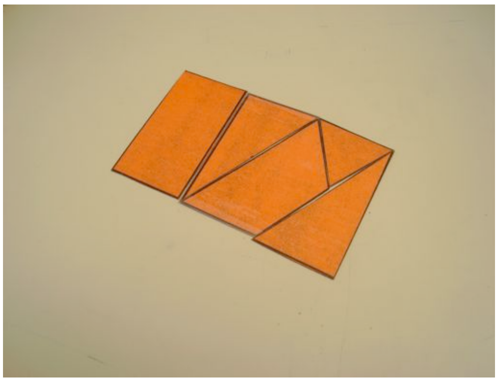
El rompecabezas de van Hiele en un aula de 7º año de la escuela Siglo XXI de la ciudad de San Carlos de Bariloche, a cargo de la docente Susana Tomic

Narrativa:
<u>1ra clase</u>

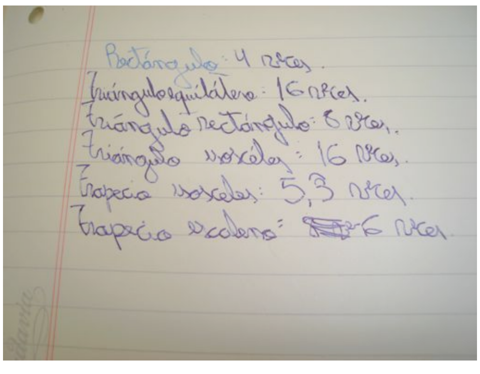
Inicié la clase variando la propuesta (respecto de lo planificado) debido a que ya había pasado mucho tiempo desde la última vez que habían trabajado con el rompecabezas. Me pareció necesario proponerles volver a armarlos. Así lo hicieron, la mayoría rápidamente, varios recordando cómo habían pensado el dibujo y construcción del propio rompecabezas. Dos alumnos lo construyeron de otra manera y un par de chicos que lo armó muy rápido, buscó hacer un rectángulo empleando como lado menor del rectángulo total, el lado mayor del rectángulo menor (pieza 3).Me explicaron su diferencia apoyados en este dato. Utilizaron 5 de las 7 piezas que tiene el rompecabezas original. Resultó un rectángulo de diferentes proporciones, “más corto”, según dijieron



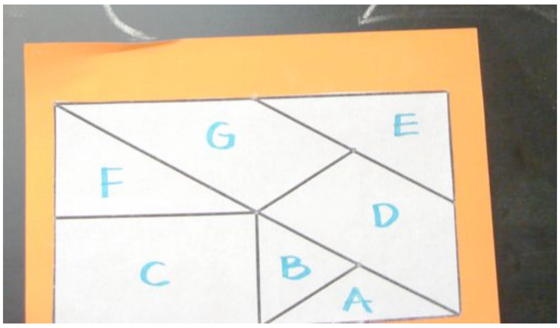
Olvidé que la siguiente consigna debía ser averiguar que fracción del total representaba cada pieza, la pasé por alto y les propuse que trataran de encontrar relaciones entre las áreas de las distintas piezas .Así fue que trabajaron muchísimo buscando esas relaciones. Todos superpusieron piezas, en un principio, como estrategia exclusiva.

Varios comenzaron a registrar espontáneamente, contorneando las figuras algunos, otros nombrándolas (según clasificación de polígonos).

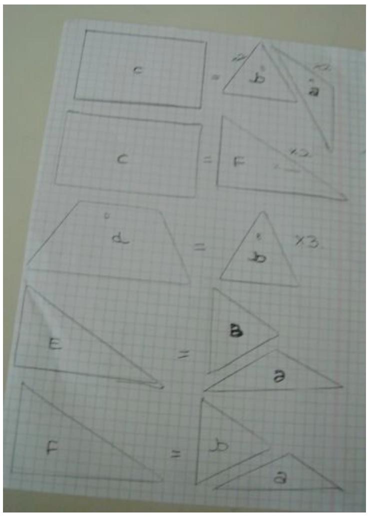
L inicia el trabajo buscando el número de veces que cada pieza está contenida en la figura total. De este modo razona: *si la pieza – rectángulo- es ¼ del rompecabezas, entonces entra 4 veces en el mismo. Si el triángulo equilátero es 1/16 del rompecabezas, entra 16 veces exactas en el mismo.* Así con otras piezas .Al llegar al trapecio isósceles expresa*: si representa 3/16 del total, entonces 16:5=5,333…* Finalmente, corregiría la última expresión al observar la equivalencia entre los dos trapecios.

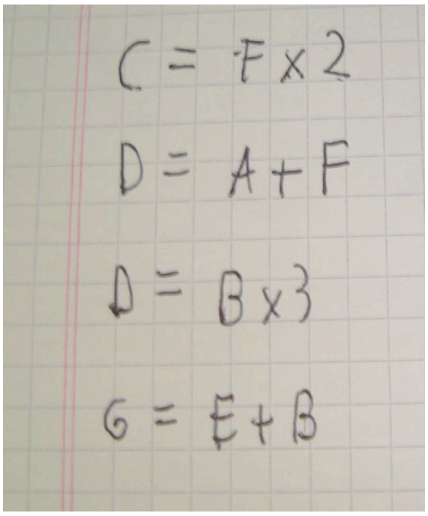


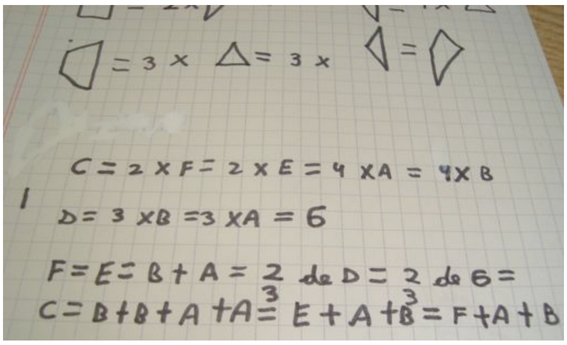
Entonces otros consultaron *"¿hay que escribir lo que hacemos?"*Les contesté que sí y presenté en el pizarrón una lámina con el rompecabezas ampliado donde las piezas aparecen identificadas con letras .Sugerí que las emplearan para registrar las equivalencias.

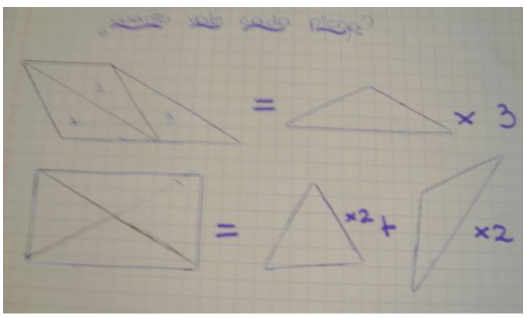


Utilizaron las letras, algunos combinándolas con dibujos









A esta altura, en muchos casos empezaron a emplear equivalencias ya establecidas para deducir otras, por ejemplo: si la pieza **F** esta formada por **A + B** y **F + E** forman la pieza **C,** entonces **C** contiene **2A+2B**, prescindiendo ya de una nueva superposición. A lo que otro alumno agregó: "si son **2A+2B** también podría ser **(A +B).2**

Avanzaron en las escrituras individuales, a veces compartidas espontáneamente.

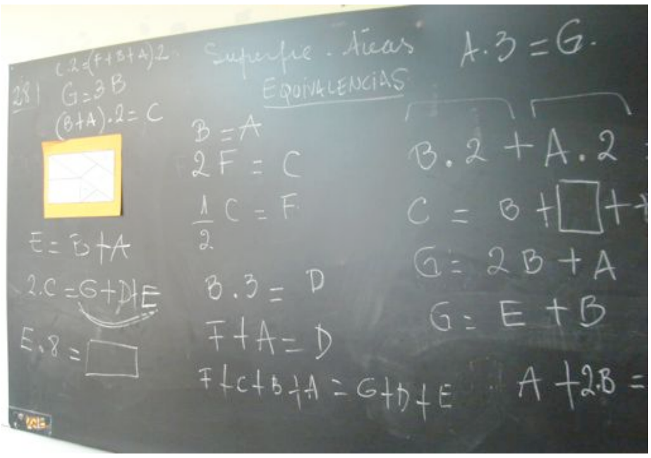
Finalmente sólo recurrieron a nuevas superposiciones cuando necesitaron argumentar a un compañero una nueva igualdad expresada o ante preguntas que yo hacía al recorrer las mesas.

Se vivió un clima de trabajo arduo y bullicioso, donde el material resultó muy estimulante y propició explorar la relación área- forma y la equivalencia entre áreas.

Las escrituras algebraicas permitieron agilidad, economía en el registro y comunicación de lo pensado y a la vez en algunos casos cobró un vuelo propio, explorándose también la sintaxis del lenguaje algebraico.

Hubo diferentes niveles en las producciones. Todos pudieron avanzar en la exploración, desarrollo de procedimientos y simbolización, aplicando incluso, propiedades de las operaciones.

Como puesta en común solicité que enunciaran individualmente una equivalencia encontrada, escuchando a los compañeros como forma de control de la producción propia y de la ajena, buscando no repetir expresiones. Escribí las equivalencias que enunciaban en el pizarrón:



Éstas fueron muy numerosas y variadas .Con mucha rapidez chequearon las relaciones, pienso que el trabajo que cada uno había realizado les permitió interpretar fácilmente las expresiones presentadas por los compañeros, aunque no las hubieran pensado previamente.

Las piezas más empleadas para encontrar equivalencias fueron la **A** y la **B** Solicité entonces que expresen cada pieza de acuerdo a su equivalencia con **A.** Expliqué porqué podemos considerar a **A** (o B) como unidad de medida.

Finalmente realizaron una actividad individual, completando incógnitas en equivalencias (Ver planificación. Esta actividad la había pensado como previa a la puesta en común .Durante la marcha de la clase me pareció que los alumnos estaban encaminados y muy estimulados a buscar sus propias expresiones y decidí postergarla para el final)

<u>2da.clase</u>

Les propuse construir, de cada pieza del rompecabezas, una versión ampliada, empleando las mismas piezas. Debían realizarla en forma individual, contando con sus propios rompecabezas. Consultaron si debían ser "*iguales- iguales o puede ser del rectángulo, un rectángulo, del triángulo rectángulo, un triángulo* rectángulo, *...*"

haciendo alusión a la clase de figura y no a los atributos particulares de estas piezas. Aclaré la consigna .Recordaron un problema que compartimos sobre un ángulo que se ve con una lupa y la observación sobre su amplitud invariable.

A **T**, un alumno integrado, le propusimos una primera actividad libre con el rompecabezas y una segunda instancia dibujando una figura a su gusto de gran tamaño, descomponiéndola y recortándola en diferentes piezas y volviéndola a armar. Recibe ayuda para realizarlo de su maestra integradora. Los objetivos que se persiguen son acordes a sus necesidades y el compartir materiales, propuestas y algunas consignas con sus compañeros resultan de gran estímulo y significado para su aprendizaje.

Se pusieron en tarea, buscando espontáneamente formas de registro en sus carpetas, algunos escriben el nombre de las piezas que componen la nueva figura, desestimando la ubicación de las mismas, la mayoría las dibuja, contorneándolas. Las primeras en ser ampliadas son el triángulo equilátero, el triángulo isósceles y el rectángulo. En el intento por ampliar los trapecios hay más dificultades .Comentan ante sus producciones: "*es más chato", "no es igual", "tiene más altura", "no puede ser, el lado de arriba quedó igual* (por el original) *y el de abajo es más largo*"

Muchos están entusiasmadísimos. La búsqueda de opciones variadas los desafía, particularmente a alumnos que en propuestas más formales no suelen identificarse con la matemática.

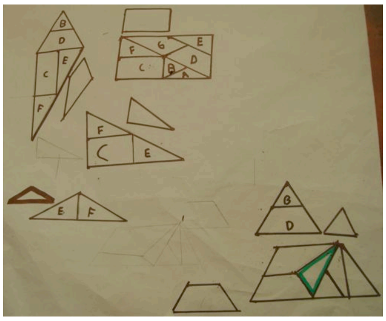
Luego, ya en subgrupos, deben compartir lo realizado y construir un afiche. Les entrego juegos de rompecabezas de cartón del mismo tamaño para facilitar la tarea al emplear las piezas como plantillas. "El afiche debe ser claro, tiene que permitirnos recordar lo que descubrimos y, también, poder transmitirlo a los demás",es la consigna.

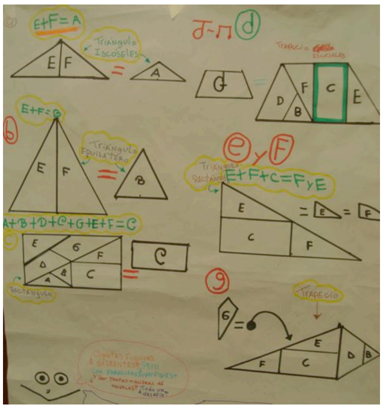
Las mayores discusiones, entonces, se dan en torno a los trapecios, demoran más en construirlos y hay versiones que no les convencen. Recorro los grupos y escucho: "*Es un trapecio isósceles, mirá"* (señalando sus lados, como haciendo referencias *implícitas a sus propiedades)…"Si, pero es muy largo de acá"* (señalando la hipotenusa de cada triángulo rectángulo que usaron para construirlo)

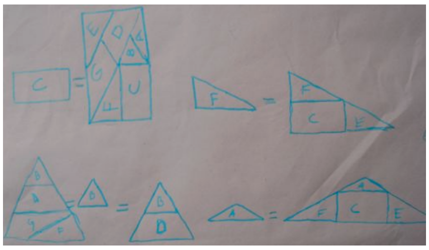
Otro chico gira las composiciones, para evidenciar al compañero el paralelismo entre los lados del nuevo trapecio que construyó, con 6 figuras incluidas, triunfante

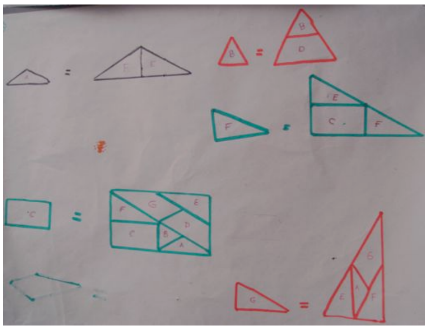
Señalan versiones que contienen las mismas piezas, que parecen distintas porque están hechas del revés y concluyen que son las mismas.

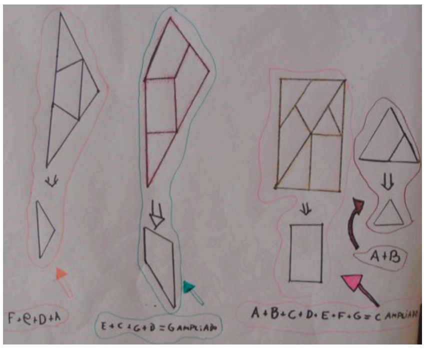
Por momentos prevaleció más la percepción global y la acción, con poca verbalización. La ubicación y orientación de las piezas son cuestiones que determinan la observación que realizan a primera mano .Luego, con más detenimiento, y al tener que confrontar con los compañeros, aparecen las propiedades de las figuras, más o menos explicitadas ,las medidas (usando como referencia los lados) y nuevas acciones: desarman, rearman, miden y vuelven a desarmar, corrigiendo.

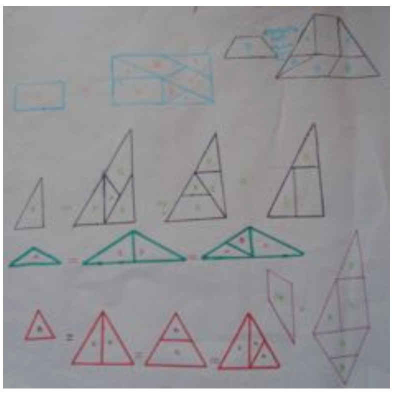






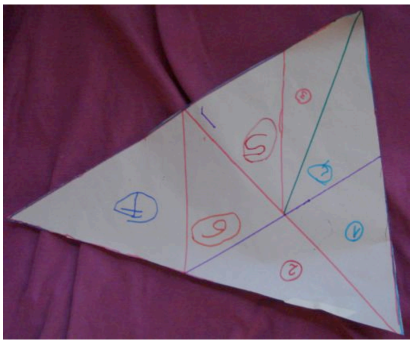






En la puesta en común se muestran los afiches.

T. también presenta el suyo: la versión completa y las piezas recortadas:



Se identifican semejanzas y diferencias entre las distintas composiciones de figuras y se señalan cuáles no son ampliaciones y porqué. Hay dos trapecios que se descartan como ampliación. Un alumno dice *"no concuerda"*.Otro completa*:"se alargó la base y no el lado de arriba.*

Comparten las estrategias: *"armamos las más difíciles usando los triángulos que eran más fáciles y ya los habíamos armado", "El B lo podés poner de cualquier lado porque siempre queda igual"(*es el triángulo equilátero*).* Se hace breve ya que el desarrollo de la instancia grupal llevó bastante tiempo. El intercambio más rico se dio allí.

De tarea, a modo de síntesis provisoria individual, les solicito contestar: ¿Qué pensás que hay que tener en cuenta para que una figura sea la versión ampliada de la otra?

Dibujar 3 figuras a tu gusto y una ampliación de cada una de ellas en la carpeta.

<u>3ra clase</u>

Pasó una semana desde la clase anterior. Los afiches realizados están en el frente

Retomando lo trabajado en clase anterior y la pregunta de tarea, les pregunto ¿Qué tuvimos en cuenta para considerar que estas figuras son ampliaciones?

"Que los lados son más grandes"

" Que las medidas son equivalentes"

Al pedirle que aclare a que se refiere con equivalentes dice: *" no pueden aumentar de distinta manera los lado, todos tienen que aumentar igual"...*

"los ángulos tienen que medir lo mismo"

"*como los ángulos tienen que medir lo mismo los lados tienen que aumentar de la misma manera, si no se abren más o se cierran más"*

" tienen que aumentar en forma proporcional, no equivalente"

"sí, en forma directamente proporcional"

"Si hacés el doble de largo, tenés que hacer el doble de ancho"

Escribo algunas de estas frases en el pizarrón mientras las van diciendo y les propongo ampliar el rompecabezas original. Cada uno deberá hacerlo con la estrategia que le sea más cómoda. Les pido que sinteticen las mínimas condiciones que van a tener en cuenta para que sea una ampliación.

T. que está muy ocupado y feliz!!! con sus crecientes habilidades para emplear la regla, levanta la mano primero que nadie y dice:"*vamos a usar la regla!!!"*

L: *vamos a multiplicar todos los lados por el mismo número.*

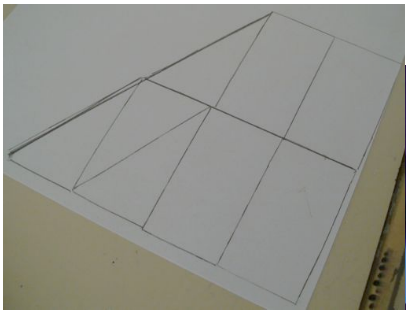
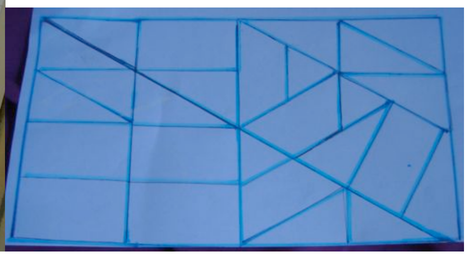
LA: *los ángulos tienen que quedar iguales*.

Había planificado trabajar con papel isométrico, en un principio. A esta altura veo que es agregar otra complejidad y otros tiempos al procedimiento. Por lo mismo ofrezco hojas oficio cuadriculadas u hojas lisas, según prefieran

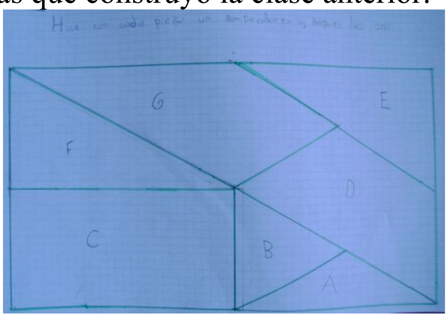
Comienzan a trabajar recurriendo a muy variadas estrategias, recorro las mesas y observo:

M. arma el rompecabezas, lo contornea por su borde y repite la operación tres veces más formando el nuevo rectángulo. No utiliza ningún instrumento mediador, sólo el rompecabezas original. De este modo todo el rompecabezas original se corresponde con la pieza **C** de la nueva versión. Luego disecciona cada rectángulo empleando las piezas del rompecabezas para formar las figuras, recurriendo, de algún modo, a las ampliaciones construidas la clase anterior.

Dos chicos se suman a esta estrategia y hacen algo similar. Pienso que podrían desarrollar un procedimiento más ágil, éste les lleva bastante tiempo. Pero se engancharon con la propuesta de la clase anterior y disfrutan de jugar con las opciones que han encontrado y de la imagen que queda plasmada. Inclusive incorporan nuevas composiciones de piezas donde deben utilizar más de un juego de rompecabezas, o sea siguen jugando con las equivalencias. Esto me permitirá, en una clase posterior, avanzar hacia la equivalencia de áreas:

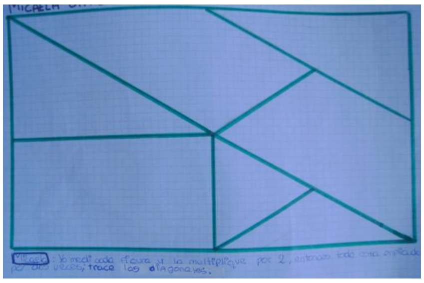
CA también construye cada pieza de la nueva versión armando todas las piezas del rompecabezas ampliadas que construyó la clase anterior:

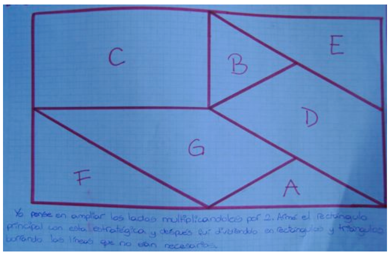


T. con su maestra integradora amplía figuras usando regla, en su cuaderno. Mide y duplica, empleando tablas auxiliares.

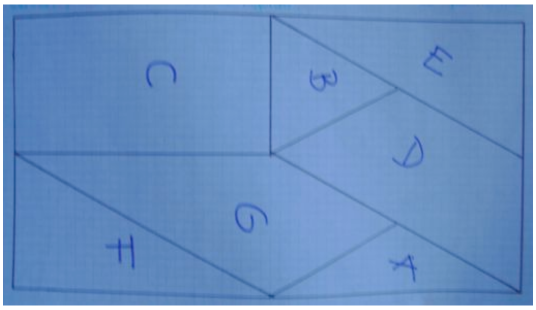
E mide ancho y largo de la versión original, multiplica ambos por dos y dibuja el rectángulo total, que luego divide trazando bases medias y diagonales, borrando los segmentos innecesarios.

La mayoría realiza este último y económico procedimiento. Sólo algunos chequean la amplitud de los ángulos o el largo de los lados de cada pieza. Sugiero que lo realicen:



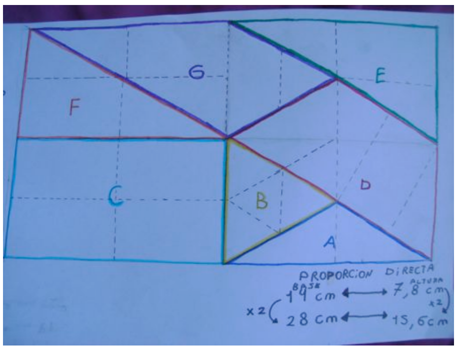


A comienza desde el rompecabezas original, que es la nueva pieza **C** .Traza su diagonal, que luego prolonga, con idéntica longitud. Luego prolonga la base del rectángulo, al doble y traza la paralela a la base del nuevo triángulo .Después prolonga el lado menor del rectángulo, al doble y traza su paralela .Sigue realizando la construcción atenta al paralelismo, la perpendicularidad y los ángulos que se deben determinar:



La mayoría redondeó la longitud de los lados de la pieza original que tras la medición resultaba una expresión decimal. Algunos emplearon las medidas buscando mayor exactitud.

G organiza las mediciones en la hoja, evidenciando relaciones de proporcionalidad directa:



Al revisar las construcciones algunos se cuestionaron, al no verificar duplos exactos. Conversamos sobre cierto margen de error al medir, al dibujar y al remarcar con fibras e incluso sobre el redondeo por el que algunos optaron para facilitar el procedimiento.

AG me muestra su producción, al hacerlo observa la de su compañero, algo no le satisface, vuelve a su mesa a revisar las medidas.

En la puesta en común:

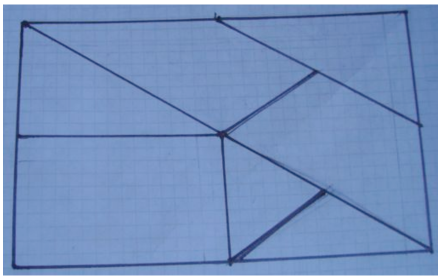
Pasan individualmente al pizarrón a mostrar sus producciones que quedan en el frente y explican el procedimiento. La consigna es: "si empleé la misma estrategia no repito el procedimiento, sólo lo cuento si es diferente al ya relatado."

A las producciones descriptas más arriba se agregan muchas que hicieron procedimientos similares a **E**

Conversamos sobre cuánto ampliaron el rompecabezas: "*el doble", "yo multipliqué todo por dos","Si, pero el nuevo tiene cuatro rectángulos*". Reflexionamos sobre cuánto se amplió de largo y cuánto se amplió de ancho y concluimos que el doble.

Luego **TE,** con total frescura, dice que el hizo un rectángulo más grande, lo dividió en cuatro rectángulos iguales y lo siguió dividiendo para construir las piezas .No midió, lo hizo a ojo .Risas. **TE** suele, a sabiendas, no ajustarse a las consignas .**G** acota que seguro hay figuras que no son iguales .**D** dice**:** *"no concuerdan las piezas*" Quedamos en revisar sus medidas con más detenimiento y analizarlas.

BR muestra su trabajo, llama la atención porque es bastante más pequeño que los otros, solo algo más grande que el original. "*No es el doble seguro*", dicen .**BR** dice "*yo le sumé 1cm a cada lado de cada rectángulo* ***C*** *(por el cuarto de pieza) entonces todo el rompecabezas me quedó 2cm más de largo y dos más de ancho".*
Se produce desconcierto. Esta es su producción:



AG. Argumenta que es una ampliación porque aumentó 2cm a cada lado del rectángulo. Algunos chicos señalan "*quedó más gordo"*

Le devuelvo que a 8cm. del original le agregó 2cm y a 14 cm del original le agregó 2 cm.

L: "*De 8 le agregás ¼ y de 14 le agregás 1/7!!"*

M: "*Tendría que ser 16 para agregarle 2?"*

G *"entonces, lo multiplicás por 1 coma algo…? Porque no es igual y tampoco es el doble"*

Varios intentan una revisión pero ya no se escuchan entre sí, otros están confundidos, muchos, más perdidos aún .Va terminando la hora.

En un principio parecía tan claro cuando decían *"multiplicás los dos lados por el mismo número"*

Acordamos seguir revisando las ampliaciones. Le propongo a **AG** que piense por cuánto pudo haber multiplicado la base y la altura del rompecabezas original

Durante la segunda y tercera clase las instancias en subgrupos y de producción fueron muy ricas en intercambios. Las puestas en común se diluyeron algo, respecto de lo planificado. De hecho, la tercera clase quedó abierta, con varias cuestiones a retomar. El problema suscitado por la construcción de **AG** es bien interesante y permite confrontar, incluso con aquellos que, con mucha seguridad, directamente duplicaron. (vale aclarar que, por el tamaño de la hoja, la razón de semejanza resultó muy inducida, difícilmente emplearían un número no entero). Cuando **AG** mostró su producción y explicitó sus argumentos se evidenció que hace falta seguir profundizando en las propiedades de la proporcionalidad.

Para la próxima clase plantearé buscar medidas de otros rectángulos ampliados, determinando longitud de base y altura , al emplear una tabla de razones. Se identificarán operadores en la misma. Buscaré contrastar con longitudes de rectángulos no semejantes , a partir de allí .Con ayuda de la tabla de razones se reflexionará sobre las propiedades de la proporcionalidad en los casos particulares que se han planteado (producciones de **AG** y **TE** y rectángulo construido con el rompecabezas durante la primera clase). También pienso plantear una actividad de dibujos de figuras semejantes

Aún no quedan claras las propiedades de la semejanza de figuras y por otro lado falta avanzar hacia la definición de la razón de semejanza.

Finalmente, considero que esta narrativa representa un recorte. En el mismo se ponen en foco algunas cuestiones para analizar y se soslayan otras, que también forman parte de la riqueza y complejidad del trabajo del aula. Espero que la selección realizada permita una lectura clara del proceso.

¿Qué cambiaría de la secuencia?

El cambio, que de hecho introduje durante la marcha de la propuesta, está vinculado con el papel empleado para realizar las ampliaciones de las piezas. Al realizar fotocopias ampliadas del papel isométrico (el que se utilizaría según la planificación) observé que las longitudes de los lados no coincidirían con los segmentos a determinarse al unir los puntos del papel. Se hubiera agregado una complicación en el procedimiento. Pienso que los alumnos estarían en condiciones de buscar estrategias para realizar los dibujos solicitados en esas condiciones (trazando paralelas, por ejemplo).Pero se desviaría el eje del trabajo en esa instancia. El uso de papel blanco o cuadriculado, según los procedimientos desarrollados por cada chico, fue adecuado.

En una propuesta abierta de ampliación de figuras se hace dificultoso anticipar si el papel isométrico presentará el nivel de dificultad oportuno.

En líneas generales estoy muy satisfecha con la propuesta y sus resultados. De todos modos me quedé pensando en la opción de, durante la segunda clase, proponer directamente el trabajo en subgrupos, obviando la primera actividad individual. Al observar a los alumnos y sus muy diferentes ritmos de trabajo vi que para muchos resultó algo reiterativa parte de la segunda actividad(1) .Tal vez se podría plantear el propósito del trabajo grupal en torno a la producción de un afiche, contemplando los tiempos de exploración (individual y/o compartida) durante esta instancia.

¿Qué aprendí con esta propuesta de trabajo?
A modo de reflexión

Respecto de MATEMÁTICA

Conocí más sobre los múltiples accesos que hay a un mismo concepto dentro de la matemática. A través de determinadas representaciones se pueden expresar algunos aspectos y propiedades de un concepto, pero ninguna representación de un concepto abarca completamente a dicho concepto.

Con cada nueva experiencia, reflexionada, no tratada mecánicamente, encuentro nuevos caminos que me conducen a viejos, y de algún modo renovados, conceptos.

De alguna manera, encarando al concepto de semejanza de figuras me encontré revisando muchos de los contenidos de geometría que se enseñan en 7mo grado. Al abordar los contenidos a enseñar durante esta secuencia y buscar articulación con la propuesta en marcha en el grupo, aparecieron relaciones antes no indagadas con la profundidad que la situación demandó.

Respecto de DIDÁCTICA

La importancia de una buena **secuenciación de actividades** que tenga en cuenta: una progresión conceptual y la anticipación de la respuesta del grupo (en base al diagnóstico)

Lo central que resulta el **recurso,** cuando posee el potencial necesario para abordar las conexiones que harán que el contenido tenga mayor consistencia. En este caso el rompecabezas de Van Hiele es un ejemplo cabal.

La necesaria **flexibilidad** durante la marcha para adecuar la calidad y el tiempo de las intervenciones en el grupo, con el fin de favorecer la construcción del aprendizaje.

La importancia, después del desarrollo de una secuencia, de **evaluar** el alcance que ha tenido el aprendizaje de los alumnos .Frente a las fantasías de aprendizajes acabados o frente a los riesgos de procesos laxos… ¿Qué retomar y desde qué lugar? ¿En qué oportunidad? ¿Encontrando que nueva relación para enriquecer el aprendizaje? ¿Realizando qué recorte para garantizar lo esencial? En fin: una lectura de la heterogeneidad del aula y un planteo prospectivo.

Lo fundamental que resulta brindar a los alumnos **accesos desde diversos lugares y por variados caminos** a los conceptos para profundizarlo.

En este momento me surgen muchas preguntas en torno a la planificación anual en tanto estructura coherente, flexible y orientadora que contemple lo antes expuesto.

PLANIFICACIÓN DE UNA SECUENCIA DE CLASES

ESCUELA: Colegio Siglo XXI……………………………………….

DOCENTE:…SusanaTomic……………………………………………………

GRADO:…7mo……………………………………

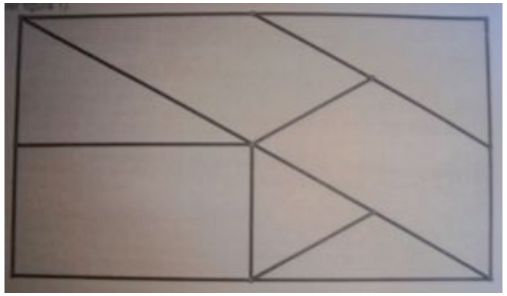
FECHA: 22 de agosto 2011

PROPÓSITO GENERAL Promover situaciones que lleven a mejorar las habilidades de visualización, descripción , construcción y análisis de ideas geométricas respecto de las figuras, sus propiedades y sus medidas , a través de actividades con el rompecabezas de Van Hiele

Observación previa:

Ya se realizaron diversas actividades con el rompecabezas: de reconocimiento y descripción de las figuras, sus elementos y propiedades .Se analizaron relaciones entre ángulos que se visualizan en el rompecabezas: ángulos suplementarios, complementarios, adyacentes, suma de ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros. Las actividades implementadas son similares a las sugeridas en los puntos 7, 8 y 9 de la propuesta.
Los alumnos copiaron en cartulina su propio rompecabezas y cuentan con él para realizar las actividades .Algunos debieron ser corregidos y rehechos parcialmente.

ACTIVIDADES	***OBJETIVOS***	***CONTENIDOS***	***ANTICIPACIONES DE LAS POSIBLES ESTRATEGIAS (correctas e incorrectas) DE LOS ALUMNOS***	***OBSERVACIONES***

Primera clase 1)Trabajando **individualmente**, con los rompecabezas de 7 piezas  Responder: ¿Qué fracción del rompecabezas representa cada pieza? ¿Qué unidad de medida eligieron para responder? 2) Comparar el área de las piezas entre sí ¿Qué relación encuentran entre ellas? Completar las siguientes igualdades: D= …. .A E= ….. B …..+ B = C 2 ….. + E = C 1/3 de …….. + B = F G - …….. = F 3/4 …….. +E = D + F 3/2 de E = ……..	Realizar estimaciones para conjeturar equivalencias de áreas Desarrollar procedimientos para comprobar conjeturas Fundamentar conclusiones, argumentando Explorar la relación área-forma (previo a la construcción de las fórmulas de área) Establecer relaciones de equivalencia entre figuras Hallar correspondencia entre material concreto y expresiones algebraicas	Números racionales : escritura fraccionaria expresiones equivalentes Estimación Cálculo mental Unidades de medida no convencionales Área de figuras : áreas equivalentes Interpretación de expresiones algebraicas	Realizarán superposiciones de las piezas En algunos buscarán representar las equivalencias a través del dibujo Algunos alumnos tal vez necesiten una orientación a través de preguntas como: ¿Cuál es la pieza de mayor área? Cuál es la de menor área? Otros ya manejan las fórmulas de área de algunas figuras.	Emplearán sus rompecabezas en cartulina para realizar las actividades En el frente habrá una versión ampliada como referencia común Se identificarán las piezas con letras (no con números como en la propuesta original) para facilitar la simbolización en las escrituras algebraicas)