Una circunferencia dentro de otra circunferencia a partir de puntos en movimiento

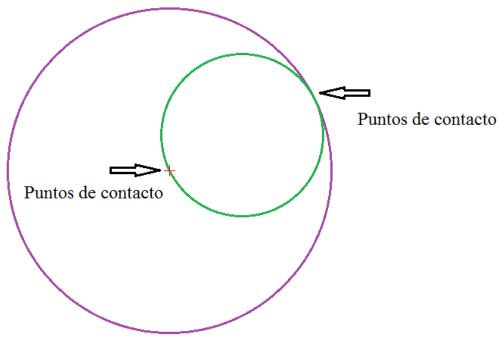
Oscar Bressan

Reflexionando sobre el video:

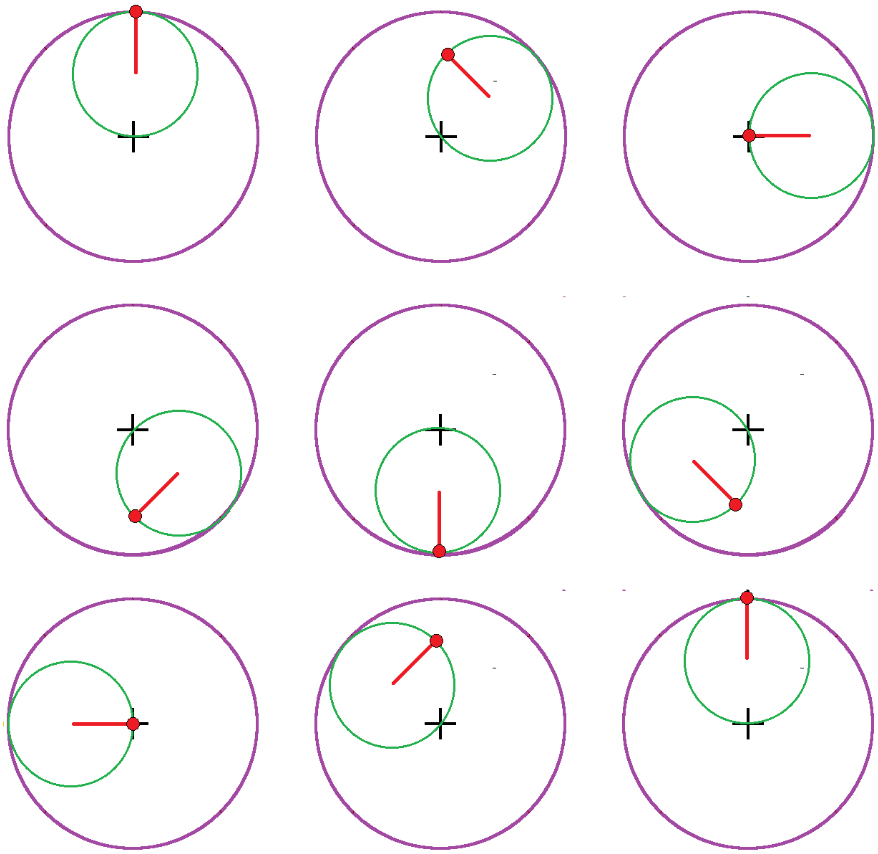
https://media.giphy.com/media/3o7WTN8FmMgK9hrZyU/giphy.gi

Primera presentación

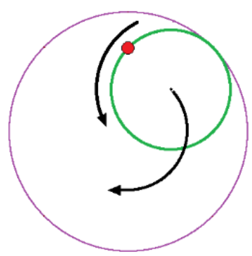
Sea una circunferencia exterior de radio R_{ext}. En su interior ponemos otra circunferencia tangente cuyo radio sea $R_{int} = ½ R_{ext}$.



Impongamos ahora que la circunferencia interior se desplaza manteniéndose siempre tangente:

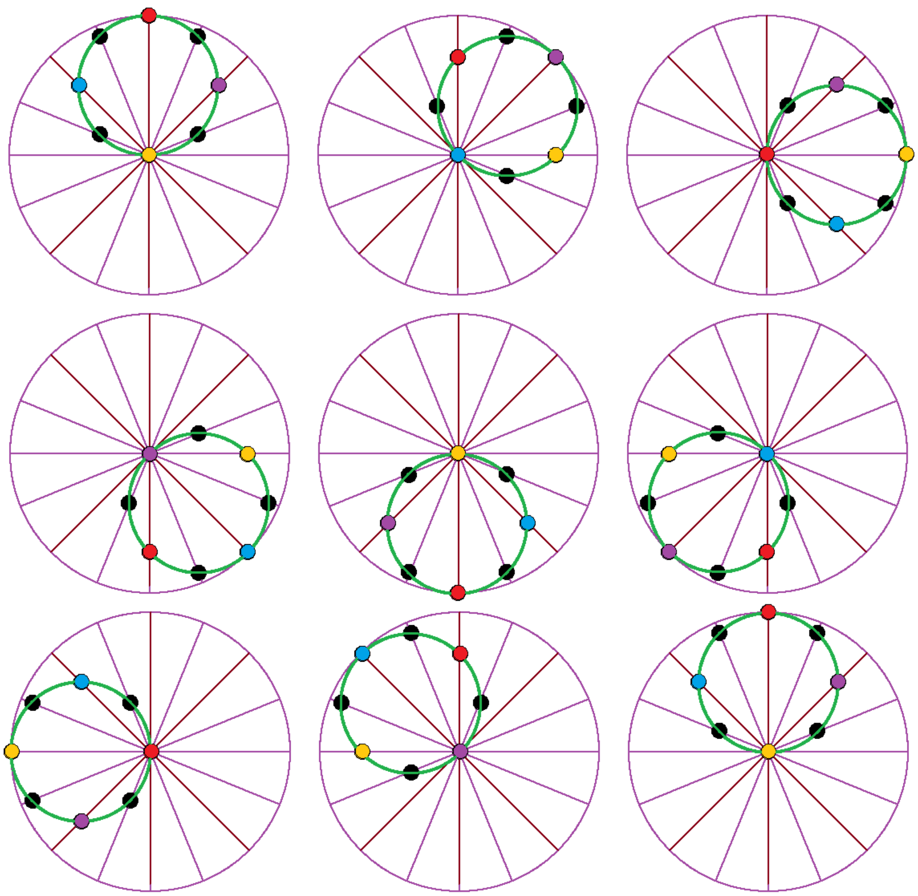


Obsérvese que el centro de la circunferencia pequeña gira en el sentido de las agujas del reloj mientras que la periferia de la misma gira en sentido contrario a las agujas del reloj. Se impone la condición que cuando el centro de la circunferencia pequeña da una vuelta completa la periferia también da una vuelta completa (claro que en sentidos contrarios).



Un resultado imprevisto

Entonces ocurre un fenómeno muy particular, casi increíble: Cada punto de la circunferencia interior se mueve en línea recta a lo largo de uno de los diámetros de la circunferencia exterior. Para ver este raro proceso vamos a destacar algunos pocos puntos de la circunferencia interior y el resultado es, gráficamente, lo que sigue:



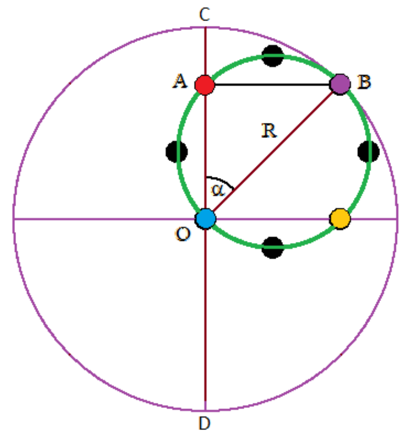
Notamos que cada punto de la circunferencia pequeña (identificados con colores distintos) se mueve siempre sobre un determinado diámetro. La distancia entre dos puntos distintos se mantiene constante y esto conlleva a que si elegimos un número de puntos que constituyan los vértices de un polígono regular, entonces el polígono gira pero se no se deforma. Por ejemplo los cuatro puntos negros son los vértices de un cuadrado, el que gira pero no se deforma.
Si nos detenemos en el punto rojo, y tomamos como coordenada $y = 0$ al centro de la circunferencia mayor, entonces ese punto se mueve desde $y = + R_{ext}$ hasta $y = - R_{ext}$ (o sea desde arriba hacia abajo), para seguir con el movimiento inverso (de abajo hacia arriba).

<u>Segunda presentación</u>

Aceptamos que el centro de la circunferencia pequeña se desplaza con velocidad angular constante. Entonces el ángulo que se mueve es proporcional al tiempo que transcurre:

$$\alpha = \omega t$$

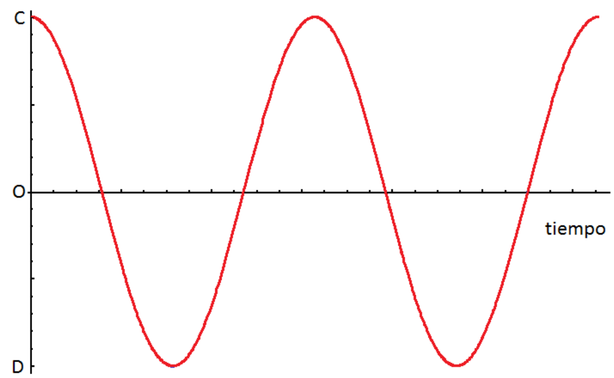
donde α es el ángulo, ω es la velocidad angular ($\omega = \alpha/t$ y es constante) y t es el tiempo.
Nos interesa saber cómo se mueve cada punto en función del tiempo. Nos detenemos en el punto rojo:



Como OB es un diámetro de la circunferencia menor, por el teorema del apéndice que está al final sabemos que el triángulo OAB es un triángulo rectángulo, y por trigonometría tenemos que:

$$OA = R \cos \alpha = R \cos (\omega t)$$

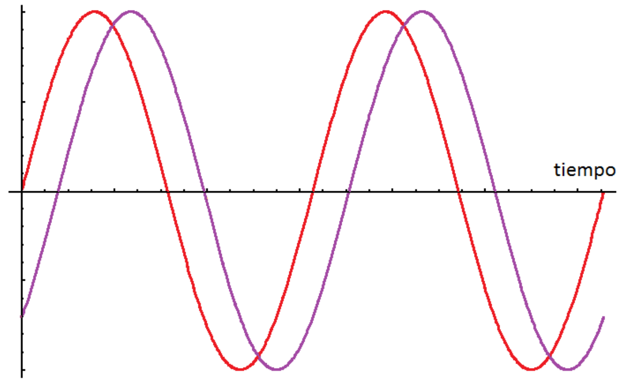
Esto ocurrirá para cualquier ángulo α, lo que implica que el punto A recorre el diámetro de C a D y viceversa en función del tiempo con esa ecuación, este tipo de movimiento de llama armónico y su gráfico es:



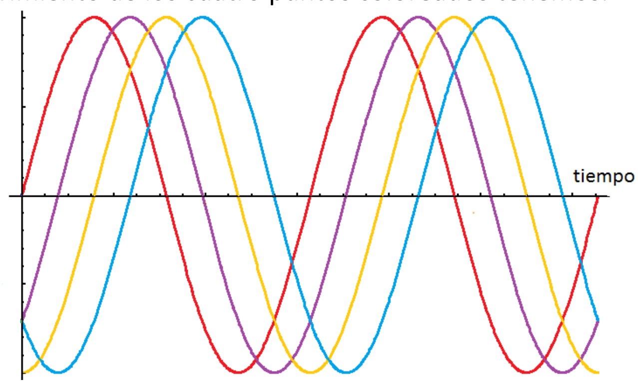
¿Qué pasa con los otros puntos que están sobre la circunferencia pequeña? Por ejemplo, con el punto violeta. La respuesta para el violeta (y para todos los otros) también es un movimiento armónico, pero retrasado (esto se llama un desfasaje). Cuando el punto violeta está sobre la periferia el punto rojo ya está volviendo, o sea que el violeta está desfasado. Este retraso es igual al ángulo que forma el diámetro de la circunferencia grande donde se mueve el violeta con respecto al diámetro donde se mueve lel rojo. En este caso el ángulo es del 45° de modo que el movimiento del violeta es:

$$OB = R \cos (\alpha - 45º) = R \cos (\omega t - 45º)$$

Los gráficos del movimiento del punto rojo y del violeta son:



…y si graficamos el movimiento de los cuatro puntos coloreados tenemos:



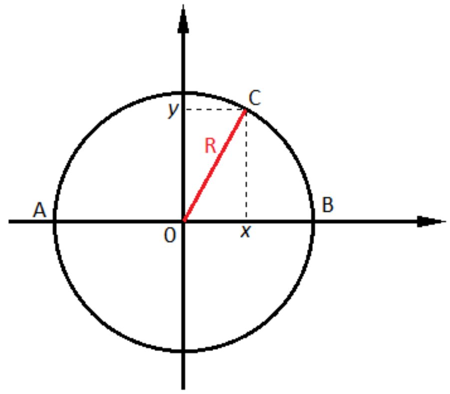
Dado que para obtener la ecuación de movimiento supusimos que el punto se movía sobre una circunferencia, estos puntos obviamente van a estar sobre una circunferencia. Para generar todos los puntos de la circunferencia tendríamos que tomar infinitos puntos con ángulos de desfasaje que vayan con continuidad desde 0 a 180°.

O sea que podemos pensar el problema de dos modos diferentes. Por un lado como una circunferencia cuyo centro se mueve y su periferia gira en sentido contrario y de allí observar cómo se comportan sus puntos, o bien dar el movimiento de los puntos y ver que estos generan la circunferencia.

<u>APENDICE</u>

Vamos a demostar que un triángulo inscripto en una circunferencia tal que dos de los vértices se encuentren en los extremos de un diámetro y el otro en cualquier punto de la circunferencia es un triángulo rectángulo.

Dado un punto "O" en un plano, una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan una distancia R (el radio) del punto O:



Dado un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo el punto C con coordenadas *x* e *y*, entonces se satisface siempre (por Pitágoras) que:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

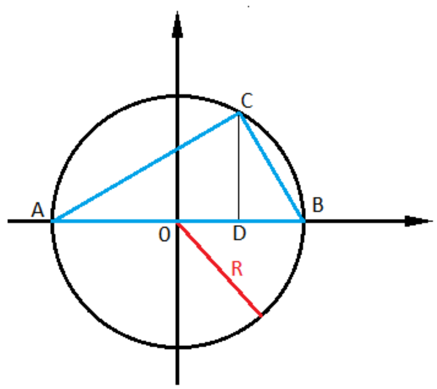
Debemos tener en cuenta que el teorema de Pitágoras es una condición necesaria y suficiente, en el sentido de que si el triángulo es rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa; por otro lado si tenemos un triángulo con lados a, b y c, y se satisface que $a^2 + b^2 = c^2$ entonces ese triángulo es rectángulo y a y b son los catetos y c la hipotenusa.

triángulo rectángulo $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$ $\Rightarrow$ triángulo rectángulo

Ahora tomamos el triángulo ABC, donde el vértice A está en un extremo de un diámetro, el vértice B en el otro extremo del mismo diámetro y el punto C es cualquier otro punto de la circunferencia. Vamos a demostrar que ese triángulo ABC es un rectángulo. Para esto basta que probar que:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$



$(OC)^2 = (R)^2 = (OD)^2 + (CD)^2 \quad \Rightarrow \quad (CD)^2 = (R)^2 - (OD)^2$

$(AC)^2 = (R + OD)^2 + (CD)^2$

$(CB)^2 = (R - OD)^2 + (CD)^2$

$(AC)^2 + (CB)^2 = (R + OD)^2 + (CD)^2 + (R - OD)^2 + (CD)^2 =$

$= (R)^2 + 2.(R.OD) + (OD)^2 + (CD)^2 + (R)^2 - 2.(R.OD) + (OD)^2 + (CD)^2 =$

$= 2.(R)^2 + 2.(OD)^2 + 2.(CD)^2 =$

$= 2.(R)^2 + 2.(OD)^2 + 2.(\ (R)^2 - (OD)^2\ ) = 2.(R)^2 + 2.(OD)^2 + 2.(R)^2 - 2.(OD)^2$

$= 4.(R)^2$

y por otro lado como:

$$(AB)^2 = (2.R)^2 = 4.(R)^2$$

llegamos finalmente a que

$$(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$$

lo que implica que el triángulo ABC es un rectángulo, donde AB es la hipotenusa y AC y CB son los catetos.