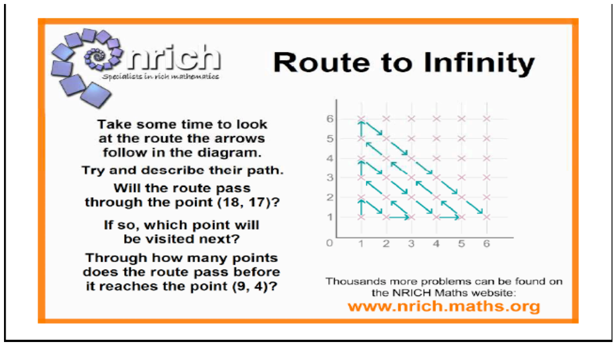


RUTA AL INFINITO

Este problema fue extraído del sitio www.nrich.maths.orgs

1. **Tómese un tiempo para observar el sentido de las flechas que marcan la ruta en el diagrama. Describa y pruebe ese trayecto.**
2. **¿Pasará esa ruta por el punto (18;17)?**
3. **Si es así, ¿cuál es el punto siguiente al anterior que toca la ruta?**
4. **¿Por cuántos puntos pasa la ruta antes de llegar al (9;4)?**

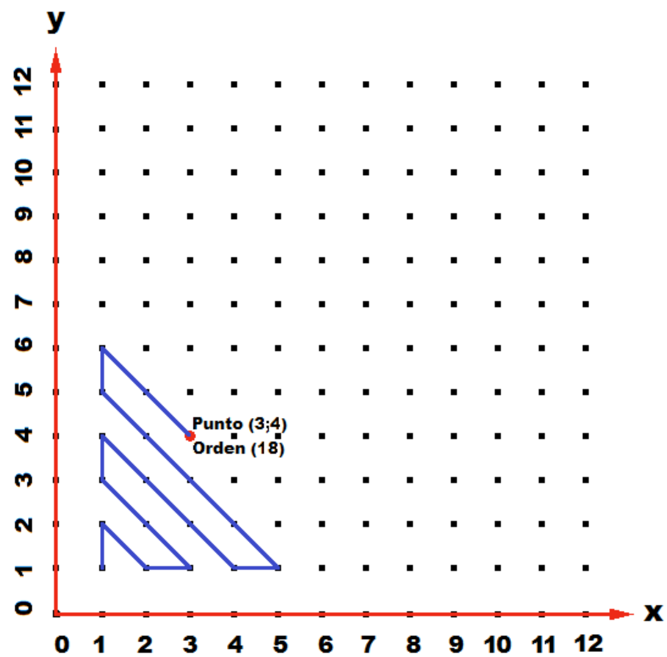
Extensión (propuesta por el GPDM):

a. **¿Cuántos puntos habrá en la ruta antes del (2050;810)? (Propuesta *para que no se cuente de a uno los que están sobre el último segmento)***
b. **Supongamos que hemos pasado por 37 puntos saliendo de (1;1) ¿hasta qué punto hemos llegado?**
c. **¿Podríamos generalizar los encuentros anteriores?**

Contenidos: Ubicación de puntos en el plano. Secuencia aritmética de razón 1. Números triangulares. Búsqueda de regularidades. Uso de fórmulas para generalizar propiedades.

Soluciones (Ana y Oscar Bressan y Adriana Rabino)

Como se hace convencionalmente vamos a llamar (m,n) al punto que tiene abscisa (eje horizontal) igual a “m” y ordenada (eje vertical) igual a “n”. Por ejemplo el punto (3,4) que se señala en el gráfico es el que tiene abscisa igual a 3 y ordenada igual a 4.



1) **<u>Observaciones</u> (pueden haber más).** La ruta posee segmentos ascendentes y descendentes inclinados (en diagonal), ascendentes verticales (paralelos al eje de las ordenadas) y horizontales (paralelos al eje de las abscisas) . Los ascendentes inclinados parten de abscisas impares, mientras que los descendentes inclinados finalizan en abscisas pares.

   En los trayectos descendentes inclinados aumentan sus abscisas en 1 y decrecen las ordenadas de los puntos sucesivos en 1. En los ascendentes inclinados pasa lo contrario.

   Los segmentos ascendentes paralelos a las ordenadas son de una unidad, por lo tanto sus extremos incrementan las ordenadas en 1 mientras que las el valor de las abscisas se mantiene igual a 1; los segmentos paralelos al eje de abscisas incrementan las abscisas de sus extremos en 1 mientras que las el valor de las ordenadas se mantiene igual a 1. De modo que la coordenada de los puntos con segmentos paralelos a los ejes son de la forma (n;1) o bien (1;m).

   Los puntos por los que pasa la ruta poseen una disposición triangular.

   La cantidad de puntos de cada trayecto inclinado es igual a la abscisa de origen de los segmentos ascendentes(o la ordenada del de llegada) o la abscisa de destino final de los segmentos descendentes. Por ejemplo, la ruta que va desde (1;4) hasta (4;1) tiene al 4 como abscisa de destino final del segmento descendente, y por lo tanto 4 es la cantidad de puntos por lo que pasa. Por ejemplo, la abscisa final de la ruta que pasa por el punto (3,4) es 3+4-1 = 6

La **abscisa**, **tanto si es inicial como si es final de la ruta** que pasa por el punto **(m;n), es igual a m + n - 1**

¿Por qué será esto? Si los extremos de las diagonales son de la forma (1,x) ó (x,1), para llegar de 1 a x o de x a 1 (tanto para la abscisa como para la ordenada) hay que pasar por x puntos (contando los extremos).

Además, si los extremos de una diagonal son de la forma (1,x) y (x,1), al ir transitando por el segmento diagonal los valores de abscisa aumentan en un por vez y los de ordenadas descienden uno por vez (o viceversa), por lo tanto su suma se compensa y siempre será la misma, por consiguiente será también la misma suma que 1 + x en el extremo (1,x). Si a esta suma le restamos 1 nos queda el valor de la ordenada de este par.

Es interesante notar que dado un punto (m;n), si la suma **m + n es impar** (y todos los de esa diagonal se verá que son impares) entonces pertenece a un segmento inclinado **descendente**, mientras que si **m + n es par** entonces pertenece a un segmento inclinado **ascendente.**

COORDENADAS DE EXTREMOS DE UN RECORRIDO COMPLETO DESDE n = 1

	Diagonal izq. abajo	arriba → derecha	Diagonal izq arriba	Abajo → derecha
(1 , 2n – 1)	(1 , 2n)	(2n , 1)	(2n + 1 , 1)	(1 , 2n + 1)

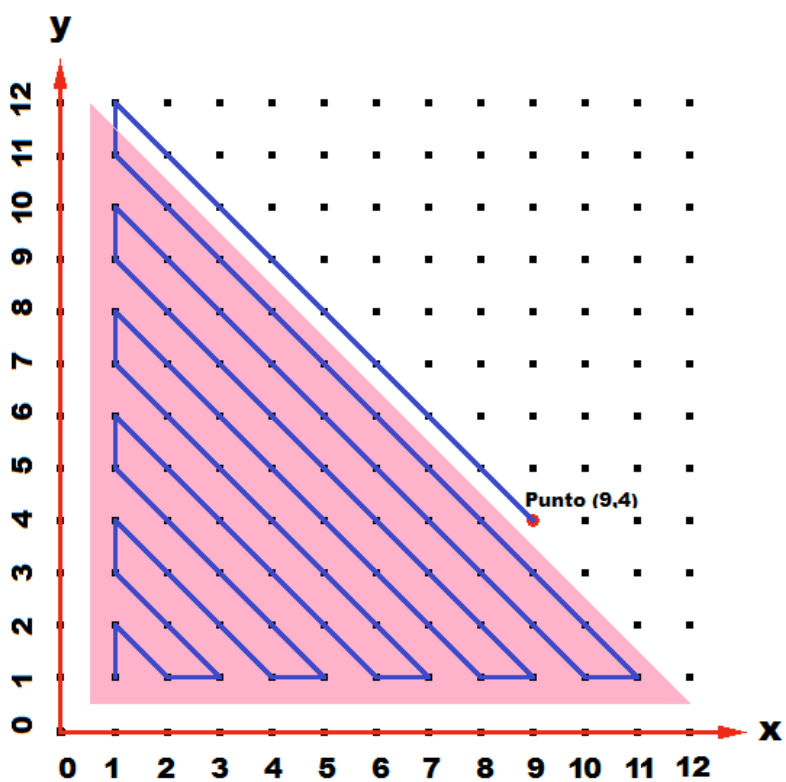
Observación: Si sumamos 1 + 2n nos va a dar un número impar ya que 2n es par. Como sabemos que la diagonal desciende, al bajar 1 la ordenada disminuye en 1 y al ir 1 a la derecha la abscisa aumenta en 1, por lo tanto en la suma se compensan los valores y no pierden su condición de paridad, o sea que van a ser todos impares.
Análogamente para la columna verde.

Si queremos saber por cuántos puntos pasa una ruta inclinada desde que comienza la ruta hasta que llega a un punto determinado, por ejemplo el (m;n) cuya suma m + n es par (ruta ascendente), observamos que pasa por "n" puntos, mientras que si m+n es impar (ruta descendente) pasa por "m" puntos desde que comienza el segmento descendente. Por ejemplo, el punto (3;4) del gráfico pertenece a una ruta descendente (3 + 4 = 7 es impar) y la ruta pasa por 3 puntos (la ruta comienza en (1;6) y además pasa por (2;5) y (3;4)).

2) La ruta va barriendo <u>todos</u> los puntos de coordenadas correspondientes a <u>todos los</u> números naturales, por lo tanto va a pasar por el (18;17).

3) Para determinar cuál es el punto que sigue al (18;17), primero hay que observar que el punto no es de la forma (n;1) ni (1,m) y por lo tanto no pertenece a los trayectos paralelos a los ejes coordenados y deberá estar en un trayecto inclinado. Luego, dado que 18 + 17 es impar va a pertenecer a un segmento inclinado descendente, y por lo tanto el punto que sigue será el (19,16).

4) ¿Por cuántos puntos pasa la ruta antes de llegar al (9;4)?



Si el punto es el (9;4) entonces ese punto está dentro de la ruta del segmento cuya abscisa inicial o final es 12, dado que 9+4-1 = 12.
Por otro lado, como 9 + 4 = 13 es impar, el punto (9;4) pertenece a una ruta descendente, y esta ruta es incompleta, o sea que comienza en (1;12) pero no llega a (12;1) porque el punto de interés, o sea el (9;4), queda adentro de ese intervalo.
La cantidad de puntos por los que pasa la ruta serán los puntos que se encuentran en la ruta incompleta (donde está el punto) más todos los puntos de las rutas completas inferiores (en el triángulo rosa en el gráfico).

La cantidad de puntos en la ruta incompleta, por ser descendente, es 8 (o sea que son los puntos (1;12), (2;11), (3;10), (4;9), (5;8), (6;7), (7;6); (8;5), descartándose el (9;4)).
Para contar los puntos del triángulo rosa es muy útil usar una propiedad de la disposición triangular de los puntos. Vemos que para el trayecto correspondiente a la abscisa 1, hay un punto; para el de abscisa 2, dos puntos; para la abscisa 3, el trayecto tiene 3 puntos y así sucesivamente.
Esto forma una serie aritmética de razón igual a 1, y la suma fue calculada por Gauss cuando era un alumno de la escuela primaria:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = (n + 1) \times n/2$$

En nuestro caso $n = 11$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = (1 + 11) \times 11/2 = 66 \text{ puntos}$$

Además, tenemos 8 puntos por la ruta descendente incompleta, ya que nos piden los anteriores a (9;4). Esto 8 puntos más los 66 anteriores dan como respuesta 74 puntos más 66 puntos por los del triángulo rosa, en total:

8 puntos + 66 puntos = 74 puntos (antes del (9;4)

Extensión:

a) ¿Por cuántos puntos pasa la ruta entes de llegar al (2050;810)? (Propuesta para que no cuenten de a uno los que están sobre la última diagonal)
Como 2050 + 810 = 2860 es par, quiere decir que este punto está en una diagonal ascendente. Entonces el último punto de un "triángulo completo" es (2858,1). La cantidad de puntos que hay en el triángulo es (1 + 2858). 2858/2 = 4085511 puntos. Faltan agregar los puntos de la última diagonal: ¿cuántos puntos hay desde (2859,1) hasta (2050,810) subiendo por esa diagonal de derecha hacia izquierda? Como los valores de las abscisas van disminuyendo de uno en uno y los de las ordenadas van aumentando de uno en uno 809 veces (2859 – 2050 = 809 ó 810 – 1 = 809) quiere decir que hay 809 puntos. En total: 4085511 + 809 = 4086320.

b) En este caso conocemos el número de puntos por el que pasó la ruta (suma de puntos) y deseamos conocer qué punto es el último que tocó.

Sea, por ejemplo, el número de puntos recorridos 37. Deseamos conocer el punto (a;b) que ocupa el lugar 37.

Un método sencillo en este caso es buscar la sucesión cuya suma (número triangular) sea la más próxima a por defecto al 37, en este caso es el 36, obtenido como

$$S = 1+2+3+4+\ldots.+7+8 = (8 + 1) \times 8/2 = 36$$

Dado que el punto 37 no pertenece al trayecto descendente cuyo último punto es (8;1), es necesario agregar el primer punto del trayecto ascendente de abscisa 9, el decir el punto (9;1) que es el número buscado.

c) Para buscar los puntos anteriores a un punto dado que no posee ordenada 1, necesitamos conocer si está en un trayecto ascendente o descendente y calcular en qué valor este eje corta al eje de abscisas o el de ordenadas. Si consideramos como n ese valor, tendremos que calcular

$$[1 + (n-1)] \times (n-1)/2 = n \times (n-1)/2$$

y le sumamos el número de puntos del trayecto n anteriores al número dado.

Para buscar el número que corresponde a un trayecto que pasa por un número conocido de puntos (llamémosle X), tendremos que calcular el número triangular (T) más próximo al mismo con la fórmula, donde n es el número de puntos del último trayecto considerado

$$X \geq T = (1 + n) \times n/2$$

y agregarle el número de puntos del trayecto n + 1 hasta llegar al valor X de puntos.