Cadenas de cálculo

Un recurso para desarrollar el sentido del número y de las operaciones con el cálculo mental

Betina Zolkower - Silvia G. Pérez – Ana Bressan (GPDM)

¿Qué son las cadenas de cálculos? ¿Qué objetivo tienen?

Una cadena de cálculo o cadena numérica es una serie de cálculos en el contexto de números puros relacionados entre sí, que el docente diseña especialmente para generar en sus estudiantes y/o poner en evidencia determinadas estrategias o conceptos claves sobre los números y las operaciones aritméticas.

Por lo tanto, su cometido central es desarrollar el *sentido del número y de las operaciones*, mejorando el cálculo mental al lograr que los estudiantes pongan en juego estrategias variadas, cada vez más "*rápidas, eficientes y confiables*" (Di Brienza, 1998).

El docente planifica las cadenas, de entre cuatro y diez pasos, de acuerdo a lo que se proponga trabajar con sus estudiantes, ajustándolas al campo numérico y a las propiedades que quiere que profundicen, pudiendo emplear números naturales, fracciones, decimales, porcentajes,… y las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, etc. o combinaciones de las mismas.

Por ejemplo, como se muestra en la figura 1: La cadena 1 puede ayudar a que los alumnos comprendan como varían las composiciones a 20; la cadena 2 podría llevar a que los niños observen la ventaja de llevar a la década más próxima los números terminados en 9 y restar 1 , por ejemplo: 10 + 9 = 10 + 10 - 1; la cadena 3 buscaría mostrar cómo se afecta el productor al multiplicarse o dividirse uno o ambos factores de una multiplicación por distintos números y cuando se multiplican y dividen los factores por un mismo número, lo que equivale a multiplicar por 1.

Fig. 1

Cadena 1	Cadena 2	Cadena 3
10 + 10 =	10 + 9	32 x 5
9 + 11 =	15 + 9	64 x 10
8 + 12 =	15 + 19	64 x 50
13 + 7 =	20 + 19	128 x 100
14 + 6 =	25 + 29	1280 x 1000
5 + 15 =	39 + 39	256 x 500
16 +4 =	39 + 21	512 x 250
2 + 18 =	29 + 41	125 x 256

La cadena de la figura 2, atiende a suma de fracciones y decimales de uso común, con la idea de que los estudiantes puedan agilizar los cálculos haciendo las transformaciones mentales entre ambas expresiones según convenga:

Fig. 2

½ + ¼ =
1,5 + ¼ =
1 ¾ + 1,25 =
¾ + ½ =
¼ + 0,25 =
0,75 + ¾ =
½ + 1/6 =
1/3 + 2/2 =

La escritura de los cálculos en forma horizontal tiende a fomentar el análisis de los números intervinientes y el uso de múltiples estrategias, desestimando el empleo exclusivo de los algoritmos convencionales (cuentas verticales).

La cadena suele comenzarse con algunos cálculos conocidos o fáciles de realizar, y se van agregando de a uno otros eslabones, de modo que los estudiantes encuentren sus soluciones buscando relaciones en base a los ya trabajados. Si la cadena estuviera escrita en su totalidad, el alumno puede iniciar su solución por el cálculo que le sea más conveniente, que no necesariamente es el primero.

En la figura 3 puede apreciarse una cadena de porcentajes. En este caso, el objetivo consistió en la utilización de porcentajes conocidos (tomados como referentes: 10%, 25%, 50%) y la búsqueda del 1% como estrategia conveniente para averiguar otros porcentajes no redondos.

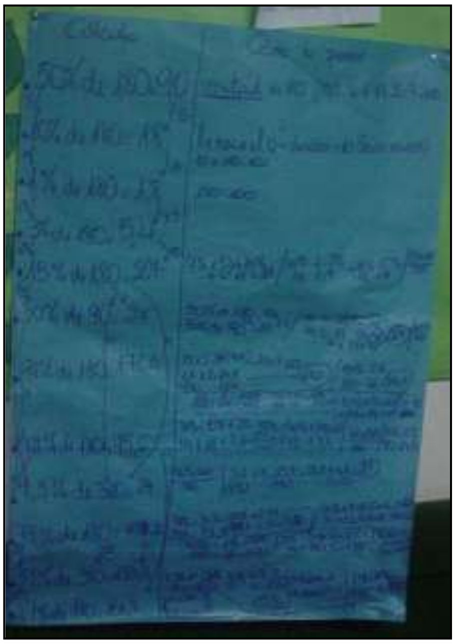


Fig. 3

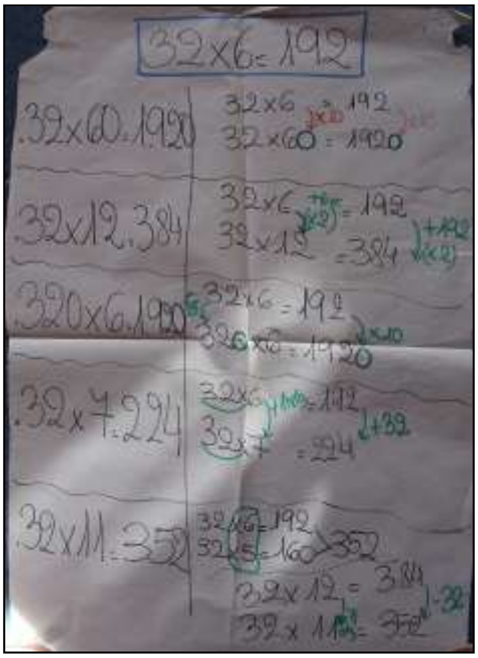


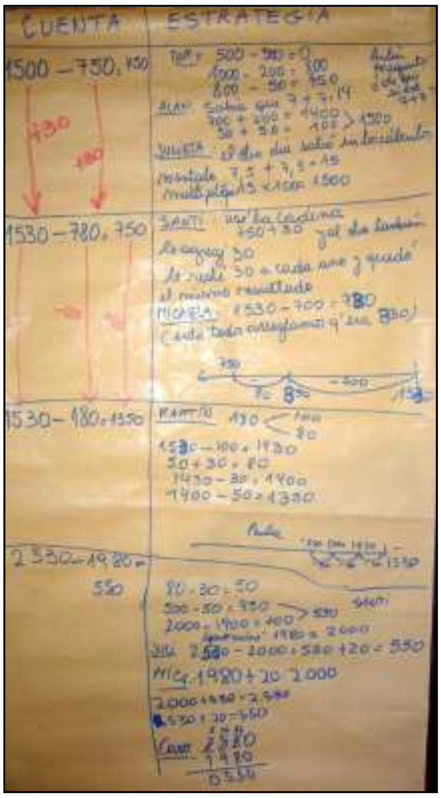
Fig. 4

También puede iniciarse una cadena dando un cálculo resuelto que servirá de base para averiguar los restantes. El ejemplo de la figura 4, muestra una cadena resuelta en 4° grado que tuvo como intención el trabajo reflexivo en torno a cómo utilizar un producto dado y distintas propiedades de la multiplicación para calcular otros.

¿Cómo se trabajan las cadenas en la clase?

La forma habitual de organizar la tarea consiste en que el docente y los alumnos se ubiquen frente al pizarrón o en círculo, con el cuaderno o una hoja por si necesitan anotar o comprobar algo (¡pero recalcándoles que no es para copiar ni para hacer cuentas *paradas*!). El docente va haciendo el registro de lo dicho por los alumnos en el frente a la vista de todos. El pizarrón o afiche se divide por lo general en dos partes: a la izquierda se van anotando los cálculos o eslabones (de a uno, a medida que se resuelven) y a la izquierda la/s estrategia/s propuestas por los alumnos para resolverlo. A continuación se puede ver un ejemplo de una cadena de sustracción de números naturales y la forma de registrar la actividad:

Fig. 5



Como se evidencia en esta cadena, la propuesta para los estudiantes de 4° fue jugar a afectar (en igual o distinta forma) los dos términos de una resta y su incidencia en el resultado. Se puede apreciar la multiplicidad de estrategias propuestas por los estudiantes: la descomposición, la línea numérica abierta (LNA), el aprovechamiento de cálculos ya vistos, el cálculo vertical.

Los cálculos se proponen en el pizarrón de a uno, dando tiempo para pensar a los alumnos y explicar sus soluciones. Se anotan todas las estrategias propuestas por los mismos lo más fielmente posible, dado que ellas serán el centro de reflexión y discusión.

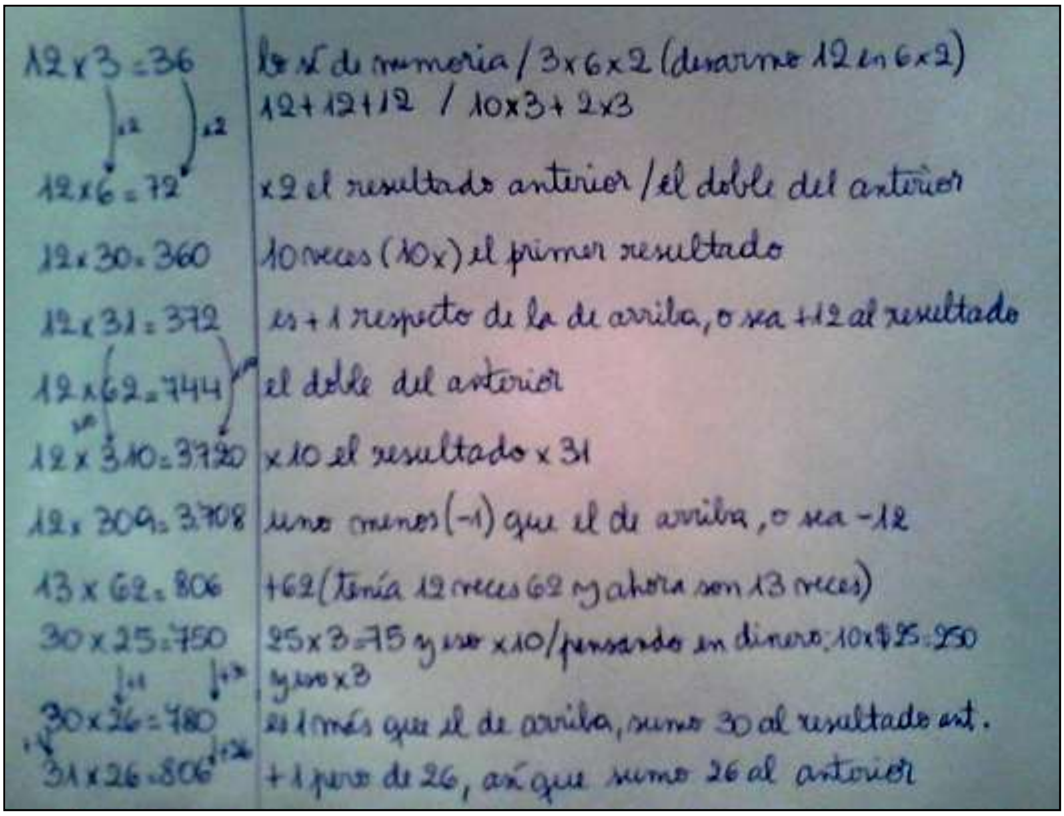
Una vez que las diferentes estrategias de un eslabón fueron compartidas, discutidas y clarificadas, se introduce el próximo paso en la cadena con el mismo procedimiento, sin borrar los pasos anteriores. Este proceso continúa hasta finalizar la misma. Se va logrando así la conformación de un entretejido o serie estructurada de cálculos sobre los cuales se puede trabajar, retrocediendo y avanzando según sea necesario, con la finalidad de hacer progresar el pensamiento matemático de los alumnos.

En las primeras instancias de trabajo con cadenas, es probable que los estudiantes consideren de forma aislada a cada cálculo, por lo que el docente ha de insistir en que esta actividad implica la búsqueda de conexiones entre los mismos.

Cuando los estudiantes ya estén habituados a este tipo de trabajo, se les puede pedir que agreguen algunos eslabones a la cadena dada o generen nuevas cadenas. Estas *producciones propias* (Gravemeijer, 1997), *libres o abiertas* (Streefland, 1990, 1991), ponen en juego sus comprensiones acerca de las propiedades que rigen la cadena elegida, por ejemplo, trabajar con productos en que intervenga la unidad seguida de ceros, producir múltiplos o divisores de un número, sumar fracciones, etc. Esto resulta estimulante para ellos y útil para el docente, quien a partir de los cálculos que proponen, puede ver qué tipo de conexiones hacen y qué estrategias tuvieron mayor anclaje sus estudiantes.

Si bien todas las estrategias se toman y registran, el docente promoverá su análisis y comparación procurando que se valoren aquellas que posean mayor exactitud y eficiencia, en función de los números y operaciones implicados. La anticipación por parte del docente, al planificar el trabajo, respecto de los posibles procedimientos a utilizar por los alumnos (tanto correctos como erróneos), facilitará su intervención para guiarlos en la re-invención de sus estrategias de cálculo mental, el uso de propiedades de las operaciones y el desarrollo de su sentido numérico. A medida que el docente adquiere experiencia, la cadena diseñada con anticipación puede ir reformulándose en el momento, en función de las respuestas de los estudiantes y las necesidades que manifiestan.

La cadena de multiplicación que figura a continuación (Fig. 6) ejemplifica algunas estrategias posibles de resolución de los cálculos y otras formas de notación y representación utilizadas (flechas, lenguaje coloquial, expresiones numéricas, etc.):



Como puede observarse, lo importante es que los estudiantes no se limiten, ni estén obligados, a usar un procedimiento fijo, como un algoritmo de los llamados convencionales, sino a mirar los números y decidir qué estrategia utilizar.
En la Figura 7 se aprecia cómo los estudiantes muestran sus relaciones trabajando con operadores y flechas y anotan con sus propias palabras la propiedad utilizada al resolver esa cadena:

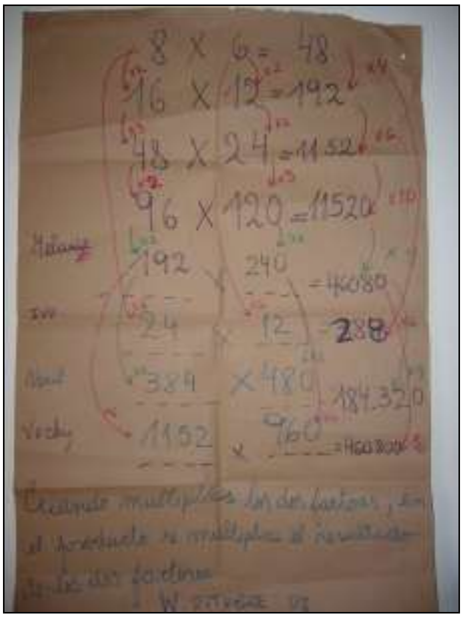


Fig. 7

Realizadas varias experiencias de cadenas, el docente recupera y analiza las propiedades empleadas por los alumnos, institucionalizándolas conviniendo con ellos sus nombres matemáticos. Es la oportunidad de “ponerle nombre” a las propiedades de los números (múltiplos de 10, pares, divisibles por 3, etc.) y de las operaciones que estuvieron utilizando (por ej. las propiedades asociativa de la suma o conmutativa de la multiplicación, etc.), distinguiendo los alcances de cada una (la multiplicación es distributiva respecto de la suma y de la resta; la resta y la división no admiten la propiedad conmutativa, etc.).

A medida que los estudiantes se acostumbran a esta modalidad de trabajo matemático mental, van desarrollando tanto la disposición a considerar la naturaleza de los números que intervienen en el problema, como la de buscar conexiones a partir de los pasos previos para decidir la manera más eficiente de resolver cada problema y es frecuente que generen cadenas para resolver cálculos más complicados, por ejemplo en situaciones de proporcionalidad, como se muestra en la figura siguiente:

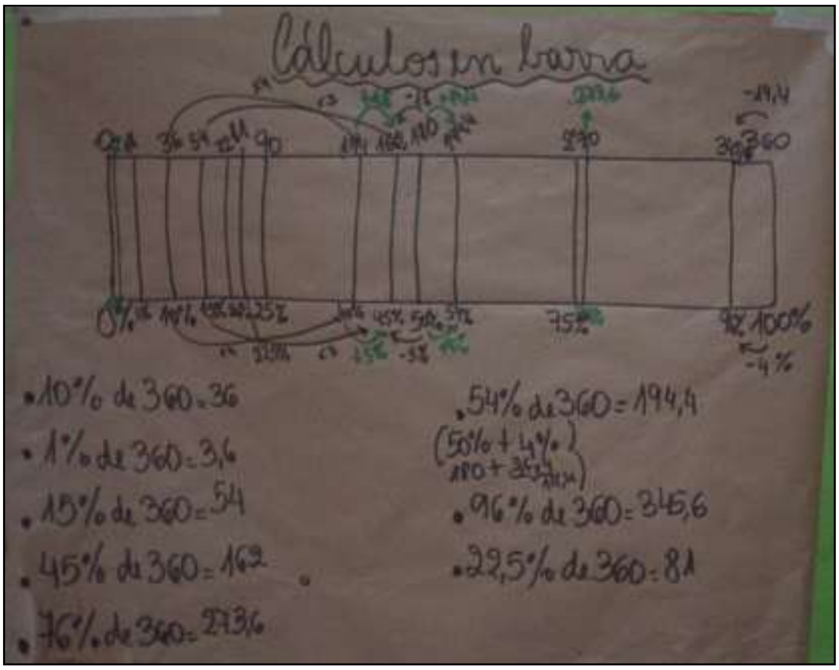


Fig. 7

En este caso, la cadena de cálculos está sostenida por un modelo gráfico de barra doble, hecho que ayuda a encontrar razones equivalentes y mantener visualmente la relación parte todo.

Es importante considerar que solo resolviendo cadenas de forma sistemática los estudiantes podrán desarrollar eficiencia en sus cálculos y enriquecer su “caja de herramientas” para el cálculo mental. Cuanto más trabajen con cadenas, más eficientes serán las estrategias que surjan. Lo ideal es tomar 15’- 20’ al inicio de la clase, 2 o 3 veces por semana y aprovechar “ratitos” entre una clase y otra. Hemos comprobado cómo este hábito mejora la concentración de los niños, además de que suele ser tomado como un desafío lúdico por ellos.

Resulta interesante darles a los estudiantes cadenas resueltas por otros para analizar las estrategias y propiedades utilizadas. De esta forma, deben asumir la responsabilidad de encontrarle sentido a las mismas.

"*Las cadenas escritas e individuales [que se pueden dar eventualmente como tarea] son convenientes para el momento de la evaluación, para ver cuáles y cuántas estrategias se apropió cada alumno, cómo las usan, etc.*" (Zolkower, 1999).

En resumen

Desde la EMR, Betina Zolkower (1999) puntualiza los aspectos esenciales para el diseño y uso de cadenas de cálculo:

- *"En la actividad sobre cadenas trabaja toda la clase y no permite que la práctica de la enseñanza esté centrada en el maestro. Son las propias estrategias de los alumnos y sus reflexiones y discusiones las que están en juego.*
- *El hecho de que los pasos de la cadena estén interconectados ofrece al alumno la oportunidad de usar lo que resolvieron anteriormente como también reflexionar* ex post facto *sobre la multiplicidad de conexiones pensadas.*
- *Los alumnos desarrollan una disposición a ver los números mismos que intervienen en el problema y también a buscar conexiones a partir de los pasos previos como para decidir la manera más eficiente de resolver cada problema.*
- *Se fomenta la rapidez, precisión, eficiencia, elegancia y sofisticación en el cálculo.*
- *Todas las estrategias son validadas y registradas, enfatizándose en comparar y juzgar sus valores relativos en función de los números.*
- *Cuando se hace una rutina, permite a los alumnos reinventar y usar, con la guía del maestro y en colaboración con sus compañeros, una "caja de herramientas" de poderosas estrategias de cálculo que son el alma de lo que significa el desarrollo del sentido del número.*
- *Brindan la oportunidad de encontrar patrones y afilar sus destrezas de una manera constructivista. Los alumnos, de este modo, no se limitan a un procedimiento rígido como en un algoritmo que se utiliza sin hacer caso al problema, sino más bien, ver los números y decidir qué estrategia utilizar."*

Nota: Como no resulta tan fácil explicar este tipo de trabajo por escrito, puede ayudar la lectura de una narrativa de la Sección "Experiencias de aula" de la página del GPDM. Es precisamente sobre la propuesta de una docente del grupo con cadenas en un 5° grado. En la sección "Publicaciones realizadas por el GPDM desde el 2000" se puede acceder a un cuadernillo de trabajo sobre cálculo mental llamado "Juego calculando. Calculo jugando". Hay para los distintos grados de la escuela primaria y todos tienen cadenas de cálculo y otros problemas y juegos que involucran el trabajo y la reflexión sobre el sentido numérico y las propiedades de las operaciones.

Por último, en la sección "Ideas para padres" de la página, hay disponible un folleto sobre cadenas que distribuimos en una exposición en Bariloche hace unos años. Puede resultar útil para compartir con colegas y padres de qué trata este asunto de las cadenas.

Bibliografía:

- Beishuizen M, Gravemeijer K. y van Lieshout E. (Eds). *The role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures.* Utrecht: Freudenthal Institute.
- Di Brienza J., Shevell G. (1998). *Cadenas numéricas: desarrollando eficiencia de cálculo en una clase constructivista*. The Constructivist. Vol. 13, nº 2. Association for Constructivist Teaching and the Project Construct National Center. Traducción: Adriana Rabino.
- Fosnot C., Uittenbogaard W. (2007). *Minilessons for Early Addition and Subtraction. A yearlong resource*. Ed. Heinemann. U.S.A.
- Gravemeijer K. (1997). Instructional design for reform in mathematis education en
- Imm K., Fosnot C., Uittenbogaard W. (2007). *Mini-lessons for Operation with Fraction, Decimal, and Percent*. Ed. Heinemann. U.S.A.
- Streefland L. (1991). Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht. CD-b Press. IF Utrecht University.
- Streefland, L. (1990). Free productions in the teaching and learning of mathematics en K. Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen y L. Streefland (Eds.), *Contexts, free productions, tests, and geometry in realistic mathematics education*, Utrecht University: OW & OC.
- Streefland, L. (Ed) (1991). *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht University: Instituto Freudenthal.
- Zolkower B. (1999). *Sobre el sentido de las cadenas y los números*. City College School of Education. Nueva York. Traducción: Adriana Rabino.
- Zolkower B. (1999). *Uso de cadenas. Una receta de doce pasos para el diseño y uso de cadenas*. Traducción: Ma. Fernanda Gallego.