<u>Secuencia[1] y Serie armónica: ¿Qué de distinto?</u>

Nadie duda que la sucesión de los números naturales 1, 2, 3, …., n,… diverge, pero **¿qué acontece con la sucesión formada por los recíprocos de los mismos?**

$$\mathbf{1,\ 1/2\ ,\ 1/3\ ,\ 1/4\ ,\ \ldots,\ 1/n,\ 1/n+1,\ \ldots}$$

Resulta evidente que en esta sucesión su término general tiende a cero para un *n* tendiendo a infinito. Por lo tanto, esta sucesión, conocida como armónica, **es convergente**

¿Será lo mismo al trabajar con la <u>serie</u> correspondiente a esta sucesión, conocida también como serie armónica?

$$\mathbf{S_{(1/n)} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n + 1/n+1 + \ldots \quad (*)}$$

Tomemos un atajo:

Si consideramos la serie S $(_{1/2})$ = 1 + ½ + ½ + ½ + … no vacilaríamos en decir que **es divergente,** es decir supera cualquier valor que propongamos, por grande que sea.

Tomemos ahora la serie armónica y agrupemos los términos de la siguiente forma

$$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/\ 11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) + \ldots$$

de manera que siempre obtengamos valores mayores a ½ en los paréntesis (para esto podemos agrupar el tercero y cuarto término, luego los siguientes 4 términos , luego los siguientes 8 y así en grupos de 2^n términos sucesivamente). Todos estos paréntesis dan sumas mayores que ½, de modo que al sumar desde el comienzo vamos a obtener una serie mayor que la serie 1 + ½ + ½ + ½ + … que claramente vimos que es divergente.

De allí resulta que la serie armónica también diverge!!!

No obstante esta serie diverge muy lentamente. Vemos que para superar el número 2, necesitamos tomar 4 términos, para superar el 3 hacen falta 11 términos, para el 4 hacen falta 31 términos, … para el 13 se necesitan 248.397 términos… (Extraído de www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html)

Algo más:

---

[1] Una **<u>secuencia aritmética</u>** es una secuencia de números que aumentan o disminuyen por una cantidad constante cada término. Por ejemplo 1, 4, 7, 10, 13, ... es una secuencia aritmética porque cada término aumenta en una cantidad constante (en este caso igual a 3) con respecto al término anterior. Una **<u>secuencia armónica</u>** es aquella en la que los recíprocos de todos los términos forman una secuencia aritmética. Por ejemplo, {1, 1/2, 1/3, 1/4, . . .} es una secuencia armónica, porque los recíprocos de todos los términos {1, 2, 3, 4, . . .} forman una secuencia aritmética. También {1, 1/4, 1/7, 1/10, 1/13, ...} forman una secuencia armónica.

1) **¿Qué pasaría si la serie fuera de la forma 1/n^{a}? Obviamente si α = 1 tenemos la serie armónica. Habrá que considerar que pasa con a > 1 y a < 1**
2)

- Si α **< 1** entonces todos los términos son mayores que los de la serie armónica (excepto el primero, ya que 1 = 1^{α}). Por ejemplo:

  $1/10 = 0{,}1 < (1/10)^{0{,}9} = 0{,}12589...$

y la suma será aún más grande que la serie armónica, de modo que la suma **diverge** y lo hace más rápidamente.

- Si α **> 1** entonces todos los términos serán menores (excepto el primero) y aquí ocurre un fenómeno raro y casi mágico: la serie **converge**. O sea que si α = 1 diverge, pero si α = 1,000001 converge. Por ejemplo:

$$S(\alpha = 1{,}1) = 1 + \frac{1}{2^{1{,}1}} + \frac{1}{3^{1{,}1}} + \frac{1}{4^{1{,}1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1{,}1}} = 10{,}5844$$

$$S(\alpha = 1{,}01) = 1 + \frac{1}{2^{1{,}01}} + \frac{1}{3^{1{,}01}} + \frac{1}{4^{1{,}01}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1{,}01}} = 100{,}578$$

$$S(\alpha = 1{,}001) = 1 + \frac{1}{2^{1{,}001}} + \frac{1}{3^{1{,}001}} + \frac{1}{4^{1{,}001}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1{,}001}} = 1000{,}58$$

$$S(\alpha = 1{,}0001) = 1 + \frac{1}{2^{1{,}0001}} + \frac{1}{3^{1{,}0001}} + \frac{1}{4^{1{,}0001}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1{,}0001}} = 10000{,}6$$

3) ¿Qué pasaría si sacáramos de la serie armónica todos los términos que tienen el dígito 9? Como lo explica A. Paenza en su libro *¿Cómo, esto también es matemática?* (Ed. Sudamericana, 2011, 302) "…, la respuesta es bien antiintuitiva" ya que la serie **se transforma en convergente**.

Te invitamos a probar esto tomando 10, 100, 1000 o más términos y verás como las veces que aparece el 9 se acrecienta notablemente. Tantos números con 9s se tacharán, que la serie resulta converge.