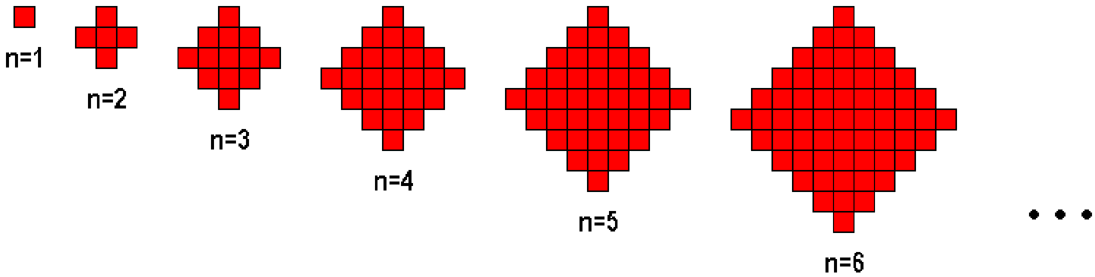
VARIACIONES SOBRE UN TEMA DE ROMBOS PIXELADOS

Oscar Bressan
GPDM

Comentaremos distintas propiedades de figuras geométricas que convenimos en llamar rombos pixelados

§ I) Caracterización de los rombos pixelados

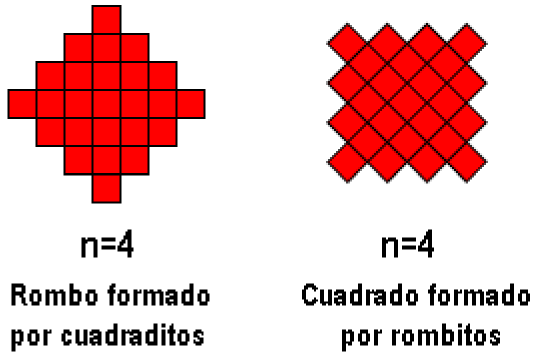
Vamos a llamar "Rombos pixelados" a rombos formados por cuadraditos conforme la siguiente secuencia:



Ponemos puntos suspensivos para indicar que esta secuencia continúa para cualquier n. En consecuencia, hay infinitos rombos pixelados y usamos el número "n" como forma cómoda para identificarlos.

Observación

Si se gira 45^{o} a los rombos pixelados tenemos cuadrados pixelados formados por rombitos. Por ejemplo para n = 4:



Vemos que el número "n" que le asignamos a cada rombo pixelado se corresponde con el número de rombitos que limitan al cuadrado (en este caso "n" es igual a 4 y hay 4 rombitos en el lado de cada cuadrado). Para n = 1 hay un rombito, para n = 2 hay 2 y así siguiendo.

Nos aparecen varias preguntas para pensar:

I.a1) Hemos presentado los rombos pixelados a través de figuras, pero ¿cómo describiríamos por teléfono a otra persona la familia de los rombos pixelados? (estamos pidiendo una definición, sin usar gráficos).

(Solución: Hay muchas propuestas posibles. Una de ellas sería:
Un cuadradito es el rombo pixelado para n = 1.
Para n = 2 en la primera línea pongo un cuadradito, en la segunda línea pongo un trencito de tres cuadraditos y en la tercera línea pongo un cuadradito, cuidando que el cuadradito de la primera línea esté pegado con el cuadradito central de la segunda línea, y también el cuadradito de la tercera línea esté pegado al cuadradito central de la segunda línea. O sea que todas las líneas están centradas.
Para n = 3 en la primera línea va un cuadradito, en la segunda va un trencito de 3 cuadraditos, en la tercera de 5, en la cuarta de 3 y en el quinta va 1, y los cuadraditos centrales de cada fila van pegados a los de la fila anterior y a la siguiente. O sea que todas las filas están centradas.
Para n = 5 las filas deberán tener 1, 3, 5, 7, 5, 3 y 1 cuadraditos, todos centrados y pegados.
Y así sucesivamente para los rombos pixelados siguientes.)

I.a2) ¿Cómo describiríamos coloquialmente, en particular, el rombo pixelado "n", sin gráficos?

(Ejemplo de solución: Se disponen los cuadraditos en 2 × n - 1 líneas. En la primera línea va un cuadradito, en la segunda línea un trencito de 3 cuadraditos (2 más que en la primera), en la tercera línea 5 (2 más que en la segunda), y así van sucesivos trencitos, cada uno de 2 cuadraditos más que la fila anterior hasta la fila n, donde van 2 × n - 1 cuadraditos (es la diagonal). De allí en adelante cada fila tiene 2 cuadraditos menos que la fila anterior hasta llegar a la fila 2 n - 1 que lleva un cuadradito solo. Obsérvese que hay igual número de filas que el número de cuadraditos que hay en la diagonal. Todas las filas deberán estar centradas.)

I.b1) Si tengo el rombo pixelado "n" (donde "n" es cualquier número), ¿cuántos cuadraditos tiene la diagonal?

(Solución: la diagonal del rombo corresponde a un número impar, por lo tanto el rombo"n" tiene como diagonal:

$$\text{diagonal} = n + (n - 1) = (2 \times n - 1) \text{ cuadraditos)}$$

I.b2) ¿Cuántos cuadraditos forman el enésimo rombo? ¿Podrías expresarlo con una fórmula?

(Algunas soluciones:
1)

N (orden rombo)	***Número de cuadraditos***	***Número de cuadraditos***	***Número de cuadraditos***
1	***1***	$1 + 0^2.2$	***1***
2	***3 + 1.2***	$3 + 1^2.2$	***5***
3	***5 + (1+3).2***	$5 + 2^2.2$	***13***
4	***7 + (1 + 3 + 5).2***	$7 + 3^2.2$	***25***
5	***9 + (1+3+5+7).2***	$9 + 4^2.2$	***41***
6	***11 +….***	$11 + 5^2.2$	***61***
...	***...***	***...***	***…***
...	***...***	***...***	***...***
n		$2n-1 + 2 (n-1)^2$	$= 2n(n-1) +1$ ***ó***

			$n^2 + (n+1)^2$

2) Otra solución es pensar al rombo inscripto en un cuadrado y establecer el área del rombo por diferencia de áreas (área cuadrado menos cuádruplo de escaleritas laterales):

Rombo n = 1	***n = 2***	***n = 3***	***n = 4***	***n = 5***
1	***3^2 -1.4***	***5^2 -(1+2).4***	***7^2- (1+2+3).4***	***9^2-(1+2+3+4).4***
1^2 - (0).4	***3^2 -(1).4***	***5^2 -(3).4***	***7^2- (6).4***	***9^2 -(10).4***

Observamos que, en cada caso, queda el área del cuadrado donde está inscripto el rombo, menos la suma de la sucesión aritmética de razón 1 y (n - 1) términos[1] , multiplicada por 4

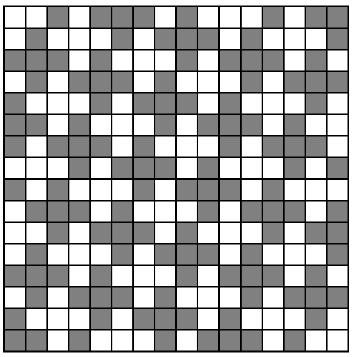
$$(2n-1)^2 - [n.(n-1)/2]\ .4 = 2n^2 - 2n + 1 = n^2 + (n+1)^2$$

3) Para otra solución usando diferencias finitas ver Anexo 1.

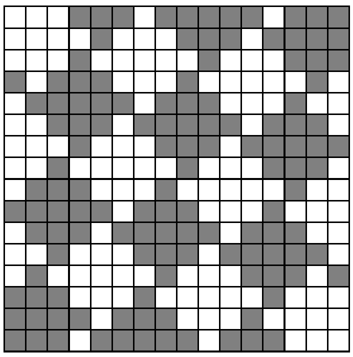
§ II) Teselar el plano con rombos pixelados

a) ¿Es posible teselar el plano con rombos de igual clase?

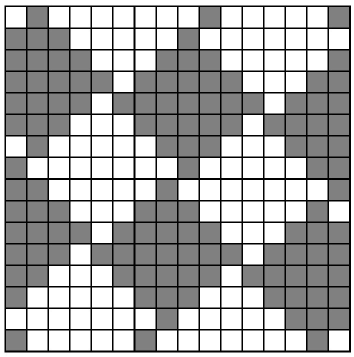
Intentemos teselar el plano con rombos pixelados. Vemos que esto es posible (por lo menos para "n" pequeños):



Teselado con n = 2



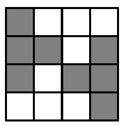
Teselado con n = 3



Teselado con n = 4

b) ¿Se puede teselar el plano con rombos pixelados para cualquier n? Cualquiera que sea su respuesta, justifíquela.

(Respuesta: sí, para cualquier n. Se encastran siempre entre sí los rombos de igual n, formando un encuentro de esquinas con una estructura del tipo que ilustra la figura y suma de ángulos igual a 360º):



[1] Aparecen así los números triangulares indicados entre paréntesis, extrapolando al 0 como tal, aunque no es lo habitual.

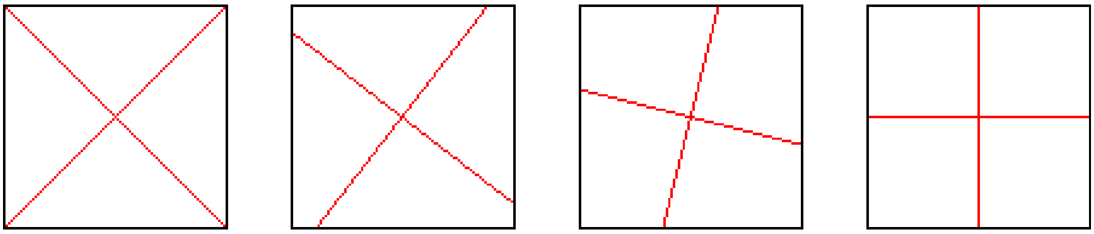
c) ¿Se puede teselar el plano mezclando rombos de distinto número de cuadraditos?

(Respuesta: Sí, siempre y cuando se usen también rombos de n = 1, o sea cudraditos sueltos. Si no se usan rombos con n =1, entonces no hay solución posible).

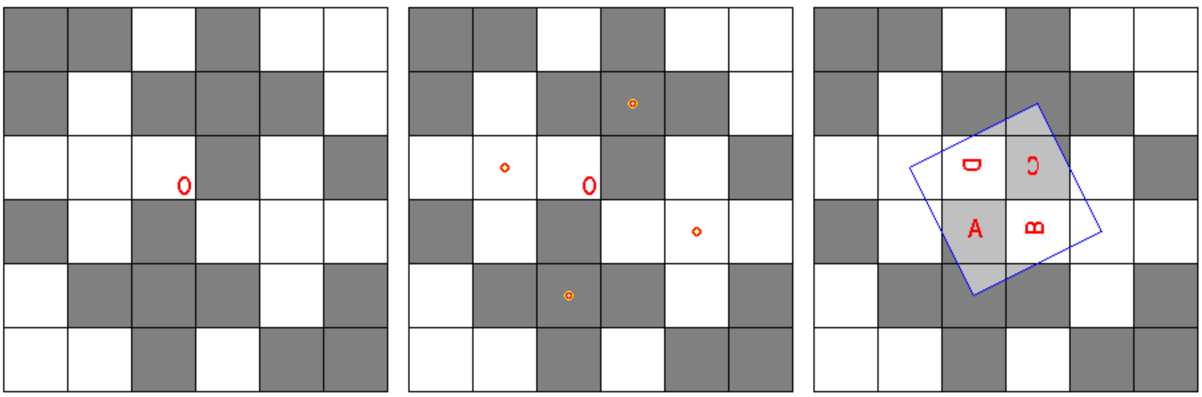
§ III) Cortando rombos pixelados

a) ¿Es posible cortar cualquier rombo pixelado en cuatro partes iguales para formar un cuadrado?

(Soluciones: El rombo pixelado n = 1 es un cuadradito, y es trivial dividirlo en cuatro piezas iguales que formen un cuadrado. De hecho en este caso se puede dividir al cuadrado de infinitas maneras diferentes, con tal que el corte sea una cruz que pase por el centro del cuadradito. Se muestran a continuación cuatro formas posibles, que obviamente ¡son un cuadrado!:



Vamos ahora al rombo pixelado n = 2. De hecho los cortes usando simetrías del rombo no nos conducen a nada.
El tema es más difícil, pero existe por lo menos una solución:
Vamos al teselado y elegimos un vértice donde confluyen las esquinas de cuatro rombos pixelados, que hemos llamado "O". Luego marcamos los centros de los cuatro rombos pixelados que confluyen en el vértice O. Finalmente unimos los centros entre los rombos vecinos colindantes y obtenemos un cuadrado (ver problema b):

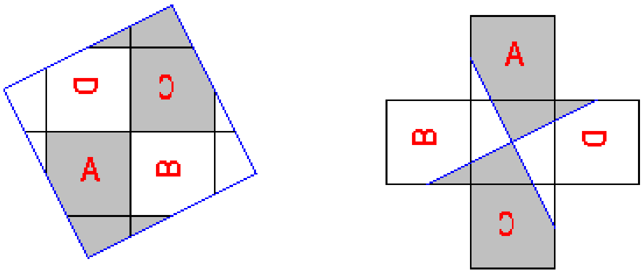


Elección del origen   Marcar los centros   Unir los centros

Ese cuadrado tiene la misma área que un rombo pixelado n = 2 (ver problema c) y está compuesto por cuatro piezas exactamente iguales:

Las cuatro piezas iguales

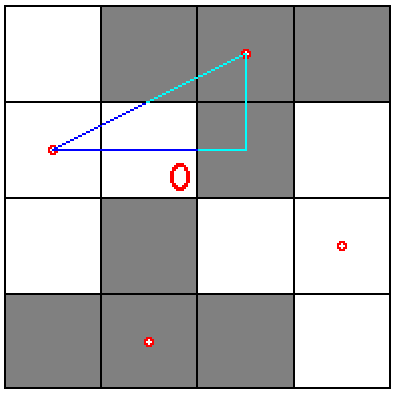
y con esas cuatro piezas podemos armar un cuadrado o un rombo pixelado:



Del cuadrado al rombo pixelado

Esto genera nuevas preguntas:

b) Si se unen los centros entre los rombos n = 2 vecinos colindantes, ¿se forma exactamente un cuadrado? ¿Por qué?



(Solución: Por simple simetría; si se gira el teselado 90º se vuelve a obtener el mismo teselado.Esto implica que el cuadrado gira 90º y queda en el mismo lugar).

c) ¿Cuánto es el área del cuadrado?

(Solución: En principio debemos reconocer que debe coincidir con el área del rombo correspondiente. Por ejemplo, para un rombo n=2, el lado del cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos valen 1 y 2 (medidos en ancho de cuadraditos). Por Pitágoras la hipotenusa vale $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ *y la superficie del cuadrado es el lado al cuadrado y vale 5, igual que el rombo pixelado de n = 2).*

d) Siguiendo el procedimiento de elegir un vértice O, marcar los centros de los cuatro rombos pixelados colindantes y unir los centros, hacer una construcción similar de un cuadrado para los rombos n = 3 y n = 4. *(Vale la pena hacerlos en papel y recortarlos como piezas de rompecabezas)*

e) Usando Pitágoras determinar el lado del cuadrado que resulta para el rombo n = 3 y para el rombo n = 4.

(Solución: $\sqrt{13}$ y $\sqrt{25}$ *)*

f) El procedimiento de elección del vértice O, marcar los centros y unir los centros para formar un cuadrado, ¿es válido para cualquier rombo n? ¿Por qué?

(Solución: Si, porque al determinar los 4 puntos centrales de los rombos, todos equidistan del O y obtenemos un cuadrilátero de isometría 4 de ángulo 90º y por lo tanto un cuadrado)

ANEXO 1
Cantidad de cuadraditos de cada rombo pixelado por diferencias finitas.

Es interesante poder determinar cuántos cuadraditos tiene cada rombo pixelado. Nos interesa encontrar una fórmula que nos de el número de cuadraditos como función de "n". En el fondo estamos buscando una **regularidad**. Para ello vamos a trabajar empíricamente, y hacemos una tabla de la cantidad de cuadraditos para los primeros 6 rombos pixelados, por contaje directo a partir de las figuras:

n	y(n) = Cantidad de cuadraditos
1	1
2	5
3	13
4	25
5	41
6	61

Como es de esperar la cantidad de cuadraditos aumenta al aumentar n, pero no se observa una regularidad simple.

Para estudiar este comportamiento vale la pena hacer **un paréntesis** y encontrar un procedimiento para ajustar funciones, restringiéndonos a las funciones polinomiales. O sea que queremos encontrar una función de n [esto es una y(n)], y sospechamos que la función es un polinomio, o sea:

$$y(n) = a_0 + a_1 . n + a_2 . n^2 + a_3 . n^3 + ...$$

donde a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , etc, son constantes, multiplicadas por potencias crecientes de n.

Para verificar que realmente la función es un polinomio vamos a hacer una tabla. En la primer columna vamos a poner a n. En la segunda columna vamos a poner los valores de la función para cada n. En la tercer columna pondremos la diferencia y(n) - y(n-1) y la llamaremos dif1(n), o diferencia primera. En la cuarta columna pondremos la diferencia entre dif1(n) y dif(n-1) y la llamaremos dif2(n), o diferencia segunda. En la quinta columna irá dif3(n) = dif2(n) - dif(n-1), o diferencia tercera. Así podemos seguir con las diferencias sucesivas en las columnas siguientes.

Trabajemos con un ejemplo. Supongamos que tenemos:

Para n = 1 y(1) = 1
Para n = 2 y(2) = - 4
Para n = 3 y(3) = - 7
Para n = 4 y(4) = - 2
Para n = 5 y(5) = 17
Para n = 6 y(6) = 56
Para n = 7 y(7) = 121
Con estos valores hacemos la tabla:

n	y(n)	dif1(n)	dif2(n)	dif3(n)	dif4(4)
1	1				
2	-4	-5			
3	-7	-3	2		
4	-2	5	8	6	
5	17	19	14	6	0
6	56	39	20	6	0
7	121	65	26	6	0

y encontramos que las diferencias cuartas son todas nulas. (y todas las diferencias sucesivas también van a ser nulas).

Esto algo quiere decir. Si hiciéramos un estudio cuidadoso, la conclusión que encontraríamos es:

Si las diferencias primeras son nulas <dif1(n) = 0>, entonces y(n) es una constante:

$$y(n) = a_0$$

Si en cambio las primeras diferencias que se anulan son las diferencias segundas:

$$y(n) = a_0 + a_1 . n$$

y tenemos una dependencia lineal en n.

Si las primeras diferencias que se anulan son las diferencias terceras:

$$y(n) = a_0 + a_1 . n + a_2 . n^2$$

y tenemos una dependencia cuadrática (o parabólica) en n.

Si las primeras diferencias que se anulan son las diferencias cuartas, como ocurre en el ejemplo de la tabla anterior, tendremos:

$$y(n) = a_0 + a_1 . n + a_2 . n^2 + a_3 . n^3$$

con una dependencia cúbica en n.
Y así sucesivamente.

¿Cómo hacemos para determinar los coeficientes de la función? No es muy dificil. Tenemos que buscar un sistema de cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas (a_0, a_1, a_2 y a_3). Concretando para el ejemplo de la tabla tenemos para n = 1, 2, 3 y 4:

para n = 1 y(1) = 1 ➔ $1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$
para n = 2 y(2) = -4 ➔ $-4 = a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2 + 8\,a_3$
para n = 3 y(3) = -7 ➔ $-7 = a_0 + 3\,a_1 + 9\,a_2 + 27\,a_3$
para n = 4 y(4) = -2 ➔ $-2 = a_0 + 4\,a_1 + 16\,a_2 + 64\,a_3$

donde hemos reemplazado las potencias de n para n=1, 2 ,3 y 4, por sus valores.

Resolviendo el sistema obtenemos:

$a_0 = 2$
$a_1 = 3$
$a_2 = -5$
$a_3 = 1$

de modo que la función es:

$$y(n) = 2 + 3\,n - 5\,n^2 + n^3$$

lo que se puede verificar inmediatamente.

Volvamos a los rombos pixelados. Con los datos de la cantidad de cuadraditos para cada n, y con el cálculo de las diferencias primera, segunda y tercera, hacemos la siguiente tabla:

n	y(n)	dif1(n)	dif2n)	dif3n)
1	1			
2	5	4		
3	13	8	4	
4	25	12	4	0
5	41	16	4	0
6	61	20	4	0

Como las diferencias terceras se hacen nulas, entonces la cantidad de cuadraditos (y(n)) tiene una dependencia cuadrática (parabólica):

$$y(n) = a_0 + a_1\, n + a_2\, n^2$$

Tenemos tres incógnitas (a_0, a_1 y a_2) y entonces planteamos un sistema de tres ecuaciones:

para n = 1 $\quad y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = a_0 + a_1 + a_2$
para n = 2 $\quad y(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = a_0 + 2\, a_1 + 4\, a_2$
para n = 3 $\quad y(3) = 13 \quad \Rightarrow \quad 13 = a_0 + 3\, a_1 + 9\, a_2$

donde hemos reemplazado las potencias de n para n=1, 2 y 3, por sus valores.

Resolviendo el sistema obtenemos:

$a_0 = 1$
$a_1 = -2$
$a_2 = 2$

y la función es (reemplazando los coeficientes):

$$y(n) = 1 - 2\, n + 2\, n^2 = n^2 + (n-1)^2$$

Esto nos permite determinar la cantidad de cuadraditos para cualquier n, sin tener que hacer ningún gráfico.

4) ¿Cuántos cuadraditos tiene el rombo pixelado n = 10?

(Respuesta: $10^2 + 9^2 = 181$ cuadraditos)

5) ¿Cuántos cuadraditos tiene el rombo pixelado n = 14?

(Respuesta: $14^2 + 13^2 = 365$ cuadraditos)

ANEXO 2
Las áreas de los rombos pixelados y una familia de ternas de Fermat.

Antes de pasar al próximo tema que queremos desarrollar vamos a hacer una breve introducción. Pierre de FERMAT (1601-1665) era un abogado francés que hizo contribuciones muy importantes al desarrollo de las matemáticas. En particular, y dentro de la "teoría de números" formuló lo que hoy se conoce como el último teorema de Fermat y que dice que si a, b, c y n son números naturales, entonces las ecuación

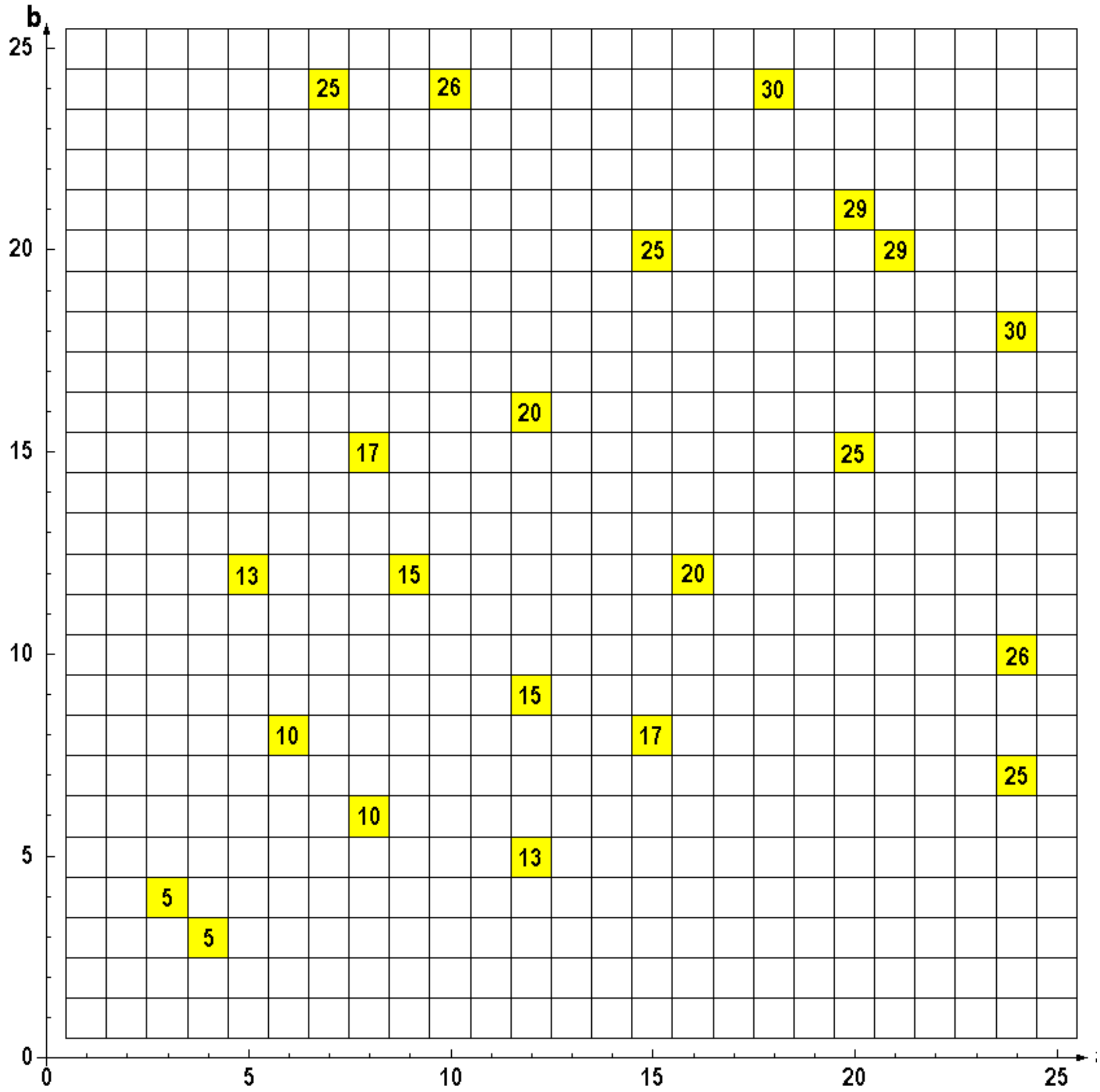
$$a^n + b^n = c^n$$

no tiene ninguna solución si n > 2. Para n = 2 existen muchas ternas de números naturales a, b y c (que llamaremos ternas de Fermat) que satisfacen la ecuación. Por ejemplo:

3, 4 y 5	ya que	$3^2 + 4^2 = 5^2$
16, 63 y 65	ya que	$16^2 + 63^2 = 65^2$

En el gráfico que aparece más abajo se marcan todos los valores naturales de a (abscisa) y b (ordenada), entre 1 y 25, que satisfacen la ecuación para n = 2. En el cuadradito de intersección se escribe3 cuanto vale "c" en los casos en que se satisface la ecuación:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{con c natural.}$$



Por ejemplo, para a = 12 y b = 5 encontramos que el cuadradito de intersección vale 13, porque los números 12, 5 y 13 son una terna de Fermat ($12^2 + 5^2 = 13^2$)
Obviamente, no cualquier terna (a, b, c) satisface la ecuación para n = 2, pero existen infinitas ternas que efectivamente lo hacen. Visto de otro modo, el último teorema de Fermat afirma que si hiciéramos un gráfico similar para n = 3 (ó cualquier número natural mayor), no habría ninguna intersección marcada, ya que jamás se satisface, sin importar cuán grandes sean los números que tomemos.

<u>Retornemos a nuestros rombos pixelados</u>. Hemos visto que el área de un rombo pixelado n es:

$$\text{área rombo n} = \text{número de cuadraditos} = n^2 + (n-1)^2$$

Si dividimos el rombo en cuatro partes iguales usando el procedimiento descripto en 4, con esas piezas armamos un cuadrado cuyo lado "*l* " debe tener por longitud:

$$\text{Lado del cuadrado} = l = \sqrt{n^2 + (n-1)^2}$$

o bien:

$$l^2 = n^2 + (n-1)^2$$

En general, "*l* " va a ser un número irracional. Pero en los casos en que "*l* " sea natural vamos a tener una terna de Fermat. Por ejemplo, esto se satisface para el rombo n = 4:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

donde "*l* " = 5

Esto vuelve a ocurrir para el rombo n = 21:

$$29^2 = 21^2 + 20^2 \quad \text{donde "}l\text{" = 29}$$

Sigue con n = 121:

$$169^2 = 121^2 + 120^2 \quad \text{donde "}l\text{" = 169}$$

La siguiente terna de Fermat se da para n = 698:

$$985^2 = 698^2 + 697^2 \quad \text{donde "}l\text{" = 985}$$

1) **Nos preguntamos si seguirán apareciendo ternas de Fermat para rombos n crecientes ¿Habrá alguna <u>regularidad</u> entre los "*l*" que se van obteniendo?** En la tabla siguiente se han puesto los 13 primeros rombos pixelados (**r**) tal que el lado del cuadrado ("*l* ") **sea un número natural**. Al considerar el cociente entre los *"l"* de dos de estos rombos consecutivos se observa:

r	**n**	**"l_r"**	**l_r / l_{r-1}**
1	4	5	
2	21	29	5,80000000000000
3	121	169	5,82758620689655
4	698	985	5,82840236686391
5	4060	5741	5,82842639593909
6	23661	33461	5,82842710329211
7	137904	195025	5,82842712411464
8	803761	1136689	5,82842712472760

9	4684660	6625109	5,82842712474564
10	27304197	38613965	5,82842712474617
11	159140520	225058681	5,82842712474619
12	927538921	1311738121	5,82842712474619
13	5406093004	7645370045	5,82842712474619

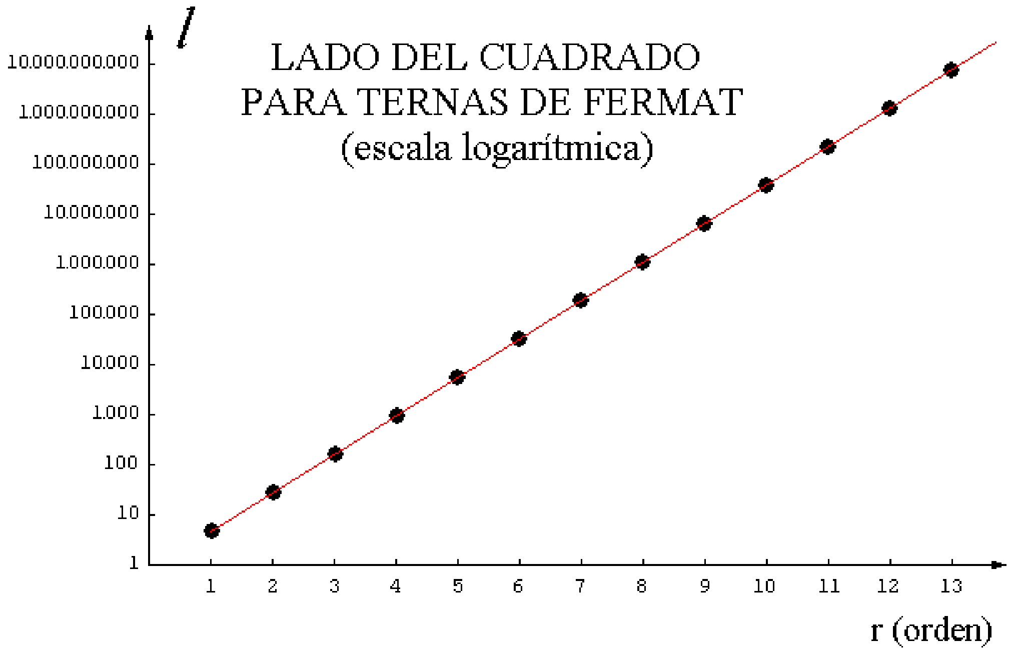
Vimos en el Anexo 1 que calcular las diferencias es eficiente para verificar una dependencia polinomial. No obstante el crecimiento de los "*l* " es tan grande que nos hace sospechar que la dependencia sea exponencial, que es de mayor orden que una polinomial. Para ello, en vez de hacer diferencias entre los "*l* " hacemos los cocientes entre un valor de "l_r " y el valor anterior de "l_{r-1} " Así 5,800 es el cociente entre 29 y 5; 5,82758620689655 es el cociente entre 169 y 29, etc. Observamos que (maravillosamente, mágicamente) ese cociente tiende a un valor constante, 5,82842712474619... que casi seguro es un número irracional que nos permite conjeturar acerca del valor del próximo "*l* ".

Si conocemos un "*l* ", casi con total seguridad el siguiente será $5,82842712474619 \times l$ y de este modo:

$$(5,82842712474619 \times l\,)^2 = n^2 + (n-1)^2$$

obtenemos el número n (que caracteriza al rombo transformable en un cuadrado de lado *l*) resolviendo esta ecuación de segundo grado en n.

Si graficamos los sucesivos "*l* " correspondiemnte a los 13 rombos de la tabla anterior, en escala logarítmica obtenemos:



lo que nos da pie para conjeturar que deberían existir infinitas ternas de Fermat que satisfacen:

$$l^2 = n^2 + (n-1)^2$$

con "l"natural.

Atención: debe quedar claro que esto es una conjetura y no una demostración.

El hecho de que el gráfico ajuste tan bien en escala logarítmica nos lleva a inferir que era correcto suponer una dependencia exponencial.
Si se tiene una dependencia exponencial no sirve calcular las diferencias primera, segunda, tercera, etc., ya que en este caso, las mismas **nunca** llegan a anularse. Hemos encontrado así la regularidad que buscábamos.

2) ¿Se forma una terna de Fermat para n = 1?

(Solución: No, porque tendríamos $1^2 = 1^2 + 0^2$ *y el número 0 no es un número natural.)*

3) Tomando l = 5741, calcular cuál sería la siguiente terna de Fermat.

(Solución: Resolver $(5741 \cdot 5{,}82842712474619)^2 = n^2 + (n-1)^2$*.)*