerales hablados (verbales) es, lo que es más, el primer algoritmo de carácter matemático que el chico adquiere: un algoritmo basado en el sentido común adquirido por medio del lenguaje común.

Mi afirmación que los investigadores han prestado poca atención a las primeras y espontáneas actividades aritméticas de los niños podría parecer contradictorio con el título de la obra de Piaget (con Szeminska) “La genése du nombre chez lénfant” (“La génesis del número en el niño”) (1941). La contradicción, sin embargo, reside sólo en el título, ya que el trabajo en sí mismo no tiene nada que ver con la génesis del número. En efecto, la génesis de la mente ha sido completamente estudiada por Piaget en sus trabajos anteriores. El enfoque genético debería ser cuidadosamente distinguido del epistemológico que eligió en su trabajo posterior. Para poner en claro qué involucraba este cambio de rumbo, permítanme brevemente esquematizar la historia del concepto de número y su enseñanza.
En contraste con su geometría, la aritmética de Euclides se basa en el número entero del sentido común y, hasta la mitad del siglo XIX, el enfoque científico del número siguió siendo el del sentido común. Tan pronto como se tienen que tratar los infinitos *aritméticamente*, este enfoque basado en el sentido común es empañado por ser paradojal.

Cantor sacó esta imperfección abandonando el enfoque basado en el sentido común a favor de uno más sofisticado, más tarde extendido por Frege-Russell en una manera aún más refinada desde *infinitos* hasta el número natural *finito* y su fundamentación.
En la epistemología de Piaget, *episteme* significa un estado de conocimiento tan avanzado como accesible a sí mismo, que en el caso del número ocurre ser el enfoque de Frege-Russell, al menos como lo interpretó él mismo (y en un estado posterior, el sistema de Bourbaki para la matemática en general). Este altamente sofisticado concepto de número es el criterio de prueba de Piaget, su herramienta para evaluar la comprensión de los niños del número a diferentes edades, lejos de situaciones de sentido común, y usando un lenguaje artificial, ambos creados para la evaluación. Obviamente, ésta no es la manera para rastrear la génesis del número. En cambio resultó ser la fuente de tales rarezas como la no-conservación, nunca observadas en los lamentablemente infrecuentes ejemplos de investigación genética. Es una pena que la obra monumental de Piaget todavía no haya sido apreciada en conjunto. Yo inclusive me pregunto si se notó su cambio de genesiología a epistemología. Más tarde volveré a esta cuestión.

Permítanme agregar que las raíces del número basadas en el sentido común se extienden más (o son extendidas) a la par del aprendizaje del lenguaje que procede desde el habla, a la lectura hasta la escritura. ¿No vale la pena notar que, en el lenguaje escrito y gráfico, los símbolos matemáticos para números naturales preceden a sus equivalentes alfabéticos, construidos fonéticamente de los numerales hablados ("3" precede a "tres", "100" precede a "cien")? De todas maneras, los símbolos matemáticos de números naturales están integrados a la lengua escrita. La alfabetización literaria y la numérica se superponen en esta región y aun más allá. El principio del valor de posición, a pesar de desviarse del principio de seriación que prevalece en el lenguaje escrito común, participa en la integración tal como lo hacen- en un mayor o menor grado en varias lenguas- las operaciones básicas con números naturales.
He traído estos ejemplos sorprendentes de la superposición e integración del lenguaje matemático y común como testigos de los orígenes de sentido común de la temprana aritmética. Al árbol del conocimiento, enraizado en el sentido común, le ha brotado, por así decirlo, la aritmética como una rama por derecho propio -tanto históricamente como en las historias individuales de vida. En el curso de la vida el sentido común genera hábitos comunes, en particular, en lo que se refiere a aritmética, algoritmos y patrones de acciones y pensamientos, inicialmente apoyados por los paradigmas que a largo plazo son suplantados por las abstracciones. Estos productos del sentido común adquieren a su vez el estado de comportamiento de sentido común, mientras los orígenes del sentido común pueden haber sido inclusive olvidados. Visto históricamente, ha habido estadios, o aun niveles de sentido común, y al igual que para el desarrollo individual: lo que es entendido por sentido común puede depender de la comunidad con la que se lo comparte.
¿Es el sentido común, entonces, algo así como el máximo común divisor del conocimiento compartido por los miembros de una cierta comunidad? En efecto, pero es un común divisor muy grande con relativamente pocas

divergencias mutuas, al menos en la medida en que la emoción es chequeada por la cognición. En el caso de *le problem des partis,* las partes peleaban por cómo dividir las apuestas hasta que un juez resolvió la pelea, aunque apoyado no en la fuerza de la ley común sino en el sentido común. Éste era un sentido común más sólido que el de las partes en litigio, que fue echado a perder por mal entendidos algoritmos semejantes a leyes. La decisión del juez creó un nuevo paradigma del sentido común.

Mientras que los historiadores pueden rastrear el desarrollo cognitivo de la humanidad como un desarrollo del sentido común, es difícil intentar lo mismo con las historias individuales, ya sea por observación o reflexión; sin embargo, las aplicaciones erróneas de reglas y las transferencias erróneas de patrones pueden dar indicios. En cualquier estadio del desarrollo del sentido común puede ser significativo cuanto ha contribuido el propio aprendiz a su progreso. Un extremo es aprender sin que alguien le enseñe intencionalmente, y el otro es aprender lo que ha sido lisa y llanamente impuesto, y como lo primero está más profundamente enraizado en el sentido común previo, puede importar en algún momento en el futuro cómo tuvo lugar el desarrollo en el pasado. Importa si, por ejemplo, un algoritmo aritmético fue adquirido como una versión simplificada y más eficaz de actividades de sentido común anteriores, o si el simplificar y optimizar (o inclusive el algoritmo mismo) fueron impuestos. Seguro, algunas personas dotadas, aprenden a aplicar hasta algoritmos impuestos adecuadamente, otros –quizás la mayoría- fallan en identificar los nuevos procedimientos algorítmicos con los del sentido común de los cuales se deberían haber originado a través de simplificar y optimizar. Fallan porque en algún momento del pasado se les pidió dar saltos mentales que excedían sus potencialidades. A pesar de que aprendieron perfectamente el algoritmo, van a fallar al usarlo en situaciones de la vida real donde cuenta el sentido común. Van a depender en su lugar de operaciones menos eficientes de menor nivel.

Lo que sigue es un ejemplo bien conocido: hacemos un viaje de 215 km., ¿cuánto más tendremos que viajar luego de 88 km?

Los niños razonan: 88 + 12 = 100, +100= 200, +15= 215. La resta no es reconocida (o no se animan), para estos alumnos la tecla del signo menos en la calculadora no tiene uso.

Los investigadores han señalado esta “regresión” y se han maravillado con ella. Rara vez, sin embargo, ha sido diagnosticado como una consecuencia de la instrucción, ya que no pudieron concebir una instrucción alternativa a la de la imposición del nuevo algoritmo (que fue muchas veces adornada con explicaciones para salvaguardar la conciencia). El nuevo algoritmo, sin embargo, nunca tuvo la oportunidad de alcanzar el estado de sentido común. Con temor de aplicar un algoritmo equivocado o el correcto aplicarlo mal, el aprendiz prefiere confiar en su lugar en lo que ha quedado de sentido común en su mente.

Tratemos ahora de contestar la pregunta planteada al final de la historia del personaje algorítmico de 75 años. El hecho de que después de más de medio siglo ella todavía maneje varios algoritmos lo suficientemente bien como para enseñarlos, la caracteriza como una persona algorítmicamente dotada. ¿Por qué se preocupa por un tipo de regla y acepta otras dándolas por sentado? Bueno, el sentido común es dado por sentado. Las reglas aprendidas por imposición van a ser enseñadas de la misma manera, al menos si el aprendiz

que se hizo docente es capaz de enseñarlas. Pero habiendo sido impuestas, ellas nunca tuvieron una verdadera oportunidad de desarrollarse hacia un sentido común de orden más alto. ¿Es un privilegio de gente vieja y sabia dudar de lo que se parece al sentido común o es que no se puede enseñar este comportamiento a los jóvenes?
¿Por qué “seguro y cierto”?, pregunté antes, y anuncié que esto podría ser una cuestión de comportamiento. ¿De sentido común? Si, pero también -agregaría ahora- de una tendencia a dudar del sentido común.
Hasta ahora no he dicho nada sobre la geometría (excepto por una cláusula en paréntesis) en lo que concierne al sentido común como la raíz de la matemática. Pero estoy convencido de que la geometría hasta precede a la aritmética en el desarrollo del individuo. Uno de los síntomas más tempranos -así lo entiendo- es la toma de conciencia de la semejanza entre figuras, esto es observado tan temprano que parece innato (¿o podría inclusive ser así?)
La “Semejanza” es inclusive característica de lo que sucede con la geometría porque el lenguaje cotidiano no tiene una palabra para ella (éste ya fue el caso en Grecia, los matemáticos griegos tuvieron que inventar una palabra para ella, lo que hicieron restringiendo a la geometría una palabra que en el lenguaje cotidiano significa cualquier tipo de semejanza). También caracteriza el desarrollo individual de la geometría hacia la matemática: hasta los grados superiores no se les da a los alumnos un término para la peculiaridad sorprendente de la semejanza -obviamente porque uno no se anima a hablar de semejanza geométrica hasta que uno se siente en condiciones de definirla formalmente. Esta parsimonia respecto del lenguaje geométrico, que es más difícil, en efecto, contrasta fuertemente con la manera en la instrucción aritmética, en donde la secuencia de números es dada al alumno servida en un plato, por así decirlo.
La geometría es condenada a quedarse detrás de la aritmética en el desarrollo de la expresión verbal. La argumentación geométrica es mantenida en el nivel de “puedo verlo” y, cuando se hace un intento de ascender a un nivel más alto, puede ser demasiado tarde en la mayoría de los casos. El sentido común no logra la oportunidad de desarrollarse en más sentido común -una consecuencia de falta de instrucción.

1.1.3. ¿Por qué la Matemática es diferente?

Seamos claros sobre una cosa: Para la visión y mentalidad de la mayoría de las personas, la matemática, a pesar de estar muy basada en el sentido común, es más remota de él que cualquier otra cosa. ¿Qué es lo que hizo que se alejara tanto? ¿Cuanto más profunda la raíz más lejos la parte más alta? La matemática es diferente, en efecto, y vamos a reparar en este hecho cuando vayamos al tema de la educación. Desde sus inicios ha sido diferente. Es la más antigua entre las ciencias, aún precediendo a la astronomía en más de 2 milenios. La matemática fue más fácilmente inventada, ya que era simplemente una cuestión de sentido común -solamente mejor organizado. Y se desarrolló de esta forma, haciéndose cada vez más organizada, de acuerdo con un esquema que voy a describir.
Uds. conocen que 3+2=5 y el área de un rectángulo por el sentido común... Pero tan pronto como la naturaleza se ve involucrada, el sentido común se vuelve engañoso como todo el mundo sabe. Porque el sentido común

necesita, aún más urgentemente que la matemática, expresarse y enriquecerse por transferencia de conocimiento -y aún más urgentemente cuánto más lejos esté una ciencia de la matemática-, y aún donde el sentido común es una molestia puede persistir junto con visiones más educadas. A diferencia de la ley de inercia o de la teoría de la gravedad de Newton, los elementos de la matemática han sido inventados independientemente unos de otros en varios lugares del mundo. Mientras las ciencias sufrieron revoluciones, la matemática evolucionó, aun durante dichas revoluciones y bajo su influencia. ¿Cómo explicar esta diferencia, qué dinámica le facilitó a la matemática esta aparente continuidad de desarrollo?

El sentido común, con el fin de hacerse matemática genuina y en función de progresar, tuvo que ser sistematizado y organizado. Las experiencias de sentido común, por así decirlo, se unieron en reglas (tales como la de conmutatividad de la suma); y esas reglas, por su parte, se convirtieron en sentido común, digamos de orden más alto, como una base de matemática de aun más alto orden- una tremenda jerarquía, construida gracias a un importante interjuego de fuerzas.

Yo he subrayado antes, y lo vuelvo a hacer, que nuestra primera matemática verbalizada -la del número- se distingue de cualquier otro conocimiento verbalizado por el hecho de que su mera forma, desprendida de sus contenidos, prefigura (sino irradia) su forma madura y sus contenidos. Su tremenda estructura- estrictamente regular luego de un corto comienzo arcaico- no tiene rivales en ningún otro fenómeno lingüístico, y respecto de esto el fenómeno es interlingüístico en la medida en que las lenguas han sido creadas con la necesidad del número. Por la misma razón, el número es aún más sentido común que cualquier otra idea humana. Lo que es más, el hecho mismo es sentido común a tal punto que es difícilmente notado y raramente hecho explícito, a pesar de haber influenciado enormemente el pensamiento matemático al igual que el pensar ‘sobre’ la matemática. El isomorfismo formal entre el objeto mental “número” y su expresión numeral, que parece como su identidad sustancial, ha sido la fuente del pensamiento sobre las relaciones entre la matemática y el lenguaje, de identificar el lenguaje matemático con el lenguaje de la matemática, y de visualizar a la matemática como un mero lenguaje.

Dicho correctamente, no ha sido tan simple como eso: lo que es considerado ser verdadera matemática comenzó empobreciendo esa estructura primordial del número entero, privándolo del chaleco de fuerza posicional (la caída primordial por así decirlo) mediante la cual la matemática escapó y creció por encima del lenguaje común. Fue el error histórico de la Nueva Matemática no notar lo profundo de dicha caída, que finalmente se transformó en un salto, desde el numeral posicionalmente estructurado hacia el más abstracto libre número entero. El número es el primer dominio en que el simbolismo adquiere una realidad por sí mismo, una realidad aparentemente independiente de su creador, quien, a su vez, trata de reorganizar su creación y por medio de él su entorno. Pero aún esa organización podría parecer haber existido desde siempre, por lo menos siempre que nuestra visión se restrinja al número entero, que Kronecker creyó que había sido creado por Dios, solamente para ser arruinado por los esfuerzos humanos para trascenderlo. Estructurar, ya sea aplicada a productos o a procesos, significa enfatizar la forma. La primera estructura no trivial como tal, es decir,

el número entero como producto del proceso de conteo, engendra un rico proceso y un producto contenido que, organizado por nuevas estructuras, engendra a su vez nuevos contenidos - un proceso cíclico sin fin.
A través de reflexionar sobre su propia actividad el hombre descubre paradigmas, que son abstraídos en patrones de acción mental y hechos conscientes como esquemas mediante los cuales el pensamiento es organizado - gracias a nuevo progreso -, esquemas adaptables, que permiten variedades de uso, asi como, con el mismo derecho, esquemas rígidos de propósitos únicos que, gracias a su rigidez, pueden llevar una vida propia, y son llamados algoritmos. Estas formas, a su vez, pueden transformarse en el tema a tratar, un núcleo, por así decirlo, de los contenidos de más alto orden - nuevamente un proceso repetitivo, un interjuego de forma y contenido, que caracteriza al pensamiento matemático. Este interjuego incluye la expresión lingüística por medio de la cual la matemática es comunicada como producto y como proceso. Nuevos contenidos y formas requieren de una nueva terminología que, en función de ser eficaz, tiene que ser optimizada, tanto simbólica como notacionalmente. Los símbolos y notaciones, en el curso de la reflexión nuevamente se transforman en materia central manejada como tal.
El contenido es el resultado del descubrimiento primordial, así como la forma lo es de la organización, a pesar de que por supuesto, la organización es también materia de descubrimiento aunque secundario.
Históricamente, los descubridores incesantemente cambiaron sus tareas. En efecto, cada descubridor se comporta como un organizador tan pronto como se propone difundir sus descubrimientos, a pesar de no ser éste un rasgo específico de la matemática. En la matemática, sin embargo, organizar y reorganizar es una tarea continua, y las formas de organización recién adquiridas pueden transformarse en contenido en el sentido de tema a tratar como tal. En lo que se refiere a la longevidad, ningún sistema de matemática puede igualar al de Euclides, que llegó casi a sofocar su sujeto Pero sólo un pequeño espacio de respiración le fue permitido a Bourbaki: pasó de moda casi al mismo ritmo en que fue desarrollado: pasó de moda como sistema, esto es, mientras daba nacimiento a un nuevo contenido.
Éste es el motivo por el cual la matemática es diferente y por qué parece aún más diferente a más gente. Los esquemas de pensamiento pueden ser impuestos, los algoritmos pueden ser enseñados tan rígidamente como se programan las computadoras y, sin duda, estos esfuerzos no son en vano en personas algorítmicamente dotadas, los conceptos pueden ser enseñados por definiciones lingüísticas y esto nuevamente funciona muy bien con personas que son buenos verbalizadores. Por último, pero no menos importante, el interjuego entre forma y contenido incluye lo que es comúnmente llamado matemática aplicada, siempre y cuando el entorno en el cual la matemática es aplicada ysea visto bajo la lente de la matemática. El "Modelo matemático" es el término de moda para forma, abstraído de la aplicación paradigmática, y nuevamente los modelos y su uso se transforman en el tema de reflexión de la matemática, como si fueran parte del entorno. Se puede enseñar a modelar también bajo imposición - exitosamente o no- dependiendo de la preparación del aprendiz.
Visto todo en conjunto, esto explica porqué la matemática es diferente, tanto objetiva como subjetivamente, y también explica porqué las personas no

captan la razón por la cual es diferente. El contenido debe ser asimilado mientras que la forma puede ser imitada con el propósito de reproducción. Pareciera más fácil enseñar y aprender la forma estructurada que el contenido desestructurado. Es tan fácil caer en esta tentación como es difícil resistirse a ella. Ésta es, entonces, la imagen familiar de la matemática: un conjunto de algoritmos, tan falto de valor como estricto si uno no entiende cómo y por qué funciona. Es una forma de ver engañosa, que se la considera falsa tan pronto como se deben aplicar esquemas menos estrictos

Vamos a recordar la razón por la cual matemática es diferente cuando discutamos la educación. Ahí vamos a explicar por qué la matemática es aprendida de forma diferente y por lo tanto debería ser enseñada de manera diferente, es decir ni como forma ni como contenido sino manteniendo el respeto frente al interjuego entre ellos, expresado en el proceso de enseñanza/aprendizaje! Aprender es progresar en conocimiento y habilidad. Su interjuego no suena como el de instrumentos y voces en un concierto. Es más bien un cambio de perspectiva del contenido a la forma y viceversa, llevando a niveles aún más elevados, mediante saltos tan altos como el aprendiz pueda realizar, y guiados, pero no levantados por el maestro.

1.1.3.1. Ejemplos

¡Extendámonos en el interjuego entre forma y contenido! Como he subrayado arriba, el origen de la secuencia de números es la forma, inclusive la forma lingüística. Mientras se la va usando para contar va adquiriendo contenido—una rica variedad de contenidos. Si en cambio es abstraída de la variedad de fenómenos contables, adquiere el status de objeto mental que es más o menos el número entero formal, aunque todavía atado al formal chaleco de fuerza del sistema decimal, y aún atado por cortas riendas a contar ‘algo’, cuyo objetivo es el contenido. La adición y la sustracción tienen sentido como operaciones - contenido en preparación para su práctica formal- que por algún tiempo permanece apoyado por modelos los cuales surgen a su vez como contenido. La conmutatividad de la adición es sugerida por lo que significó la adición, como contenido antes de adquirir el estado - por lo menos implícito- de regla formal: puede entonces, a un nivel superior, transformarse en materia de contenido matemático, cuando es estudiada por ejemplo con sus consecuencias en el contexto de leyes operativas. La relación entre adición y sustracción surge como un tema de contenido antes de ser formalmente aplicada, con el fin de transformarse una vez más en tema y contenido en el contexto de estructuras algebraicas.

Salteemos la multiplicación, que muestra características similares, y pasemos a la divisibilidad. Esto surge en el contexto de la distribución, que es contenido, pero más rápidamente que cualquier otra cosa en aritmética adquiere el más sorprendente status formal, sólo para recuperar el de contenido de la teoría numérica. Allí es donde se transforma en materia de escrutinio aritmético, en particular estimulado por el fenómeno de número primo, que significa, en la medida en que se refiere al contenido, que el mismo resiste todo arreglo en patrones rectangulares. La búsqueda de números primos y la investigación sobre números primos es muy amplia en contenido matemático. Pero la convención de no admitir el número 1 como primo, es formalmente motivada, debido a la preferencia por una fácil

formulación del teorema de factorización prima única. Extender la divisibilidad a otros dominios (como anillos polinómicos) es un procedimiento formal, donde el rol del 1 es reemplazado por los elementos inversos. La suma de dígitos (en notación decimal) provee un criterio formal para la divisibilidad por 9, a pesar de que su prueba, al menos en un bajo nivel requiere de razonar sobre contenidos, por ejemplo, desplazando bolitas en los arcos del ábaco. El círculo del reloj sugiere módulo aritmético 12. Operar con módulo de un número entero es una actividad formal, de la cual dichos objetos matemáticos surgen como anillos y campos finitos, que a su vez se transforman en contenidos matemáticos. Manipular formalmente $\sqrt{2}$, "como si el cuadrado fuera 2", adquiere contenido matemático en el dominio polinomial módulo x^2-2.
El número positivo debe su existencia al contexto geométrico de distancias. Los números positivos y negativos (junto con el 0) forman el así llamado número real, más allá del cual está el número imaginario o complejo. En resumen, históricamente (para ver más sobre ello ir a (146), Capítulo XV) desde la antigüedad babilónica ha habido métodos -uno hasta podría decir fórmulas- para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas que surgen en la geometría o en puzzles. ¿No fue una pena -en particular viendo las buenas fórmulas para las ecuaciones cuadráticas- que frecuentemente una de sus "raíces" o hasta ambas, tuvieron que ser rechazadas como "falsas", meramente porque uno sólo conocía los números positivos?. Finalmente, alrededor del 1500, matemáticos corajudos se tiraron a la pileta. A pesar de ser "falsas" se podía calcular maravillosamente con estos números preservando y extendiendo las viejas leyes aritméticas. Y, un siglo después, a los números "negativos" se les asignó un lugar -geométrico- a la izquierda del cero, en la línea numérica que apunta hacia la derecha. El número formal adquirió un contenido gracias al cual el plano entero pudo ser ordenado. El requerimiento formal de que todas las ecuaciones algebraicas pueden ser resueltas produjo una actividad rica en contenido geométrico-algebraico en el plano entero. Apenas necesitamos agregar que pronto este contenido nuevamente se tornó formal -un nuevo eslabón en la larga cadena de forma y contenido. Gracias a la representación geométrica de Gauss, los números complejos (que se habían transformado en soluciones formales de ecuaciones algebraicas y habían sido largamente repudiadas como monstruos ontológicos) adquirieron respetabilidad y status de contenido.
Las propiedades formales comunes de ciertas estructuras algebraicas llevaron a definir el concepto de campo a través de requerimientos formales, con el obvio preconcepto de adicionar un nuevo objeto -el campo- a los contenidos matemáticos. Los esfuerzos de prestar contenidos a las divisiones formales por 0, y a series formales (divergentes) como ser 1-1+1-1+... son otro ejemplo del dramático interjuego entre forma y contenido. En la historia antigua, los esquemas formales para resolver ecuaciones cuadráticas geométricamente, mediante la así llamada aplicación de áreas, llevaron al descubrimiento de curvas luego reconocidas como secciones cónicas y redefinidas como tales por Apolonio, solamente para ser redefinidas nuevamente por medio de ecuaciones formales en la geometría cartesiana.
El término "variable", como es usado hoy en día, abarca la simbiosis de forma y contenido de la manera más sorprendente En un principio, las letras, ya sea las que indicaban puntos arbitrarios como en la geometría griega o las que

indicaban números arbitrarios como en el álgebra de Vieta, no fueron más que nombres genéricos fáciles para ese tipo de objetos. Sin embargo, en la imaginación cinética de los inventores del Cálculo y sus seguidores, así como en mecánica analítica, las letras se transformaron en símbolos de objetos físicos y matemáticos que variaban dependiendo del tiempo o debido a una mutua dependencia. Inicialmente la ley de esta dependencia no fue hecha explícita pero estaba dada implícitamente por el contexto matemático o físico inmediato, que podía ser una curva o un evento mecánico, que involucrara estos objetos matemáticos o mecánicos. Cuando los primeros símbolos literales de función aparecieron, esto es, para resolver la ecuación diferencial de la cuerda vibratoria, nuevamente no fueron más que nombres genéricos de objetos matemáticos; tan pronto se lo necesitó, ellos se transformaron en objetos variables. En el curso de la historia como en la matemática, se vive el día a día, podemos notar este incesante cambio hacia atrás y adelante entre letras como símbolos para “lugares vacíos” (indeterminados o incógnitas) y como símbolos para “objetos matemáticos variables”.
Como si fuera por necesidad nuestra exposición nos llevó al rol del lenguaje en el interjuego de contenido y forma. La forma lingüística debería ser bien distinguida de la forma (mental) abstracta. El lenguaje sirve para expresar tanto la forma (abstracta) como el contenido. Históricamente, la adición, la sustracción y la igualdad eran objetos mentales formales presentados en un lenguaje coloquial entreverado, mucho antes de que aparecieran los símbolos cortos: más, menos e igual (que luego cruzaran la fronteras de la matemática y penetraran el lenguaje coloquial). Y ésta es la manera en que aún ocurre hoy en día en las historias individuales. Por otro lado, razonar sobre estos símbolos, por ejemplo sobre el significado y el uso del signo igual, involucra abordarlos como tema, esto es, prestándoles el status de contenido. Lo mismo ocurre con los paréntesis como herramientas para estructurar expresiones formales y fórmulas. La necesidad de expresar lingüísticamente x^2 como una función de x requiere de la creación de herramientas lingüísticas, que remiten al contenido. Puede ser un tema de contenido si en una estructura de grupo la operación de grupo misma se llama adición o multiplicación. Esta elección formalmente decide si el elemento neutro es entonces llamado 0 ó 1. Interpretar, en sentido amplio, un grupo como una cuaterna que consiste de (1) un conjunto G, (2) un tabla de correspondencias de GxG (multiplicación), (3) un elemento (neutro) de G, (4) una tabla de correspondencias de G sobre G (inversa) y con ello cumpliendo ciertas condiciones (axiomas de grupo), significa que el lenguaje matemático está siendo tratado como si fuera un contenido.

1.1.4. La Matemática como actividad

Cuando distinguimos estadios de niveles de sentido común notamos que lograrlos depende de la contribución propia de cada individuo, de su actividad. El sentido común da las cosas por sentado, como ya lo he mencionado, mientras que la matemática exige buenas razones. La certeza debe ser buscada, y la manera en que se hace caracteriza a la matemática como una actividad que lleva a cada vez mejores versiones del sentido común. La mayoría de los nombres holandeses que Simon Stevin propuso para las diferentes ciencias involucran actividades más que objetos e instrumentos. La matemática es una actividad muy peculiar. ¿Pensar lógicamente? Depende de lo que "lógico" quiera significar. ¿Lógico como una ciencia establecida o como sentido común? ¡Pospongamos abordar esta pregunta!

La matemática como una actividad es un punto de vista bastante distinto de la matemática impresa en libros y grabada en mentes. Sin duda, la matemática es un cofre del tesoro lleno de herramientas, valiosas para aquellos que les pueden dar buen uso. Esto es verdadero para todo instrumento, muchos de los cuales pueden ser manejados por un niño sin experiencia (un interruptor para prender la luz de una habitación, una llave para abrir una puerta, un timbre para tocar) y muchos más que requieren de programas más sofisticados, pero minuciosamente optimizados para ser manejados, como los algoritmos en matemática.

Todo investigador, todo productor de matemática va a admitir rápidamente que la matemática es una actividad -su actividad privada, el producto de la cual puede o no ser publicado. En efecto, todo autor tiene derecho a que le respeten su privacidad. Y además, ¿por qué tendría que molestar al público con el cuento del proceso de producción tal como ocurrió? En efecto, el autor no debería guiar al lector de su trabajo a lo largo de vías equivocadas y hacia callejones sin salida explorados por él y finalmente abandonados. Pero, ¿no contribuiría a la comprensión del lector si le fuera permitido observar el proceso que lleva al resultado, como habría sido si el autor hubiera de alguna manera sospechado todo el tiempo lo que finalmente lo llevó a saber con certeza?. En el pasado algunos libros de texto, y aun artículos de investigación, eran escritos de esta manera, pero la fracción de matemáticos que prefieren este estilo de edición ha declinado constantemente.

Tratemos de evitar todo tipo de malos entendidos. Cuando hablo de productos de la actividad matemática no lo hago en el sentido restringido de nuevas proposiciones y teoremas. Incluyo pruebas, aún definiciones y notaciones, así como el esquema tanto escrito como del pensamiento. Leer matemática y escucharla también es matemática, la actividad matemática de reproducir lo que está siendo ofrecido, como si fuera la producción del mismo receptor. Reproducir debería ser una tarea más fácil que producir. Lamentablemente, el cada vez más común estilo de presentación frustra más de lo que favorece esta oportunidad. El estilo de presentación moderna crea la ilusión que lo que es seguro y cierto lo ha sido siempre en vez de mostrar que lo ha sido desde que se completó su descubrimiento y se pulió su presentación. Pero nuestras certezas son incesantemente amenazadas si no por refutación -lo que ocurre cada vez menos- entonces por un deseo de mayor certeza, mayor conocimiento y una comprensión más amplia, lo que se ha tornado bastante común. De cualquier modo no hay certeza razonable de lo que va a ser considerado seguro y cierto en el futuro.

Los matemáticos, aun cuando son reproductores más que productores, tienden a restringir el derecho de la práctica de la matemática como una actividad mental a una élite -a aquéllos que enriquecen la matemática como materia con sus nuevos descubrimientos. Aquéllos que no pertenecen a esa élite deben comprar un stock de conocimientos y habilidades de los estantes del supermercado de matemática. Si se da alguna opción, ¿es ésta para el consumidor o es que otro va a hacer la compra por él?.

¿Les molesta esta abundancia de lenguaje metafórico? Los matemáticos son

organizadores, aunque en otros campos y con otros fines que aquellos que se desempeñan en la industria, comercio, tráfico y administración. Un maquillaje similar si no idéntico los caracteriza a todos ellos. Pero en ningún otro campo el organizar se despliega con tanta pureza, se impone con tanta fuerza y se infiltra tan profundamente como lo hace en matemática. La matemática crece, por así decirlo, por un momentum de auto organización.
No llama la atención entonces, que los matemáticos gusten de presentar su materia en un estado bien organizado y los libros de texto frecuentemente sean juzgados de acuerdo con su grado de organización. Pero para la gran mayoría ni la matemática ni su organización es un objetivo en sí mismo. Como una herramienta útil la matemática ha conquistado y cubierto una rica variedad de campos de rápida expansión de la ciencia y la sociedad, y, como herramienta, se ha convertido en indispensable para una multitud de personas que crece aceleradamente. Las personas de forma creciente usan la matemática más a menudo de lo que son concientes. Usan matemática, porque no pueden estar sin ella. Entonces, la matemática es una actividad de descubrimiento y organización en un interjuego de contenido y forma. Más adelante nos tendremos que plantear la pregunta si la enseñanza de la matemática realmente ha estado a la altura de este desarrollo.

1.1.5. Matemática y realidad

Si tuviera que continuar de la misma manera, es decir, concentrando la mirada en el proceso matemático, estaría imprudentemente desechando el medio en el cual este proceso tiene lugar, el que provoca este proceso y el que es afectado por él. ¡Veámoslo más de cerca!
El sentido común se revela en esas acciones -físicas y mentales- que son comunes a las personas, que comparten realidades comunes. No hay razón, aun si fuera posible, de restringir la “realidad” a simples experiencias de las impresiones sensoriales. Aún en el nivel más bajo, la realidad es una confusa mezcla de interpretación y de aquello que el purista llama experiencia sensual. Si alguien dice:

> Cuando escuché sonar el timbre, miré a través de la ventana y vi a Alicia y olí su perfume

uno puede creerle o dar por sentado que este es el informe de algo, que en los ojos del que informa, realmente ocurrió. No hay razón para escuchar a vulgares positivistas que objetan que “en realidad” el oído de una persona que se llama a sí misma “yo” fue golpeada por el ruido de un cierto tono, interpretado como un timbre, su ojo por un flujo de ondas de luz, interpretadas como emitidas por una fuente llamada Alicia, y sus agujeros de la nariz fueron invadidos por una corriente de moléculas, interpretadas como el aroma de Alicia. En efecto, el “yo” podría haber sido un perro, y la oración de arriba podría haber sido parte de una historia de un comportamiento animal, relatado en primera persona. El sonido del timbre, y la mirada de Alicia y su perfume son primitivos, apenas aptos para posterior análisis. Preguntas como “¿cómo sabe que fue el sonido del timbre y la mirada de Alicia y su perfume? pueden o no llevar a la reflexión. “Está ventoso” puede ser una observación rudimentaria desde dentro de la casa, que solamente luego está justificada por referencias a ramas que se mueven y nubes. “Un bang” y “un corto circuito” pueden ser descripciones del mismo evento en varios niveles cognitivos y lingüísticos. Un número de eventos atómicos leído por un contador Geiger, un K-mesón que pasa, y una supernova que explota son primitivos para los físicos o astrónomos que observaron e informaron esos hechos, a pesar de que para ser reducidos a unos más pedestres, ellos necesitan de profundas teorías. “Contento“ y “triste” pueden ser prédicas irreductibles (ya sea pronunciadas pensando en otras personas o en uno mismo) y ser reductibles por reflexión. Para algunos lectores los personajes de Homero pueden ser personas reales, y sus aventuras hechos reales, tan reales como el mundo en el escenario puede ser al espectador. Puede haber poca duda de que aun en el nivel cognitivo más bajo, la especie canis es tan real como cualquier perro en particular, con el que inclusive comparte un nombre en común. Una vez conté el cuento de un pequeño niño al que a edad temprana “Utrecht” significaba cualquier lugar que veía ya que se parecía al vecindario de su casa; unos años más tarde esto se transformó en un territorio vago y más adelante pudo localizarlo en un mapa y unos más tarde se convirtió en una entidad político-administrativa que finalmente adquirió una nueva, y para él, más vigorosa dimensión- la de la historia. Todo esto ocurrió dentro de una realidad siempre en expansión que incluyó instituciones como la Universidad, el Ferrocarril, el Gobierno. Como ejemplo de un objeto dentro de una variedad de realidades, preguntemos a diferentes personas qué significa una micro-computadora: un artefacto útil con un cierto precio para el vendedor, un peso en kilogramos para el distribuidor, tierra inexplorada para el novato y para el experto una parte del mundo en que vive abstraída desde hace tiempo del instrumento tangible.

Cómo son los conceptos de reales depende del que los concibe, y bajo circunstancias dadas, los alcances cognitivos pueden ser más vigorosos que los manuales o sensoriales, que de hecho siempre se mezclan con la cognición.

Las realidades matemáticas son fenómenos tempranos en el desarrollo individual, no solamente realidades geométricas sino también aritméticas. Los números que son representados por cantidades observadas e imaginadas, llamadas por numerales hablados o escritos, y mutuamente conectados por relaciones reales, imaginarias y simbólicas, pertenecen a un dominio que puede extenderse del núcleo de las experiencias cotidianas a las fronteras lejanas de la investigación matemática, dependiendo de cómo se involucre la persona interesada. A pesar de cientos de años de resistencia -aun por parte de matemáticos- los números negativos y complejos y sus operaciones se han transformado en tan reales para los matemáticos como los positivos lo han sido por siglos, y los números enteros por milenios; y ahora pertenecen a la realidad de la mayoría de personas que han aprendido algo de matemática La realidad es determinada histórica, cultural, ambiental, individual y subjetivamente. Los “micro-mundos” de Lawler son menos objetivos y los “dominios de experiencia subjetiva” de Bauersfeld menos subjetivos, de lo que esos términos sugieren. El “Solipsismo” es un constructo tan artificial como abarcador es el objetivismo. Yo prefiero aplicar el término “realidad” a aquello que el sentido común en un cierto estadio experimenta como real.

“Real” no debe ser entendido aquí en su acepción ontológica (cualquiera sea

el significado que se le atribuya a ontología), ni metafísicamente (Platón) ni físicamente (Aristóteles), ni siquiera diría yo, psicológicamente, sino entendida *sentidocomunmente,* así como uno lo usa, sin reflexionar sobre él. No está atado al mundo espacio-temporal. Incluye objetos mentales y actividades mentales. Lo que yo llamé "realidad en expansión" responde a cada vez mayores niveles de sentido común y atestiguado por niveles del lenguaje cotidiano o varios lenguajes técnicos.
Cuanto más lejos se extiende nuestra realidad, tanto más a menudo y más agudamente se necesitan integrar más o menos fragmentos, aislados por aspectos de la realidad. Esto puede llegar a ser una ventaja o una desventaja. La transferencia de electricidad es facilitada por la aislación pero la transferencia de ideas por corto circuitos. Entre medio está la estructura celular de la vida biológica, definida por membranas con una permeabilidad altamente selectiva y efectiva, que es el increíble resultado de una larga evolución. La permeabilidad de las membranas que dividen las realidades individuales puede depender del origen activo o pasivo de dichos fragmentos: si se deben a una evolución interna o a una imposición externa.
Esta es la clave, según mi opinión, para comprender la pobre permeabilidad de la membrana que separa el aula y la experiencia escolar de la experiencia de vida, a la que aludimos y prometimos analizar a su debido tiempo, tratar el tema de la educación matemática, a pesar del hecho de que la matemática; al igual que varios de sus dominios y aspectos, es ya un ejemplo sorprendente de la pobreza o hasta de la falta de permeabilidad de las membranas. La relación específica entre contenido y forma -el énfasis sobre la forma, reforzada por la existencia de un lenguaje particular eficaz- favorece el crecimiento de membranas impermeables entre la matemática y los contenidos "de afuera", entre el lenguaje matemático y la vida cotidiana o lenguajes más técnicos. Y esto ocurre a pesar del hecho de que la matemática podría ser un ejemplo sobresaliente de integración mental amplia hacia la realidad. En efecto, como he señalado antes, la matemática, a diferencia de otras ciencias, surge en un estadio temprano del desarrollo en la entonces "realidad del sentido común" y su lenguaje surge en el lenguaje común de la vida cotidiana. ¿Por qué no sigue de esta manera? ¿Cómo se puede fortalecer esa existencia integrada con el fin de resistir la tentación de separación y aislamiento? "La matemática surgiendo y quedándose en la realidad" fue el titulo de una conferencia que una vez di en varias ocasiones para responder a esas cuestiones. A su debido tiempo, voy a repetir esas respuestas, que son de carácter educativo.

1.1.6. ¿Conceptos u objetos mentales?

¿Cuál es la diferencia entre número y concepto de número, entre razón y el concepto de razón, entre triángulo y el concepto de triángulo, entre semejanza y el concepto de semejanza, entre X (un objeto) y el concepto de X? Esta es una pregunta muy significativa para objetos no matemáticos X así como: fuerza, masa, calor, evolución, contenido, forma, ciencia, gobierno, raza, humanidad, poesía, arte pop. La secuencia de arriba parece de distancia creciente entre "X" y el "concepto de X". Hay de cualquier modo una diferencia entre ellos. "Concepto de X" pareciera significar como uno concibe un objeto X desde una cierta perspectiva, digamos, por inspección, reflexión,

análisis, escrutinio o cualquiera que se desee.
No habría motivo para preguntar esto, si no hubiera una tendencia a decorar términos para objetos, por salvaguardar la dignidad, con el prefijo de “concepto de”; aun esto importaría poco si se pudiera dejar de lado las consecuencias, en particular para la enseñanza, donde se trata del aprendizaje cognitivo. Lamentablemente enseñar conceptos tiende a crear la ilusión de agregar mayor comprensión a lo que se aprende.
Ha habido varios conceptos de número -el de Euclides, el de Cantor, el de Dedekind, el de Peano, el de Frege, el de Russell-Whitehead, el de Kleene- que difieren formalmente tanto como sustancialmente uno de otro. Esta diferencia, sin embargo, es materia de sofisticación experta, y de más preocupación para los investigadores en los fundamentos de la matemática que para la gran mayoría, aun entre los matemáticos. Ha habido varios conceptos de fuerza -el de Aristóteles, Descartes, Leibniz, Newton. Los físicos decidieron a favor de Newton, pero parecen haber fallado en evitar que las personas sigan nutriéndose de menos instruidas ideas de fuerza.
La cognición no comienza con conceptos, sino más bien al revés; los conceptos son el resultado de procesos cognitivos. La matemática permite definiciones explícitas a un estadio más temprano que cualquier otro campo de conocimiento. Por ejemplo, “impar” y “par” puede ser definido sobre la base del “número entero”. En efecto, la primera ciencia matemática, la de los Pitagóricos, fue sobre impar y par. Pero, ¿qué decir del “número entero”? Es generado por un proceso, el de conteo, más que por una definición explícita, sólo para transformarse en un asunto de sentido común más que en un concepto. Por lo menos desde Euclides, los matemáticos han buscado fundamentos más profundos y han tenido éxito. Los adherentes a la Nueva Matemática creyeron que a los niños no se les debía negar este beneficio. Lucharon contra los números del sentido común, sin éxito. La vuelta a lo básico finalmente significó volver al sentido común.
Las distintas especies de círculos son suficientes para explicar qué es un círculo en sentido común, y nadie al que se le muestre un círculo duda que éste tenga un centro (que puede ser encontrado por ensayo y error, o de una manera más sofisticada). Pero al menos desde Euclides, los círculos fueron definidos como locus (lugares) y en la geometría cartesiana por ecuaciones algebraicas. Los adherentes a la Nueva Matemática lucharon contra la aproximación por sentido común, y en un sentido tuvieron éxito, con el precio de sacar la geometría totalmente de la instrucción matemática. Mientras tanto quedó claro a cada vez más personas que, donde se involucre a no matemáticos, la enseñanza del concepto de X no es la forma apropiada de enseñar X. Los investigadores cautos ahora admiten que los conceptos son precedidos por algo menos formal, por iniciaciones, preconceptos, o como lo llamen, que a largo plazo quiere decir que el objetivo adecuado es todavía el de enseñar conceptos. A mi manera de ver, el objetivo primordial -y en muchos casos para mucha gente- el objetivo de enseñar y aprender es *los objetos mentales*. A mí particularmente me gusta este término porque puede ser extrapolado a un término que describa como son manejados estos objetos, es decir a *operaciones mentales*. El número entero, la línea numérica (aun trazada en el pizarrón), las figuras geométricas (aun materializadas) son todos objetos mentales, siempre y cuando sea entendido (y así ocurre) que las imágenes visuales sean representaciones en borrador de objetos

mentales. ¿Cómo se desarrollan los objetos mentales para transformarse en conceptos, y qué criterios revelan si esto realmente ha ocurrido? En el caso del número entero, sacarse el chaleco de fuerza del sistema posicional puede ser el síntoma. Muy a menudo la verbalización y formalización pueden indicar la formación de conceptos. Vale la pena mencionar que históricamente el objeto mental de grupo precedió al concepto de grupo en más o menos medio siglo. Leibniz y John Bernoulli usaron la palabra “función” para algo que no era otra cosa que un objeto mental, y recién cuando aparece el símbolo en letra para una función en los artículos de dÁlembert y Euler fue pavimentada la ruta para el concepto de función.
La distancia entre objeto mental y concepto va a depender de la materia, pero aún más del individuo y de su situación en particular. Esta es la razón por la que esto debe ser respetado en la instrucción. Cuando tratamos el proceso de enseñanza /aprendizaje, la cuestión “¿Conceptos u objetos mentales?” va a aparecer en paralelo con la cuestión didáctica: “¿Logro de conceptos o constitución de objetos mentales (mediante operaciones mentales)?”

1.2. ESTRUCTURA Y ESTRUCTURAS

La estructura es una forma abstraída de la expresión lingüística Vamos a enfocarnos en la estructura con respecto a la matemática, a pesar de que mucho de lo que tenemos que decir se aplica a un contexto más amplio. En matemática la relación entre forma y contenido está reflejada en la que hay entre algo que tiene o es una estructura. Estructurar es una manera de organizar fenómenos, físicos y matemáticos e inclusive a la matemática como un todo.

1.2.1. Estructuras pobres y ricas

Unos pocos ejemplos nos darán una visión más clara de lo que significa estructura en matemática.
Un tetraedro puede ser tomado como una estructura que consiste de cuatro vértices, seis lados y cuatro caras en su mutua relación de “este vértice yace sobre este lado y en esa cara, este lado que contiene ese vértice y que es contenido en esta cara, esta cara que contiene ese vértice y ese lado”, es lo que uno llama una estructura combinatoria, que en este ejemplo particular establece vinculaciones, restringiéndose a las relaciones de contener y de ser contenido en, y olvidándose de lo que son en realidad puntos, lados y caras. Por ej., que los lados son rectos y las caras son planas. ¿Qué utilidad tiene una estructura tan pobre? Bueno, con conjuntos de tales tetraedros combinatorios se pueden construir poliedros abstractos identificando caras de diferentes tetraedros, juntándolos unos con otros, por así decirlo. Los tetraedros pueden, por lo tanto, ser utilizados como bloques para construir estructuras más grandes, que pueden transformarse en tema de profunda investigación conocido como topología combinatoria.
No necesitamos, sin embargo, sentirnos satisfechos con la estructura combinatoria del tetraedro. Es más natural considerarlo como un sólido en el espacio, con sus puntos, lados y caras. Esto es nuevamente una estructura,

una estructura geométrica, Como estructura geométrica un tetraedro es una estructura más rica que combinatoriamente. Hay más para decir sobre esto: dentro de esta estructura uno puede, por ejemplo, medir distancias, lados, ángulos, superficies y volúmenes.
Un tetraedro es también llamado una pirámide triangular. ¿O es al revés, es la pirámide triangular un tetraedro? No. Si fuera así, cómo podría ocurrir que una pirámide triangular regular no fuera necesariamente un tetraedro regular. Bien, las pirámides triangulares y los tetraedros son estructuras diferentes. Por definición, una pirámide tiene una base y un punto superior (aun cuando se permite dar vuelta la pirámide). Un tetraedro puede ser convertido en una pirámide triangular de cuatro maneras diferentes, de hecho, apuntando uno de sus vértices hacia la punta superior y la cara opuesta a la base. La pirámide triangular es una estructura más rica que el tetraedro.
Amasemos ahora el tetraedro sólido como si fuera de arcilla o masa. Presionemos y deformémoslo, pero sin desconectar lo que está conectado y conectando lo que está desconectado. El resultado puede ser una bonita pelota, o una papa o digamos una pesa. Los vértices, lados y caras han desaparecido. La cosa está todavía conectada, y lo está de una manera especial, parecido a una esfera (y seguramente no como un anillo). Es una estructura topológica, más pobre que la previa del tetraedro geométrico: no le ha sido asignado ningún rol a las distancias, a los ángulos, a la rectilinearidad, etc.

1.2.2. Estructuras definidas por relaciones

Hasta ahora nos podríamos haber conformado con llamar a nuestros objetos figuras en vez de estructuras. Con el fin de que se transformen en estructuras deben ser descritas estructuralmente. Las figuras deben ser construidas de sus partes. Algo que está terminado puede describirse estructuralmente Focalizamos ciertas relaciones entre los elementos de la figura y se elige entre ellas un conjunto que caracteriza a la figura que se tiene en mente. El caso más sencillo es el tetraedro combinatorio: cuatro objetos arbitrarios son llamados vértices, a cada par de ellos le es asignado un lado, y cada trío será una cara, con las relaciones mutuas de contener y ser contenido. El tetraedro geométrico, por otro lado, puede ser descrito como una estructura métrica, asignándole una “distancia” mutua a cada par de sus puntos (o sólo vértices). Es menos fácil explicar cómo es descripta una estructura topológica: diciendo qué es lo que está cerca de cada uno, con ninguna referencia a distancia cuantitativa, es decir, de manera cualitativa, en efecto, además la topología prohíbe separar y pegar, ya que afectaría a la distancia cualitativa. Como estructura topológica el borde de un disco es el mismo que el de una curva caprichosa cerrada, pero es diferente de un segmento lineal recto o curvo, que por su parte son ambos topológicamente iguales.
Relaciones más -como también más rigurosas- incrementan la riqueza de la estructura. Dejar caer relaciones empobrece y agregar relaciones enriquece las estructuras en el mismo medio.

1.2.3. Estructuras algebraicas

El sistema de números enteros 1, 2, 3,.. uede ser interpretado como una estructura de varias maneras. Mientras pospongo el aspecto cardinal, y comienzo con el ordinal, la secuencia de conteo, que es una estructura de orden del tipo “de alguna manera comienza y cada uno tiene su sucesor”, mientras que los nombres de las cosas en particular no importan. Una adición puede ser derivada del orden en una estructura así: a cada par de cosas se le asigna una tercera, su suma. Ahora imagine que ha olvidado como surgió esa suma! Entonces todo lo que queda es un sistema infinito de cosas, que se distingue por símbolos, y una tabla de dos entradas que, para cada par de estas cosas, dice lo que se quiere que sea su suma. Las relaciones en este sistema son de la forma a+b=c. Es lo que se llama estructura de adición. La citada estructura tiene algunas propiedades destacables, por ejemplo, que a+b es siempre lo mismo que b+a. Quizás, cerca de esta tabla se permita una segunda (que pueda o no depender de la primera) que a cada par le asigne lo que se quiere sea su producto. Esto enriquece la estructura con relaciones del tipo u.v=w Estos sistemas son llamados estructuras algebraicas. Hay muchas de ellas, con dos o aún más operaciones que pueden satisfacer ampliamente diferentes condiciones.

1.2.4. Estructuras- de más pequeñas a más grandes

Las más conocidas entre la estructuras algebraicas son las estructuras numéricas

*N, de los números naturales, 0, 1, 2.....

*Z, de los enteros...., -2,-1, 0, 1, 2....

*Q de los números racionales, representado por fracciones de enteros, tales como 1/3, -5/3, 5,33

*R, de los números reales, entre los que por ejemplo están √2, e, π

*C, de los números complejos a+bi donde i=√-1

Es una secuencia de estructuras de tamaño creciente, a pesar de que no primariamente -y ni siquiera necesariamente- de riqueza creciente.

Las operaciones de adición y multiplicación son las mismas en todos estos ejemplos,como lo son las relaciones estructurante del tipo a+b=c, u.v=w, mientras que algunas de sus propiedades pueden cambiar. La ecuación a+x=c es en general resoluble para x únicamente si se admiten los números negativos, la ecuación u.x=v (u≠ 0) sólo si están involucrados lo racionales, la ecuación x^x = k (k>0) es resoluble solamente en el dominio de los reales no negativos. Por ejemplo, la solución de x^2 = 2 no puede se obtenida como una fracción de enteros, a pesar de puede ser aproximada por dichas fracciones. 3/2, 17/12, 577/408,.. .son aproximaciones cada vez mejores a √2. “Aproximar” es un concepto topológico. Además de estar provisto de una estructura algebraica, el dominio de los reales (así como el de los complejos) está provisto de una estructura topológica. En ese sentido, no solamente es más grande sino también más rica que la de los enteros. En otro sentido N, la estructura de los naturales, es más rica que Q, R y C En efecto, la divisibilidad es un concepto rico en N, pero pobre en Q, R y C.

1.2.5. Generando el sistema de números

El sistema de números reales es geométricamente representado por la línea numérica, en la cual cada punto por su distancia del punto 0, representa un número, positivo por un lado y negativo por el otro. En este modelo las operaciones algebraicas son visualizadas por simples mapeos geométricos.
En la tradición griega ésta era el enfoque basado en el sentido común los números reales (positivos), que fue inundado por la ola de “aritmetización” en el siglo pasado. Aritmetización quería decir desconocer la fundación geométrica tradicional y fundar a la inversa, la geometría en el número. Los números reales debían ser definidos por secuencias de números racionales (aproximados), los racionales como fracciones de enteros, y los enteros como números naturales precedidos por un signo más o menos. Un gran paso para atrás fue dado cuando el número no natural a su vez fue fundado sobre conjuntos desnudos, privados de toda estructura (y finalmente todos los conjuntos en el conjunto vacío). Los conjuntos debían ser comparados unos con otros por correspondencia, es decir, poniéndolos mentalmente elemento por elemento uno junto al otro, uno de otro. Si el conjunto A y B cupieran uno en otro se diría que tienen el mismo cardinal, si no, aun cuando A pudiera ser parte de B, entonces se diría que tiene un cardinal menor que B.
El número de conteo por sentido común y el número de medición por sentido común, como son visualizados sobre la línea numérica, fueron derivados de una raíz común por este profundo análisis: el conjunto sin estructura. La falta de estructura puede ser una ventaja en los Fundamentos de la Matemática, que es la matemática de alto nivel, pero demasiado alta para comenzar con ella. En efecto, la forma correcta de empezar es o debería ser el sentido común. Actualmente la mayoría de las personas estarían de acuerdo en que el desprecio de la Nueva Matemática por el sentido común ha sido un error histórico. Pero, ¿es que todos efectivamente han aprendido esta lección?

1.2.6. Estructuras geométricas

La estructura geométrica más familiar para nosotros desde la tierna infancia es el espacio en el que vivimos –la geometría euclideana como se la denomina. Los cuerpos sólidos nos permiten comparar, o más bien definir, distancias, y de acuerdo con este sistema de distancias las líneas de visión recta resultan ser las más cortas según la experiencia propia. Desde la temprana infancia, nos son familiares los dibujos confiables de objetos, obtenidos comprimiendo o agrandando, llamados *semejantes* en matemática. Sin duda, la semejanza aún precede al número en el desarrollo cognitivo.
Durante el siglo XIX las estructuras geométricas más pobres que la euclídea comenzaron a llamar la atención de los geómetras. Empobrecer una estructura -siempre y cuando por ello se entienda remover lo que bajo ciertas

condiciones parecen espirales y rulos- puede llevar a una mayor profundidad. Es un arte que los matemáticos creativos aprendieron a practicar y manejar durante el siglo pasado.
En el espacio euclideano estamos manejándonos con distancias, ángulos, líneas rectas, círculos, planos, esferas Un primer paso hacia el empobrecimiento de esta estructura es olvidar todo sobre la comparabilidad general de distancias y ángulos, preservando la rectilinearidad y el paralelismo. Esto lleva a la geometría afín. En geometría afín todos los paralelogramos son iguales: los rectángulos y los cuadrados no pueden ser distinguidos de otros paralelogramos, ni pueden serlo los círculos de elipses.
Un próximo paso es olvidar el paralelismo, preservando la rectilinearidad. Esto produce la geometría proyectiva, en la cual todos los cuadriláteros son iguales y todas las cónicas son iguales.
Otro paso más y entonces hasta la rectilinearidad desaparece como propiedad estructurante. El espacio está siendo empobrecido para trasformarse en lo que antes llamamos una estructura topológica, en el cual todavía podemos distinguir curvas abiertas de cerradas, el interior de una superficie cerrada del exterior, ver si una curva cerrada en el espacio está o no anudada y si un par de curvas cerradas están relacionadas.
Más de un siglo atrás este tipo de clasificación fue introducida en la geometría por Felix Klein, cuando proclamara su programa de Erlangen. Éste fue el primer intento moderno de estructurar la matemática misma o, mejor dicho, una parte de ella: la geometría.

1.2.7. La estructura de la matemática

Una cosa es interpretar un objeto chico o grande como una estructura y otro muy distinta es intentarlo con un área entera de la cognición científica. Si lo comparamos con el acto de crear, la organización de la cognición científica parece ser una actividad inferior. Si embargo, como hemos destacado antes, en ninguna ciencia están estas dos actividades tan densamente entretejidas como en la matemática. Hace un siglo esta organización fue intentada en geometría y por medio siglo la tarea de más amplia de organizar toda la matemática quedó dormida. Luego de la segunda guerra mundial esta tarea fue tomada por el grupo francés Bourbaki. A pesar de que su trabajo requirió una cantidad muy grande de creatividad, su resultado final no pudo ser en principio, más que codificación deductiva de la matemática existente. Sin duda, el trabajo de Bourbaki es un monumental sistema de matemática, que -a pesar de resultar ahora desactualizado en puntos esenciales- ha contribuido enormemente al crecimiento de la matemática. Aun así, ha sido sobrepasado mientras tanto por la matemática misma. Yo dudo si un nuevo intento puede o quiere ser hecho en el futuro.
La jerarquía de Bourbaki está orientada primariamente desde las estructuras más pobres a las más ricas. Y -accidentalmente, y ciertamente no como un asunto de principios- de menores a mayores. De hecho, ésta es en efecto la estrategia más natural para una construcción sistemática: de más pobre a más rica. Comienza, por así decirlo, con una tabla rasa, con aquello que no tiene estructura, por ejemplo el conjunto vacío. Pero después de todo, ¿cómo es que pueden ser creadas ricas estructuras de este pobre comienzo? Si A

es un conjunto, uno puede considerar el conjunto P(A) de sus subconjuntos, que en realidad tiene una estructura considerable, efectivizada por su relación estructurante de contener y ser contenido.
O, comenzando con dos conjuntos A y B, uno obtiene su producto, el conjunto de pares, es obtenido tomando un elemento de A con uno de B -una construcción que puede ser visualizada por un gráfico rectangular, donde por ejemplo, cada uno de los tres varones (conjunto A) forma un par con cada uno de la cuatro niñas (conjunto B)

Fig. 1

Este conjunto producto es fuertemente estructurado, tanto horizontal como verticalmente. Similarmente, todo el plano puede ser estructurado como el producto de dos líneas rectas, donde cada uno de sus puntos es representado por un par de números - la manera en que esto es hecho en geometría de coordenadas. Estos son meros ejemplos de cómo imponer estructuras en conjuntos construidos ad hoc o dados - estructuras de orden, estructuras algebraicas, estructuras topológicas y combinaciones de estructuras. Pueden ser construidas dentro de una jerarquía, para imponer una jerarquía sobre la matemática como tal -una jerarquía entre muchas posibilidades concebibles. No hay, y nunca va a haber, algo como la jerarquía de la matemática. Este hecho es evidente por la variedad de libros de texto que difieren destacadamente unos de otros. Hay seguramente una inclinación, a nivel universitario, en particular, de enseñar matemática como una jerarquía, a pesar de que un docente va a poner más agua en el vino jerárquico que otro, dependiendo del grado de utilidad inmediata de la matemática enseñada.
Aún así, a los consumidores de matemática se les deberían presentar las estructuras matemáticas donde importe, e inclusive hacerles tomar conciencia de sus aspectos estructurales hasta un cierto grado. Esto no quiere decir, sin embargo, que la matemática como tal deba serles presentada como una estructura, ya sea de acuerdo con la de Bourbaki o cualquier otra concepción. Sería un intento inútil, por así decirlo.
Lo que es más, un sistema como el de Bourbaki, o cualquier variante, no hace justicia a la matemática como un servidor más que como un maestro. La falencia más llamativa de cualquier sistema de matemática puede ser su tratamiento de los números naturales: a menudo una desatención de la estructura numérica, por ejemplo, del sistema decimal. Desde la práctica más ordinaria a las más sofisticada de números, la estructura decimal es su rasgo dominante. Tanto para el aprendizaje (meramente lingüístico) de numerales como para operar eficazmente con números, esta estructura es

indispensable. Pero en ningún sistema de matemática ha sido jamás mencionado. En efecto, la matemática de alto nivel ha sido objetivada y destripada de esos rudimentos humanos como la decimalidad de nuestros dedos de las manos y de los pies. La verdadera matemática se comporta universalmente más que antropomórficamente.
Esto es, entonces, el rasgo más sorprendente de la inadecuación epistemológica y práctica de los sistemas del tipo de los de Bourbaki. Hay más rasgos inapropiados. La geometría visual no tiene lugar en ellos. La semejanza, que en el desarrollo cognitivo inclusive precede al número, está muy lejos en esta jerarquía, e inclusive entonces está separada de su origen visual. No hay un lugar asignado para las computadoras, que son estructuras funcionales. La modelación matemática de estructuras para el beneficio de aun las más simples aplicaciones es incompatible con la rigidez jerárquica de dichos sistemas. Nunca se han hecho intentos para estructurar la matemática vista desde la realidad como fuente epistemológica y como dominio de matemática aplicada, a pesar de que dichos intentos serían muy deseables - psicológicamente, pedagógica, educacional y didácticamente. Por su mera existencia los sistemas deductivos impiden que se hagan estos intentos.

1.2.8. Las estructuras visualizadas desde la realidad

Esto no es para menospreciar las estructuras matemáticas. Al descubrir estructuras dentro de la matemática hemos aprendido a entender mejor la organización inherente a nuestro conocimiento. Muchos psicólogos e investigadores en educación aún perciben el desarrollo cognitivo como el logro de conceptos. Superficialmente esto es evidente por los numerosos títulos de artículos de investigación que contienen la palabra “concepto” y, de una manera más profunda, por los innumerables experimentos en los cuales se habla de testeo o evaluación de la posesión o desarrollo de conceptos.

El conocimiento, como una jerarquía de conceptos, es un rasgo prominente de la teoría de la ciencia y la epistemología aristotélicas. Su inadecuación metodológica se ha puesto de manifiesto, especialmente bajo la influencia de la matemática. La jerarquía aristotélica está orientada desde lo general a lo particular, abrazando lo general a lo particular. En donde mejor es concretada es en las taxonomías biológicas, donde uno desciende a lo largo de líneas de grupos, divisiones, clases, subclases, familias, especies y géneros. Ahora, fuera de la botánica y la zoología, la formación de conceptos por clasificación ha resultado ser insatisfactoria. El conocimiento no es justamente más que una diferente categoría de una referencia a flora y fauna, como lo es estructurar, cuando se lo compara con clasificar. Las clases contienen unas a otras, o son contenidas una dentro de otra; de esa manera generalidad y particularidad son expresadas por mero tamaño. Si, en el caso de estructuras, uno habla de general versus particular -cosa que yo no hago- la estructura más pobre sería la más general y la particularidad se desarrollaría al enriquecerse.
Al estructurar, más que formar conceptos nos apropiamos de la realidad. Lo hacemos con estructuras ricas o pobres de acuerdo con nuestras necesidades. Empobrecer puede significar una generalización en el sentido

de más amplia aplicabilidad. Entre las estructuras científicas más pobres, aquellas de la matemática son distinguidas por su amplia medida de aplicabilidad como está ejemplificado por objetos numéricos y geométricos. Las estructuras matemáticas también son mas fácilmente discernidas de las estructuras en general.
Como he destacado antes, la identificación del aprendizaje con el logro de conceptos es una visión superficial, aun cuando no es inusual en psicólogos y educadores. Es el mérito de Piaget haber destacado la estructura, al menos en la teoría, aunque no consecuentemente en la práctica.

1.2.8.1 Estructura de ciencia y desarrollo

Quiero enfatizar una vez más la distinción de estructuras dentro de una ciencia -en particular de la matemática- y la estructura de ciencia. Es un viejo refrán que dice que el desarrollo cognitivo procede desde lo particular a lo general, y esta dirección es por lo tanto considerada obligatoria para el proceso educativo. Pero le falta sofisticación como refrán, especialmente debido a las diversas interpretaciones de “general vs. particular”. Puede ser dado por sentado, que para un niño, conocer a un perro en particular (o a algunos de ellos) precede al conocimiento de la especie “perro”; pero la construcción de clase es solamente un aspecto del desarrollo cognitivo y, en cuanto a eso, uno más bien modesto. La generalización comienza con las situaciones más que con los objetos, y la función de una situación en particular es paradigmática más que formadora de clase.
La visión de Piaget es más sofisticada que el refrán tradicional, si no directamente su opuesto. De acuerdo con Piaget, el desarrollo ocurre a lo largo de líneas epistemológicas, donde episteme no es cognición individual, sino respecto de sus contenidos, independiente del individuo en desarrollo. Como consecuencia, la estructura que se manifiesta en el estado presente de la ciencia es al mismo tiempo el patrón del desarrollo cognitivo individual. Los experimentos sirven para corroborar este paralelismo y ellos fueron diseñados con ese propósito en mente, o al menos esa fue su intención.
Piaget nutrió esta convicción antes de que Bourbaki construyera su sistema, o al menos antes de que él pudiera haber tomado conciencia de ello. Lo practicó totalmente en su trabajo sobre geometría.[1] Eligió la estructura de geometría que le era familiar como el lienzo en el cual deber ser impreso el desarrollo del niño. Esta estructura era de Félix Klein, aunque para ese entonces la geometría ya la había superado, si es que alguna vez había coincidido en algún punto. De acuerdo con Piaget el desarrollo progresa de las estructuras más pobres a las más ricas, así como las encontró en la jerarquía de Félix Klein; va desde topología vía geometría proyectiva y afín a la euclídea y, según él, esto es verdadero tanto para aspectos perceptivos, representativos como cognitivos del desarrollo. La visión de Piaget traiciona un alto grado de confianza en -o debería decir, de obediencia a- las jerarquías matemáticas, a pesar de que esto ha sido desmentido por su propio experimento al igual que por los de otros. A un estadio temprano el niño que es incapaz de graficar cuadrados y círculos prolijos, puede fácilmente distinguir copias prolijas de cuadrados y círculos de aquéllas que no lo son.

Cuando Piaget fue confrontado con el sistema de matemática de Bourbaki, lo aceptó como una epistemología, que puede ser interpretada genéticamente, o por lo menos así parecería. Creo que ésta es una mala interpretación de la reacción de Piaget.
Yo pienso más bien que la concepción propia de Piaget de la estructura cognitiva ya había sido totalmente completada para esos tiempos. Su conocimiento de la estructura de Bourbaki de matemática [2,] más que ser un reconocimiento, fue un intento de adaptar el sistema de Bourbaki a su propia concepción. Eso, sin embargo, muchas veces ha sido interpretado como un apoyo prestado por la psicología a la empresa de enseñar matemática, según la estructura de esta ciencia, una empresa que se hizo famosa bajo el nombre de Nueva Matemática y finalmente demostró ser un fracaso.
Piaget difícilmente pueda ser culpado por esto. Aun cuando haya creído en el valor genético-epistemológico de una estructura de la ciencia, no hay prueba de que haya defendido que se enseñara de acuerdo con los curricula que siguen un cierto patrón basados en la estructura de una ciencia.
Esto nos lleva al próximo punto, que va a anticipar la discusión de más adelante.

1.2.8.2. Estructura de la ciencia, e instrucción

A pesar de su fracaso en matemática, los currículos basados en la estructura de una ciencia, se están poniendo de moda en otras áreas. Como matemático puro yo soy capaz de ver más claramente la relatividad de aquello que es ofrecido como una estructura de matemática. Si yo sitúo a la matemática dentro de un contexto de conocimiento y habilidades más grande, me llaman la atención los grandes baches que presenta lo que es a menudo propagado como estructura de la matemática, por ejemplo, la falta de estructura de la numeración y el desdén por la geometría visual y aun por las más simples aplicaciones. Como matemático también me siento obligado a ponerme en contra de la estructura de la ciencia como un medio de estructurar la educación, porque mi experiencia personal me ha mostrado cuán fácilmente los matemáticos caen en esa tentación.
El trabajo de Piaget no me proveyó de ningún argumento de la psicología del desarrollo a favor del currículum estructurado según la ciencia, ni puede ser esto justificado por la teoría educacional. Una estructura de la ciencia codifica sistemáticamente y, en el caso de la matemática esto significa de forma deductiva, el estado de aquella ciencia en un momento dado y, para esta cuestión, de una ciencia que no ha sido siquiera sujeto de la instrucción que se pone en la mira. Lo que es más, hay serios argumentos contra las currícula estructuradas según la ciencia. Los sistemas de matemática muestran una jerarquía orientada desde estructuras más pobres a las más ricas, que el diseñador de curricula trata de imitar. “De pobre a rica” es (visto matemáticamente-didácticamente) un principio cuestionable. Las estructuras pobres son totalmente abstractas como es evidente desde la más pobre de todas, el conjunto sin estructura. Didácticamente no se lo puede llegar a abordar o debería poderse mediante concretizaciones, llenando la forma abstracta y, en la práctica, esto es hecho creando concretizaciones artificiales

y hasta a veces falsas. En la matemática genuina, los conjuntos al igual que todas estas estructuras cumplen con objetivos, porque son operacionales. Al nivel en el cual comienzan los currículos según la estructura de la ciencia, sin embargo, no hay nada matemático que uno pueda hacer con los conjuntos. Así, como un diseñador de currículum, uno arbitrariamente inventa cosas para hacer con los conjuntos, que no tienen nada que ver con la necesidad de los conjuntos en matemática-falsa concretización y operacionalización; ni tampoco tienen estos nada que ver con la necesidad de aprender -falsa didactización. Lo mejor que puede pasar es que no haya efecto alguno - los conjuntos y otras estructuras pobres en la instrucción elemental son introducidas sin otro objetivo que el de poner una fachada aparente de estructura de la ciencia.
Si éstos no son otra cosa que deslices desafortunados, también hay argumentos más profundos contra el hecho de que las estructuras pobres precedan a las ricas, inclusive desde el punto de vista de la psicología del desarrollo. Lo que habitualmente se llama abstraer, no es frecuentemente otra cosa que empobrecer una estructura. Las estructuras matemáticas han surgido en contextos más ricos y han sido creadas con el fin de ser aplicadas donde han surgido y más allá. La orientación de pobre a rica ha sido sugerida para una matemática que estuviera a mano. A su debido tiempo, vamos a tratar el tema de aprender "matemática en acción", que es re-crear matemática, no sin objetivo por supuesto, pero guiado. Si nos ponemos de acuerdo en esto, la dirección didáctica recomendable va a ser la misma que aquella en la que surge la matemática, es decir de rica a pobre.

1.2.8.3. Estructurar un contexto rico matemáticamente

Didácticamente yo he opuesto la estructura matemática de rica a la pobre. Esto, sin embargo, no es suficiente. Uno no debería conformarse con quedar dentro de la matemática. Las estructuras ricas a ser ofrecidas también deberían ser buscadas fuera de la matemática, aunque con una ocurrencia didáctico-matemática nueva. Luego del fracaso de los currículos basados en la estructura de la ciencia, equipos de desarrolladores eligieron otro camino: el de ofrecer estructuras ricas no matemáticas con el fin de familiarizar al aprendiz con el descubrimiento de la estructura, estructurando, empobreciendo con ello la estructura y matematizando. De esta manera, él puede descubrir las poderosas pobres estructuras en el contexto de las ricas con la esperanza de que, mediante este enfoque, vayan a funcionar también en otros contextos (tanto matemáticos como no matemáticos). Comenzar con estructuras matemáticas pobres puede significar que uno nunca alcance las ricas no matemáticas, que son de hecho el objetivo correcto.
Ilustremos esto mediante un ejemplo! ¿Quién no está familiarizado con los llamados bloques lógicos, que son 24, que están disponibles en una rica variedad de modelos, por ejemplo, rojo/azul, círculo/cuadrado/triángulo, chico/grande, grueso/fino? Son un parangón de un mundo totalmente preestructurado: una pieza para cada combinación de los cuatro criterios. Las operaciones abstractas sobre conjuntos pueden ser concretadas maravillosamente por medio de dicho modelo. Yo he opuesto a este sistema otro que he llamado pequeño mundo, a pesar de que nunca he insistido en

enseñarlo: es, por así decirlo, una juguetería que contiene autitos, animales, muñecas, edificios y demás, de diferentes tamaños, tipos de material, colores. grados de movilidad, etc. Los criterios de clasificación no son impuestos a priori, sino son descubiertos y desarrollados por el aprendiz mismo -características de color, tamaño y otros, que no necesitan ser exactamente definidos pero pueden ser susceptibles de esbozar. En este pequeño mundo, las combinaciones de las características pueden ser representadas por varios objetos al igual que por ninguno, por ej., ninguna casa grande de madera negra pero muchos pequeños autos de lata rojos. Resumiendo, no es un mundo preestructurado sino más bien un mundo a ser estructurado En este caso, el estructuramiento es realizado clasificando. Yo elegí este ejemplo porque puedo creer en clasificar como una importante actividad cognitiva, pero es más bien un ejemplo que, gracias a su simplicidad, caracteriza exactamente la diferencia entre pobre y estructurado por un lado, y rico y a ser estructurado por el otro. Los bloques lógicos son un ejemplo llamativo de los éxitos de implementación que pueden ser cosechados con material fuertemente estructurado -éxitos baratos obtenidos gracias al amor a lo fácil. El material rico, abierto a la estructuración, que provee más oportunidades didácticas, es más demandante y por lo tanto menos fácil de implementar.

¡Terminemos aquí! Un gran número de ricos contextos para la instrucción matemática están ahora disponibles, más de los que cualquiera pueda imaginar. El problema principal es el de la implementación, que requiere de un cambio fundamental en las actitudes de enseñanza para poder ser resuelto.

1.3. Matematizar

Luego de esta discusión sobre el contexto y la estructura interna y externa de la matemática, volvemos otra vez a la matemática como actividad y observamos una de sus característica principales: la matematización. ¿Quién fue el primero que usó ese término, que describe el proceso mediante el cual la realidad es ajustada a las necesidades o preferencias del matemático? Esos términos generalmente emergen durante charlas informales y discusiones –intercambios de ideas antes de entrar en la literatura, y nadie puede decir quién los inventó. En cualquier caso, matematizar es un proceso que continúa tanto tiempo como la realidad siga cambiando, ampliándose y profundizándose bajo una variedad de influencias, incluyendo aquella de la matemática, que, a su vez, es absorbida por la realidad cambiante.

Matematizar como término fue muy probablemente precedido y sugerido por términos tales como axiomatizar, formalizar, esquematizar, entre los cuales axiomatizar puede haber sido el primero que ocurría en contextos matemáticos. Axiomas y fórmulas son una vieja herencia, a pesar de que el significado de “axioma” (o “postulado”), y la forma de fórmulas ha cambiado con el curso del tiempo. Los elementos de Euclides no son un parangón de deductividad sin rajaduras, como las personas creyeron por siglos, ni fueron jamás presentados con esa intención, como algunas personas aún parecen creer. La Axiomática, como ahora usamos ese término, es una idea moderna, y adscribiéndola a los antiguos griegos, a pesar de los precursores, un anacronismo. Sin embargo, mezclando nuevamente un área del conocimiento tal que los finales son elegidos como puntos de partida y viceversa, usando propiedades probadas como definiciones para probar lo que fue originalmente una definición -esta estructuración "patas para arriba" es una actividad matemática de larga data. Es tan antigua como la vieja matemática griega, o quizás aún más vieja, a pesar de que nunca hasta tiempos modernos ha sido ejercida tan conscientemente, tan sistemáticamente, tan apasionadamente como por los griegos, que disfrutaban enormemente el acto de organizar y reorganizar el conocimiento. Hoy en día, los sistemas axiomáticos que surgen de repente son el resultado de intentos de reorganizar los campos de la investigación matemática. Esta técnica es llamada axiomatización, y es bien entendida y manejada por los matemáticos modernos. Su primer ejemplo llamativo fueron los grupos. Desde el comienzo del siglo XVIII, los matemáticos fueron confrontados con mapeos de conjuntos sobre sí mismos, a menudo individualizados por propiedades invariantes. Y fueron conducidos a componer dichos mapeos. De esta manera, conocieron conjuntos de transformaciones que, al componerlos, automáticamente satisfacían los bien conocidos postulados requeridos más tarde para los grupos. Cayley, en 1854, dio el paso unificador para definir, por medio de esos postulados, el objeto (finito) que llamó grupo, pero hasta 1870 no fue aceptada de todo corazón esta nueva concepción por los matemáticos creativos líderes, y entonces también en sustratos infinitos. Las fórmulas, en la vida cotidiana así como en el lenguaje simbólico, son un rasgo tan antiguo como los axiomas, o aún más viejos. Mejorar la expresión lingüística por medio de símbolos y simbolismos cada vez más eficaces, ha sido un largo proceso, que primero tuvo que ver con el tema matemático y sólo más tarde, afectó también al lenguaje en el que la materia era expresada. Este proceso de adornar, ajustar y transformar el lenguaje se llama formalización.

Sin duda, tan popular como los axiomas y la axiomatización pueden ser en la matemática moderna, son sólo los rasgos salientes y los toques finales en el curso de una actividad donde el hincapié se hace más en la forma que en el contenido.

Lo mismo ocurre con respecto a las fórmulas y la formalización. Los axiomas surgen de paradigmas o conjuntos de paradigmas, y axiomatizar quiere decir generalizar paradigmas experimentados. Es un viejo hábito humano el hacer paradigmáticas nuestras experiencias y acciones, para generalizarlas abstrayéndolas en leyes y reglas, para crear patrones que se adecuen a la realidad. Esta última actividad es llamada esquematización, que es la contraparte de la axiomatización y formalización en la medida en que son tenidos en cuenta los contenidos más que la forma abstracta y el lenguaje.

La exposición precedente sirve para explicar el origen del término matematización, como análogo a axiomatización, formalización y esquematización. Yo presto tanta atención a ello ya que no es inusual, en particular en educación, restringir el término a uno de sus componentes. Yo mismo insisto en incluir en este único término toda la actividad de organización del matemático, ya sea que afecte el contenido y la expresión de la matemática, o la experiencia más intuitiva, digamos, vivida, expresada en el lenguaje cotidiano. Pero tratemos de no olvidar la dependencia individual y ambiental de la vida “vivida” o “cotidiana” de la realidad en expansión y la progresiva sofisticación lingüística!

1.3.2. Algunos aspectos

Modelización

Lo que es más, con respecto a la esquematización hay una tendencia a identificar esquemas con aquellas cosas tales como resolver fórmulas y procedimientos dentro de la matemática formalizada. Hoy en día el término “esquema”, en su sentido amplio, parece haber sido remplazado por el más temático de “modelo” - un término valioso, pero desgraciadamente devaluado por su uso descuidado y mal uso. Yo he castigado esta práctica lo suficientemente seguido, o por lo menos así me parece. (87)

La matemática siempre ha sido aplicada en la naturaleza y la sociedad, pero por un largo tiempo estuvo demasiado fuertemente enmarañada con sus aplicaciones para estimular el pensamiento de la manera en que es aplicada y la razón por la que funciona. El conteo era en efecto, sentido común: los agrimensores actuaban como si sus estacas y varas fueran puntos geométricos y líneas y los cambistas de monedas, mercaderes y mezcladores de ungüentos se comportaban como si la proporcionalidad fuera una característica auto-evidente de la naturaleza y la sociedad. Inclusive los astrónomos en la antigüedad babilónica adhirieron tanto tiempo como fue posible, o quizá aún más, a las inter- y extrapolaciones lineales en sus intentos por describir numéricamente los fenómenos celestiales, por medio de funciones en zigzag y de a pedazos lineales, las que sus herederos griegos transformaron finalmente en funciones goniométricas. Pero las funciones goniométricas no cayeron del cielo que ellos estaban estudiando. La teoría subyacente era que los movimientos celestiales debían ser circulares. Los esfuerzos para salvar a ambos: este postulado y los fenómenos que lo contradecían dieron nacimiento a lo que ahora llamaríamos un modelo que describe los movimientos celestiales – un artificio de círculos, epiciclos y exentos que, geométrica y numéricamente procesados, requieren de funciones goniométricas. Este modelo sobrevivió por casi dos milenios. Kepler, más que ofrecer un nuevo modelo, formuló tres leyes matemáticas generales del movimiento planetario, derivadas luego por Newton como consecuencia de su teoría de la gravitación. Newton mismo se negó a idear modelos mecánicos primitivos para explicar la gravitación. A medida que el tiempo pasó, los físicos tuvieron que aceptar, refunfuñando con frecuencia, que la atracción por la fuerza de la gravedad como un modelo por derecho propio, fue el primer modelo en los tiempos modernos en trascender la experiencia del sentido común, después de la teoría ondulatoria de la luz de Huygens. La historia siempre se repite: cuando fallaron los modelos elásticos de la propagación de la luz, sugeridos por la mecánica del sentido común del siglo XIX, para refinar la teoría ondulatoria de Huygens, los físicos tuvieron que aceptar el modelo electromagnético de la luz de Maxwell.

La modelización es un rasgo moderno. Hasta los tiempos modernos la aplicación de la matemática rigurosa a la escurridiza naturaleza y al medio ambiente se redujo a más o menos ignorar concientemente todo lo que

parecía ser perturbaciones no esenciales que arruinaban el caso ideal. Por un largo período, la simple geometría y la aritmética fueron suficientes para desenmascarar tales ideales. Pero, ¿qué es ideal y qué es perturbación? El primer ejemplo de una fisura *contra-el sentido común* entre lo ideal y la perturbación fue dada por Galileo: el movimiento uniforme como ideal, perturbado por la resistencia o como lo explicó Newton, por la fuerza en general. De alguna manera esta metodología ha sobrevivido hasta nuestros días. Aun cuando está disponible una teoría "rigurosa", casi nunca es aplicada como tal sino simplificada con el fin de hacerla accesible al procesamiento real, que luego puede se redefinida por mejores aproximaciones, o inmediatamente modelos de retroalimentación. El primer gran ejemplo de idealización no trivial de este tipo es el de la cuerda tensa vibrante de d´Alembert: despreciando, por así decirlo, la curvatura de la cuerda, logró "linealizar" la ecuación diferencial que, una vez hecha lineal, es fácilmente resuelta. En efecto, la remodelación física con el fin de la linealización se ha convertido en una herramienta estándar en matemática aplicada. En ciencias naturales el primer uso de la palabra "modelo" está probablemente relacionado con los bien conocidos modelos planetarios del sistema solar, donde el interjuego de los movimientos planetarios y lunares causados por la gravitación está dado burdamente por medio de un artefacto mecánico; siendo meramente un modelo, se hace justicia a la cinemática aunque no a la dinámica de los movimientos celestes, mientras que por razones prácticas los radios de la esferas que representan a los cuerpos celestiales son desproporcionados unos de otros así como cuando son comparados con los tamaños de las órbitas. Tan conocido como puede ser el modelo atómico de Rutherford-Bohr, éste describe el átomo y sus manifestaciones como un pequeño sistema solar, con extrañas restricciones impuestas a sus posibles órbitas; su carácter de modelo se apoya en las condiciones ad hoc a las cuales las órbitas están sujetas, y las suposiciones ad hoc con respecto a los saltos de una órbita a otra que son incompatibles con las leyes de la física clásica. Un modelo más reciente es el que considera al núcleo atómico como una gota líquida, en el cual los protones y neutrones son considerados como parte del fluido - una típica idea de modelo simplificante. Un ejemplo particularmente revelador es el modelo cosmológico del universo en expansión. Fue originalmente ideado como una explicación puramente cinética del vuelo para todos lados de las galaxias pero a medida que pasó el tiempo, se enriqueció con numerosos rasgos de dinámica y de la física de las partículas elementales, a pesar de que todavía se la entendía como un modelo groseramente simplificado de la evolución del cosmos.
Todos estos son modelos idealizados, que introducen precisión matemática a una realidad física más burda o simplifican una realidad de la que tácitamente se está de acuerdo de que es más compleja que el así llamado modelo. Extrañamente, el primer uso del término "modelo" en matemática apunta justamente a lo contrario: modelos concretos de figuras geométricas abstractas en yeso, alambre o cartón. El mismo matemático que había mandado a hacer una gran colección de aquellos modelos geométricos -Félix Klein- fue también -si no me equivoco- el primero en aplicar el término "modelo" dentro de la matemática misma. Me refiero aquí a la imagen no euclideana dentro de la geometría proyectiva -la invención de Cayley que fue interpretada como un modelo de Klein con el fin de concretizar la forma

abstracta de ver geometría no euclideana dentro del marco de la proyectiva que parecía más concreta. A pesar de no ser tan palpable como modelos de yeso, este modelo es ciertamente más accesible para la visualización que su pre-imagen. El ejemplo de Klein fue la raíz del presente concepto de modelo con respecto a sistemas axiomáticos: lo que está implícitamente dado por los axiomas formales es hecho explícito por medio de un objeto matemático adecuado que, por así decirlo, llena la forma axiomática con lo que parece contenido sustancial. Por ejemplo, un grupo particular o grupos de transformaciones en general funcionan como modelos del concepto de grupo definido general y axiomáticamente. O el espacio euclideano tridimensional en particular puede servir como un modelo de espacios lineales o métricos, axiomáticamente definidos. En la escala de concretizaciones, sin embargo, se puede progresar aún más, saliendo de la matemática pura y considerando el espacio físico o meramente experimentado como un modelo de su pre-imagen definida axiomáticamente.

Sólo para respetar la completitud, he mencionado este uso del término "modelo" que es realmente lo opuesto al término con el que comenzamos De hecho, en el presente contexto no nos atañen modelos de sistemas axiomáticos, que son profusamente usados en investigación fundacional, sino más bien la modelización en el sentido de idealización. De esta manera estamos en condiciones de simplificar situaciones complejas que son dominadas por teorías matemáticas de gran complejidad para ser prácticas, o que son sólo accesibles por medio de teorías matemáticas ad hoc.

Ya que nuestro tema es la modelización como un aspecto de la matematización, me gustaría enfatizar que en el presente contexto debería rápidamente incluir modelos tangibles concretos tales como los túneles de viento en los que son testeados los modelos de aeroplanos y las simulaciones de laboratorio de las teorías hidrodinámicas. En otras palabras, los modelos que son evaluados por observación más que por matemática, aunque su mera construcción requiriera más matemática que el procesamiento de modelos mucho menos tangibles. Ni siquiera excluiría simulaciones computacionales de estos modelos tangibles, en los cuales la evaluación fáctica requiere de menos matemática que la actividad de simulación. Por otro lado, me opongo fuertemente a la moda de pegar la etiqueta de "modelo" a cualquier sistema de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales (relacionadas con o surgiendo de la investigación aplicada), "modelo matemático", como les gusta llamarlo. De acuerdo con mi terminología, un modelo es justamente el, a veces indispensable, intermediario mediante el cual una realidad o una teoría compleja es idealizada o simplificada para lograr ser accesible a un tratamiento matemático más formal. Por lo tanto, no me gusta el término "modelo matemático" en un contexto en el cual falsamente sugiere que la matemática se aplica directa o indirectamente al medio ambiente. De hecho, esto solamente permaneció cierto mientras la matemática estaba fuertemente enmarañada con el entorno. Yo pongo tanto énfasis sobre el rol del modelo como intermediario porque la gente demasiadas veces no tiene conciencia de su indispensabilidad. Con demasiada frecuencia las fórmulas matemáticas son aplicadas como recetas en una realidad compleja que no tiene ningún modelo intermediario para justificar su uso.

La probabilidad y la estadística son ejemplos particularmente llamativos. En

probabilidad la urna de la cual se sacan las fichas, al igual que otros dispositivos al azar, es el modelo por medio del cual uno intenta matematizar todo en el mundo que parece ser condicionado por el azar: la polinización de las plantas por otras de la misma especie, casamientos o muertes en una población, que son vistas, correctamente o no, como si el formar pareja y la muerte se decidieran por tiros de suerte. Este modelo alcanza para aplicaciones simples de probabilidad en estadística. Por lo que sé, sin embargo, no existen modelos para mediar el uso convencional -o deberé decir ritual- de coeficientes de correlación y regresión y análisis factorial en un cierto tipo de investigación social, en especial educacional: estas herramientas han sido simplemente copiadas de otras ciencias donde están razonablemente justificadas por modelos intermediarios.
Mirando para atrás me doy cuenta que me he quedado más en modelos que en la modelización, y en términos más bien generales. Puede ser que fuera la sospecha de que esto pudiera ocurrir la verdadera razón por la cual dudé tanto tiempo en abordar este tema. Por supuesto, que podría haber saturado al lector con un catálogo de modelos convencionales, tales como osciladores armónicos, redes eléctricas, matrices de transición, procesos de difusión, juegos, mecanismos de dirección, dinámica de poblaciones, colas, etc. Algunos de estos modelos, con un gran dominio de transferencia, valen sin duda la pena ser adquiridos por los estudiantes de los que se espera le den un buen uso. Por el otro lado, aunque sea vagamente, definí modelización - como idealización y simplificación- y di en el clavo: para captar lo esencial de una situación (estática o dinámica) y enfocarlo dentro de lo que antes llamé un contexto rico y, a medida que las cosas progresan, dentro de contextos cada vez más ricos. Éste, entonces, es el punto de vista desde el cual voy a continuar buscando aspectos de la matematización

Buscando lo esencial,

Esto es buscando dentro de un contexto, lo que puede significar

- dentro de una situación y a través de situaciones
- dentro de un problema y a través de problemas
- dentro de un procedimiento y a través de procedimientos
- dentro de una organización y a través de organizaciones
- dentro de un esquema o a través de esquemas
- dentro de un algoritmo o a través de algoritmos
- dentro de estructuras o a través de estructuras
- dentro de una formulación y a través de formulaciones
- dentro de una simbolización o a través de simbolizaciones
- dentro de un sistema axiomático y a través de sistemas axiomáticos

¿Por qué esta multiplicidad de y “a través”? Porque descubrir características comunes, semejanzas, analogías, isomorfismos es la forma de llegar a

- generalizar

como un hábito subconsciente o como una actividad más o menos conciente. Más a menudo de lo que uno tiende a creer, la generalidad se logra mediante la experiencia de ahá (de comprensión) de un simple

- paradigma

solamente para ser reforzado por unos pocos (aunque no necesariamente) más. Ahora,

- generalizar paradigmas

es lo contrario a

- ejemplificar ideas generales

que, si son impuestas, es una instancia de lo que he tendido a denominar "inversión antididáctica", que trataré más adelante. De todos modos,

- enfocar la generalidad problemática paradigmáticamente

es una valiosa

- actividad heurística

a ser distinguida de la heurística de moda, que se entiende como un kit de herramientas prefabricadas.
Cuando destaqué la eficacia del paradigma único, tenía en mente el surgimiento repentino de objetos y operaciones mentales nuevos. Sin embargo, los objetos y las operaciones pueden hacerse rutina a través de la práctica diaria y finalmente cansar lo suficientemente para provocar

- el camino más directo,(eficiente) y atajos (acortamientos)

que pueden llevar a

- progresiva
    - organización
    - esquematización
    - estructuración

y en particular, en lo concerniente a lo simbólico y al lenguaje imbricado, a la

- progresiva
    - formalización
    - algoritmización
    - simbolización

Un aspecto particularmente importante de matematizar es el de

- reflexionar sobre las actividades propias

que pueden instigar a

- cambiar de perspectiva

con el posible resultado local de

- poner las cosas patas para arriba

y el global de

- axiomatizar

las que nuevamente, si impuestas, son instancias de inversión antididáctica.

1.3.3 Ejemplos

(Continúan en 1.3.5)

1. Encuentre el punto medio entre 16 y 72 en la línea numérica. Los niños que yo observé corrían uniformemente los dos puntos uno hacia otro, primero por unidades, y luego por pasos más largos, en particular por pasos de 10. Para abreviar llegaron a dividir por dos la diferencia, y adicionar la mitad al número más pequeño. En términos generales esto significa la expresión a+1/2(b-a) que en álgebra equivale a la más usual ½ (a+b). Luego que sugerí que alejar uno de otro los dos números también mantendría el medio, los niños finalmente corrieron el número menor hacia el 0 y por consecuencia el más grande hacia a+b que, por así decirlo, muestra la expresión usual para el punto medio.

   Más que imponer un método para encontrar el medio entre dos números, les es permitido desarrollarlo gradualmente, a través de la esquematización progresiva. Para alcanzar la generalización de este esquema, un paradigma parece ser suficiente, aun más allá del dominio de los números enteros. Si es verbalizado, la solución general “Yo adiciono los dos números dados y divido por 2” puede ser reformulada vía la etapa “la mitad de la suma de los dos números dados” en lenguaje algebraico y, de esta manera, contribuir a motivar la creación y el uso del lenguaje algebraico.

Otra indicación generalizadora puede ser haciendo la pregunta original con respecto a más de dos números, con el fin de establecer el objeto mental del promedio y el esquema de promediar. Sólo si uno está satisfecho con las generalizaciones formales esto puede ser hecho por medio de “la suma de los números dados dividido por tantos como sean dados”, o su equivalente algebraico. Por otro lado, tan pronto como se proponen como objetivo los contenidos, uno debería buscar situaciones en las cuales la adición visualizada se imponga de una manera natural o aun implícita a la situación. Por ej., no la adición de edades, tamaños, precios, etc., sino más bien consumos diarios de ciertos comestibles, horas de trabajo, los recibos o los gastos de una persona durante una semana o mes. O dada la consumición total de alguna comida u otro producto de alguna población, preguntar por la consumición per cápita, o en cuanto a la velocidad por segundo, como derivada de la velocidad por hora.

Sería demasiado entrar en más detalle tratando el concepto de promedio solamente en pro de la esquematización y la formalización. Sin embargo, voy a mencionar una generalización más del concepto de “medio”: el “medio” de una figura plana o un cuerpo sólido. Muchos aspectos de la matematización son requeridos para contestar las preguntas que pueden ser planteadas en este contexto.

2. Si una canilla llena una palangana en una hora y la otra en dos horas, ¿cuánto tardarán ambas en llenarla?

Este problema de venerable antigüedad (junto con otros venerables como por ejemplo, el de los dos trabajadores trabajando juntos, dos personas sobreviviendo juntas con una cierta cantidad de comida, etc.) parece ridículo solamente en la medida en que no es integrado al contexto más amplio de la matematización, se espera que sea resuelto de acuerdo con los esquemas tradicionales impuestos. Los niños a los cuales se les plantee el problema dividieron la palangana en dos partes, cada una de las cuales se supuso sería llenada separadamente por una de las canillas, dos tercios de la palangana por la “más grande” y un tercio por la más “chica”, de manera tal que ambas partes fueron llenadas en dos tercios en una hora. Aun cuando números más grandes fueron dados, los niños siguieron haciendo este razonamiento de visualizada proporcionalidad, apoyado, por ejemplo por la sustitución de un número de canillas “lentas” por una de canilla “rápida”. Esto diverge fuertemente del esquema tradicionalmente sancionado de reducción a una hora. Si las dos canillas llenan la palangana en a y b horas, respectivamente, entonces en una hora la primera llena 1/a y la segunda 1/b de la palangana, por lo tanto ambas juntas logran 1/a+1/b de ella y toda la palangana en

___1___ = a.b /a+b horas

1/a+ 1/b

El razonamiento de los niños, sin embargo, corresponde a dividir toda la palangana según la razón b:a, para ser llenada separadamente por las dos canillas, de manera que b/a+b de la palangana sea llenada por la primera, que es entonces el factor mediante el cual las *a* horas originales deben ser reducidas. Sorprendentemente, tan pronto como este tipo de problema toma la forma de dos personas caminando una hacia la otra con diferentes velocidades, los adultos que están familiarizados con este tipo de problema generalmente no notan su isomorfismo con los otros sino que lo resuelven por medio de gráficos lineales espacio–tiempo. Parece que las distancias a ser distribuidas entre dos personas son más proclives a producir estrategias geométricas que las cantidades de agua de canilla, trabajo, comida, etc. Los objetos mentales tales como “velocidad” son básicamente esquematizados y formalizados de dos maneras-opuestas: espacio por tiempo y tiempo por espacio. El segundo es particularmente preferido cuando se comparan logros deportivos. El consumo de gasolina es otro ejemplo de la esquematización melliza: el conductor estima cuán lejos puede llevarlo un tanque lleno con el fin de saber si puede cubrir una cierta distancia con un tanque.

Si uno es conciente de la multiplicidad de fenómenos relacionados con estas esquematizaciones mellizas y de la importancia de la interrelación de sus componentes, el problema de la palangana y las canillas, y sus compañeros comienzan a parecer menos ridículos. La adición y el cálculo de promedio armónico (esto es, luego de la transformación en recíprocos) es en efecto un esquema preciado. Para ser adquirido, requiere de una cuidada esquematización guiada.

3. El criterio de divisibilidad por 9, como se aprendió en la escuela, es difícilmente matemática, pero lo es desafiar su validez. El sistema posicional, modelado por el ábaco, puede ser fuente de esquematización: si el número dado es representado por bolitas en los arcos del ábaco; entonces transferir una bolita de un arco a otro significa cambiar el número por un múltiplo de 9; entonces si todos ellos son transferidos al arco unidad, resulta que el módulo 9, el número mismo es igual a la suma de sus dígitos Este razonamiento se extiende por generalización a otros sistemas posicionales.

4. Respecto de la esquematización, los porcentajes son un instrumento de demasiado alcance para tratar aquí en profundidad. Sólo indicaré una característica ya que es de extrema importancia: el cambio en la estructuración.

   De p : por ciento más o menos a (1 + *p*/100) o (1 - *p*/100) veces

5. ¿Cuándo una de las agujas del reloj cubre a la otra? Las series infinitas, el álgebra simple o los gráficos lineales pueden contestar esa pregunta, pero una vez respondida, un atajo produce el mismísimo esquema: durante un giro completo de la aguja corta, la aguja larga gira 12 veces, en consecuencia, pasa a la corta 11 veces cada 12 horas a intervalos iguales. Éste es un esquema de largo alcance, que se aplica a otros para explicar unos cuantos fenómenos astronómicos.

6. Diez niños están en un cumpleaños; hay dos varones más que niñas.

   Una lata de leche con leche pesa 10 kg. La leche que queda en ella pesa 2 kg. más que la lata vacía.

Pollos y conejos en una granja: 13 cabezas y 36 pies.
Comenzando por ensayo y error, cosa que se vuelve menos eficaz con números mayores, los niños comienzan a usar una rica variedad de esquemas preferentemente visuales para contestar a las preguntas referidas. Los razonamientos comienzan con ***Si***: Si cada niña toma a un varón,… Si cada conejo fuera un pollo,… Una vez más se llega al final de la generalización a través del álgebra.

7. En caso de que todavía no lo conozcan, deténganse a pensar en el siguiente problema: Hay una multitud de gente que cumple que entre cada 5 personas hay por lo menos 2 de la misma edad (podría haber más de una misma edad). ¡Demuestren que cada 17 de ellas hay por lo menos 5 de una misma edad! Quizás tratarán de abordarlo a partir de varios esquemas visualizados sólo para terminar cambiando la perspectiva: De hecho, no hay más que cuatro edades diferentes.
8. Dos jugadores tienen una pila de fósforos de la que sacarán, por turno, entre uno y diez fósforos. El que saca los últimos fósforos gana el juego. Dado que el ganador finalmente explica la estrategia al perdedor, finalmente casi toda la gente sabe como resolverlo. Así que trabajemos con el siguiente juego que requiere distintas reglas:
Dos jugadores tienen una pila de fósforos de la que sacarán, por turno, una cantidad de fósforos que serán una potencia de 2 (1, 2, 4, 8, 16, …). Una vez más el jugador que saca los últimos fósforos gana el juego.

Si la pila es de 1 ó 2, el primero en jugar gana; si es de 3, pierde; si es de 4 gana, al igual que con 5 sacando 2, deja al otro jugador en la posición de perder 3. Si la pila fuera de 6, sin embargo, ya sea que sacara 1, 2 ó 4, cedería la posición ganadora al contrincante y, en consecuencia, perdería. 7 y 8 se pueden salvar sacando 1 y 2 respectivamente pero 9 es, otra vez, la posición perdedora. Continuando así, uno se daría cuenta de que los múltiplos de 3, y no otros números, ocasionan la posición perdedora para el jugador a quien le toca jugar. ¿Cómo se puede probar esto? El resultado sugiere el módulo aritmético 3. Las potencias de 2 módulo 3 equivalen a 1 ó 2. De manera que no interesan para nada todas esas potencias de 2 “eruditas” sino que todo se reduce a sacar uno o dos fósforos: una pequeña variación del viejo juego.
Otra variante: sólo se pueden sacar números primos (el 1 incluido). Una vez más, hacemos una lista de las posiciones ganadoras y perdedoras para el jugador de turno:
Claramente
1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11,...son posiciones ganadoras
4, 8, 12,…son posiciones perdedoras.
En efecto, cualquiera sea el primo que se reste al 12, por ejemplo, otorga la posición ganadora. Sin embargo, restando 1, 2 ó 3 de un número en la sucesión superior pone al otro jugador en la sucesión inferior. Esto sugiere que el módulo aritmético 4, rebaja al juego al viejo con sólo reemplazar 10 por 3.
Aun una versión más: Los números que pueden sacarse son el 1 y el 4. Luego las posiciones
1, 3, 4, 6, 8, 9, 11,… son posiciones ganadoras
2, 5, 7, 10, 12,… son posiciones perdedoras.

Módulo 5,
1, 3, 4 son ganadoras,
y 0, 2 son perdedoras.
En efecto, el jugador a quien le toca jugar en el primer tipo de condición puede contestar cualquier movida -1 por -4 y viceversa, y, en consecuencia conservar su condición.
Los juegos propuestos aquí muestran características similares. ¿Cuál es la naturaleza más profunda de su similitud? ¿Son sólo paradigmas de uno más general?, y de ser así, ¿cómo se formula esto?
En lugar de comenzar paradigmáticamente en cada caso como hicimos, la forma usual de presentación es comenzar con el resultado final para probarlo: la inversión antididáctica. Presentamos un final abierto más que un resultado final.

9. Una secuencia de discos 1, 2, 3,…; de un lado, negros; del otro, blancos. Al comenzar, todos tienen el lado negro hacia arriba. Se dan vuelta todos los discos con números pares, luego todos los divisibles por 3, luego todos aquellos divisibles por 4, y así sucesivamente. ¿Cuáles quedarán al final con el lado negro hacia arriba? Las personas comienzan experimentalmente, luego buscan los divisores primos y cosas por el estilo, sólo para terminar por el atajo que cualquier divisor no-trivial *k* de *n* tiene su divisor recíproco n/k, ambos coinciden sólo en el caso en que *n* sea un cuadrado. Una exposición clara comenzaría justo en este punto.
10. Esquematizar experiencias como las siguientes nos lleva a la idea del conteo múltiple: tres aristas que se encuentran a cada lado de los ocho vértices de un cubo parecerían resultar en ocho veces tres lados mientras que, de hecho, no hay más que 12 de ellas.
11. Dibujen una línea punteada a través de los 5 puntos (fig. 2) del Cinco de un dado,

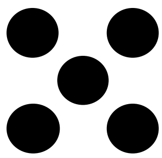


Fig. 2

tocando cada punto sólo una vez, nada más. ¿Cuántas figuras diferentes se pueden obtener?
Primero, debe esquematizarse la idea de “figuras diferentes”, que se hace a través de lo que llamamos congruencia. Luego, se debe estructurar el procedimiento de conteo clasificando apropiadamente, por ejemplo, con respecto al punto del medio de Cinco: tomarlo como el principio, como la primera parada, como la segunda parada, y continuar de este modo con un vértice.
12. Un aspecto muy distinto de la matematización pero uno de los de los problemas anteriores se ejemplifica con el famoso “granos sobre el tablero de ajedrez”: Para calcular 2^{64}, se reemplaza 2^{10} por 10^3. Éste es un ejemplo de esquematización numérica.

13. Hasta ahora he desatendido las características lingüísticas de la matematización. Así que, para elegir, consulté [87, IV, 15]. Elegir significa perder, lo que no me gusta. Así que, por favor, ¡hagan lo mismo que yo!
14. Tampoco le presté demasiada atención al cambio de perspectiva. Éste es un tema particularmente rico como se manifiesta a partir de los ejemplos [87, IV, 16]. Por de pronto podría agregar muchos más pero no lo haré. Este tema merece un tratamiento mucho más sistemático, el cual no me atrevo a comenzar.
15. Un barril cerrado en su parte superior excepto por 4 agujeros que forman un cuadrado (Fig. 3).

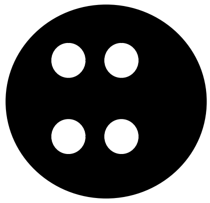


Fig. 3

Justo debajo de los agujeros hay cuatro discos; de un lado, negros y, del otro, blancos (aunque el color es invisible). Al jugador se le permite elegir uno o dos agujeros y dar vuelta los discos correspondientes. Después de esta operación, se rota el barril al azar sobre su eje vertical hasta que quede en otra posición, con todo de manera tal que el jugador no pueda identificar los agujeros que eligió antes, Se repite la operación *ad libitum*. Tan pronto como todos los discos muestran el mismo color en su parte superior, suena una campana y el juego termina.
¡Busquen una estrategia que garantice que todos los discos mostrarán el mismo color al final!
Este problema es una rica mina en características de la matematización. Ya que no me gustaría desilusionar a los lectores que disfrutarían resolver el problema por sí mismos, relegué la solución a un Apéndice.

1.3.4. Matematizando - horizontal y verticalmente

Treffers en su tésis [3] de 1978, distinguió la matematización horizontal de la vertical -no agudamente sino con algunas reservas: la matematización horizontal, que hace que un campo de problemas sea accesible al tratamiento matemático (matemático en el estrecho sentido formal) versus la matematización vertical, que efectúa el proceso matemático más o menos sofisticado. Por mucho tiempo yo dudé en aceptar esta distinción. Me preocupaba la equivalencia teórica de ambos tipos de actividades y, como consecuencia, su estatus igual en la práctica, que temía fuera puesto en peligro por esta distinción. ¡Cuán a menudo he sido decepcionado por matemáticos interesados en la educación que estrechaban la matematización a su componente vertical, lo mismo que por los educacionalitas que se volcaban a la educación matemática restringiéndola a la horizontal (para usar la terminología de Treffers)!. Finalmente me he reconciliado con la idea de esa distinción, inclusive hasta el punto de apreciarla positivamente; agrego

algunos matices a su formulación, pero de una manera que respeta las intenciones de Treffers, por lo menos eso creo. He aceptado la distinción por sus consecuencias en la educación matemática y, en particular, por caracterizar los estilos educacionales. Explicaré esto en detalle cuando trate los marcos teóricos de la educación matemática (3-1-2).
Caractericemos la distinción de la siguiente manera: la matematización horizontal lleva del mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida uno vive, actúa (y sufre); en el otro, los símbolos son formados, reformados y manipulados mecánica, comprehensiva, reflexivamente; esto es la matematización vertical. El mundo de la vida es lo que se experimenta como realidad (en el sentido en el que usé la palabra antes), como es el mundo de los símbolos respecto de su abstracción. Sin duda, las fronteras de estos mundos son más bien vagamente marcadas. Los mundos pueden expandirse y comprimirse, también a costa de uno u otro. Algo puede pertenecer en una instancia al mundo de la vida y en otra, al mundo de los símbolos (sistemas de rutas, mapas geográficos, figuras geométricas, facturas, mesas, formularios a llenar, etc.). El número natural puede ya pertenecer al mundo de la vida, mientras que la adición abstracta aún requiere esquemas simbólicos. La adición abstracta puede haber sido incorporada al mundo de la vida, mientras que la cognición de su conmutatividad (o multiplicación basada en ella) aún necesita modelos que son procesados y cuya equivalencia es comprendida en el mundo de los símbolos. Para el matemático experto los objetos matemáticos pueden ser parte de su vida de manera bastante diferente que para el novato. La distinción entre matematización vertical y horizontal depende de la situación específica, la persona involucrada y su ambiente Además de estas generalidades, ejemplos de varios niveles son la mejor manera de explicar la diferencia entre matematización horizontal y vertical

1.3.5. Ejemplos

1) Contar: Para contar un conjunto sin estructura de objetos o eventos debe ser estructurado manual, visual, acústica o mentalmente; mientras que en un conjunto más o menos estructurado, la estructura disponible deber ser descubierta o reforzada. Esto requiere de matematización horizontal. Aplicar la secuencia de conteo a esta estructura (creada o descubierta), por el otro lado, es matematización vertical, que dependiendo de la estructura, puede tener lugar de una manera más o menos sofisticada: usando multiplicación, por ejemplo, para contar un conjunto presentado o interpretado en una estructura rectangular.
2) Más o menos: estructurar dos conjuntos dados simultáneamente puede ser matematización horizontal mientras que averiguar cuál es parte de cuál puede ser matematización vertical. O, a otro nivel, contar ambos puede ser matematización horizontal; mientras que en este caso recitar la secuencia numérica y escuchar qué número precede a cuál, puede ser matematización vertical.
3) Sumar: Un problema que requiere de la adición de cinco y tres bolitas imaginarias que son adicionadas unas a otras puede ser matematización horizontal por el “esquema de dedos”, mientras que contar los dedos puede aún ser matematización vertical. O a otro nivel, el problema

precedente es matematizado horizontalmente por la suma aritmética 5+3, que es resuelta verticalmente contando consecutivamente, o por el reemplazo de 4+4, o de memoria.

4) Sumar: Si el dominio de los números hasta 10 pertenece al mundo de la vida, entonces resolver 8+5 de la manera (10-2)+(5+2)=10+5 puede ser matematización vertical, mientras que las estructuras de ambos sumandos han sido obtenidas horizontalmente.

5) Conmutatividad: Reemplazar 2+9 por 9+2 puede ocurrir debido a matematización horizontal si 2 y 9 son combinados visual o mentalmente como conjuntos linealmente estructurados y su combinación es leída hacia atrás. Puede ser verticalmente interpretado en la medida en que la ley de conmutatividad sea generalmente aplicada

6) Sumar: Es un signo de matematización vertical cuando la adición es usada en situaciones como la que sigue: luego de que las distancias A a B y de B a C han sido recorridas, la distancia de A vía B a C, en vez de ser recorrida nuevamente, es obtenida por adición.

7) Multiplicar: cinco veces ocho (cosas) puede ser matematizado horizontalmente por un esquema rectangular de 5 filas de 8 cada una. En matematización vertical, esto es por ejemplo leído como una secuencia 8, 16, 24, 32,40.

8) Multiplicar. A la larga, la adición de sumandos iguales es reconocida y tratada como otra operación, un proceso que comienza horizontalmente y finaliza verticalmente.

9) Dividir: Cuando dividimos un número de objetos por un número de personas (por ej., que juegan a las cartas y se reparten las cartas alrededor de la mesa), uno puede empezar distribuyendo los objetos uno por uno, o distribuyendo un número igual de objetos a cada persona, hasta que los objetos se acaben; ésta es la matematización horizontal del problema de la distribución. La matematización vertical puede ser vista en la búsqueda de reparticiones grandes que se van incrementando (finalmente tan grandes como sea conveniente) con el fin de acortar el proceso. Este proceso es un ejemplo conspicuo de esquematización progresiva (en el presente caso, algoritmización progresiva) finalmente dirigida hacia el algoritmo standard de división larga.

10) Combinatoria: Si A y B son unidos por 3 rutas, y B y C por 4 rutas, entonces ¿cuántos caminos llevan de A vía B a C? La matematización horizontal es reconocer la estructura del problema, que puede comenzar con conteo inteligente para terminar con matematización vertical por medio del producto. Aplicar este “esquema de rutas” a otras situaciones puede ser tanto matematización horizontal como vertical dependiendo del caso. Si se reemplazan 3 y 4 por símbolos de letras, es matematización vertical.

11) Razón: La matematización de la semejanza visual, aritmética o geométricamente, puede tener lugar a lo largo de un camino donde los tramos horizontales y verticales alternan unos con otros, empezando con afirmaciones como: lo que es doble en tamaño aquí, debe ser también doble en tamaño allí.

12) Razón: Poner los resultados del fútbol 2 a 1, y 3 a 2 como equivalentes, puede ser refutado comparándolos con 4 a 3, 5 a 4, etc., lo que es una trampa de la matematización vertical. Tratar de encontrar un método más

justo de comparación puede requerir del uso de esquemas geométricos introducidos horizontalmente y procesados verticalmente, o tablas de proporcionalidad.

13) Linealidad: La razón puede ser más matematizada verticalmente por el esquema y el gráfico de línea recta de la función lineal, como pueden ser matematizadas horizontalmente muchas situaciones de la vida cotidiana que involucran la razón. La relación entre la razón constante y la rectilinealidad es una acción de matematización vertical, como lo es la relación entre el valor de la razón y la pendiente del gráfico. La matematización horizontal de transacciones comerciales que incluyen una razón tanto fija como proporcionalmente determinada es seguida por una vertical de rasgos que relacionan la transacción con los del gráfico.

14) Números figurales: Los tamaños y las relaciones entre números figurales pueden ser un tema de matematización horizontal siempre que sean geométricamente representados. Por ejemplo, (fig. 4): la suma de los primeros números impares *n* es igual al cuadrado enésimo. O (fig. 5): la suma de los *n*-1 números triangulares y el número triangular n es igual al cuadrado enésimo. Tan pronto como tales expresiones y relaciones son puestas en fórmulas para ser procesadas, la matematización vertical asume esto, que en el tiempo fue experimentado horizontalmente. Los pasos inductivos requeridos para probar tales relaciones son nuevamente de carácter vertical. Verbalizar la inducción completa, como lo exige la prueba es nuevamente un acto de matematización vertical

15) El triángulo de Pascal. Esta situación es similar a la precedente. En tanto el triángulo es dado como tal, las numerosas relaciones entre sus elementos son obtenidas por matematización horizontal. La expresión algebraica usual de los coeficientes de un binomio requiere de la matematización vertical, como los conocidos problemas de combinatoria relacionados al triángulo de Pascal.

16) Área: Las áreas delimitadas por bandas elásticas en el geoplano son obtenidas numéricamente por matematización horizontal. De esta manera, el descubrimiento de que triángulos con igual base y altura tiene también igual área parece sorprender aun a bastantes adultos que aprendieron geometría en la escuela. Relacionar esta experiencia con la fórmula para el área triángulos requiere de matematización vertical.