UNA TORTUGA CAMINANDO SOBRE UNA BANDA ELÁSTICA

Adriana Rabino - Oscar Bressan

Se tiene una banda totalmente elástica de 20 m. Desde un extremo avanza una tortuga a una velocidad de 1 metro por minuto. Cuando la tortuga avanza un metro inmediatamente después la banda se extiende dos metros. ¿Llegará alguna vez la tortuga al final de la banda?

Antes de seguir piense un momentito ¿qué respondería usted? Lo primero que uno piensa es que jamás va a llegar ni siquiera a la mitad de la banda. Por eso la respuesta resulta motivante.

Hay que tener en cuenta que cuando se estira dos metros la banda también se estira proporcionalmente lo que la tortuga ya caminó. En el primer minuto la tortuga recorre 1/20 del total de la banda (o sea el 5 % del total). En el segundo minuto la banda mide 22 metros, por lo cual la tortuga va a recorrer 1/22 (4,5454... %). En el tercer minuto la banda mide 24 metros y la tortuga va a recorrer 1/24 (4,1666… %). Y así sucesivamente.

Si sumamos esos porcentajes y en algún momento supera el 100 % entonces llega al final de la banda. En la tabla siguiente se muestran los resultados etapa por etapa.

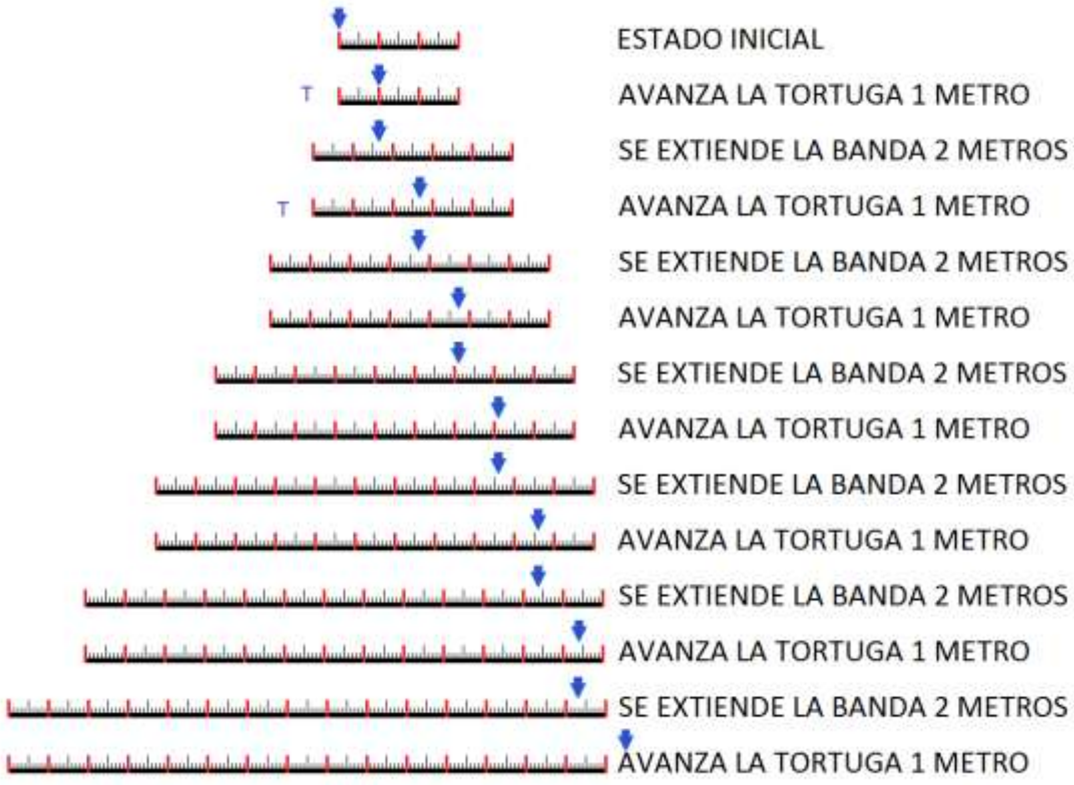
Etapas	Longitud banda	Recorrió la tortuga	Parte acumulada del total	Porciento acumulado	Distancia recorrida por tortuga	Distancia que le falta recorrer
1	20	1/20	0,05000	5,00000	1,000	19,000
2	22	1/22	0,09545	9,54545	2,100	19,900
3	24	1/24	0,13712	13,71212	3,291	20,709
4	26	1/26	0,17558	17,55828	4,565	21,435
5	28	1/28	0,21130	21,12970	5,916	22,084
6	30	1/30	0,24463	24,46304	7,339	22,661
7	32	1/32	0,27588	27,58804	8,828	23,172
8	34	1/34	0,30529	30,52921	10,380	23,620
9	36	1/36	0,33307	33,30699	11,991	24,009
10	38	1/38	0,35939	35,93857	13,657	24,343
11	40	1/40	0,38439	38,43857	15,375	24,625
12	42	1/42	0,40820	40,81952	17,144	24,856
13	44	1/44	0,43092	43,09225	18,961	25,039
14	46	1/46	0,45266	45,26616	20,822	25,178
15	48	1/48	0,47349	47,34950	22,728	25,272
16	50	1/50	0,49349	49,34950	24,675	25,325
17	52	1/52	0,51273	51,27257	26,662	25,338
18	54	1/54	0,53124	53,12442	28,687	25,313
19	56	1/56	0,54910	54,91014	30,750	25,250
20	58	1/58	0,56634	56,63428	32,848	25,152
21	60	1/60	0,58301	58,30094	34,981	25,019

22	62	1/62	0,59914	59,91385	37,147	24,853
23	64	1/64	0,61476	61,47635	39,345	24,655
24	66	1/66	0,62991	62,99150	41,574	24,426
25	68	1/68	0,64462	64,46209	43,834	24,166
26	70	1/70	0,65891	65,89066	46,123	23,877
27	72	1/72	0,67280	67,27955	48,441	23,559
28	74	1/74	0,68631	68,63090	50,787	23,213
29	76	1/76	0,69947	69,94669	53,159	22,841
30	78	1/78	0,71229	71,22874	55,558	22,442
31	80	1/80	0,72479	72,47874	57,983	22,017
32	82	1/82	0,73698	73,69825	60,433	21,567
33	84	1/84	0,74889	74,88873	62,907	21,093
34	86	1/86	0,76052	76,05152	65,404	20,596
35	88	1/88	0,77188	77,18788	67,925	20,075
36	90	1/90	0,78299	78,29899	70,469	19,531
37	92	1/92	0,79386	79,38595	73,035	18,965
38	94	1/94	0,80450	80,44978	75,623	18,377
39	96	1/96	0,81491	81,49145	78,232	17,768
40	98	1/98	0,82512	82,51185	80,862	17,138
41	100	1/100	0,83512	83,51185	83,512	16,488
42	102	1/102	0,84492	84,49225	86,182	15,818
43	104	1/104	0,85454	85,45378	88,872	15,128
44	106	1/106	0,86397	86,39718	91,581	14,419
45	108	1/108	0,87323	87,32311	94,309	13,691
46	110	1/110	0,88232	88,23220	97,055	12,945
47	112	1/112	0,89125	89,12506	99,820	12,180
48	114	1/114	0,90002	90,00225	102,603	11,397
49	116	1/116	0,90864	90,86432	105,403	10,597
50	118	1/118	0,91712	91,71177	108,220	9,780
51	120	1/120	0,92545	92,54511	111,054	8,946
52	122	1/122	0,93365	93,36478	113,905	8,095
53	124	1/124	0,94171	94,17123	116,772	7,228
54	126	1/126	0,94965	94,96488	119,656	6,344
55	128	1/128	0,95746	95,74613	122,555	5,445
56	130	1/130	0,96515	96,51536	125,470	4,530
57	132	1/132	0,97273	97,27294	128,400	3,600
58	134	1/134	0,98019	98,01921	131,346	2,654
59	136	1/136	0,98755	98,75450	134,306	1,694
60	138	1/138	0,99479	99,47914	137,281	0,719
61	140	1/140	1,00193	100,19343	140,271	-0,271

Si sumamos los porcentajes recorridos al llegar a 61 etapas (o sea en 61 minutos) el valor que obtenemos es 100,1934… %. O sea que nuestra tortuguita ya llegó (y superó) al final de la banda.

Como se podrá observar en la tabla, a los 61 minutos la banda se estiró hasta medir 140 metros, momento en que la tortuga recorrió140, 271 metros.

Para verlo gráficamente vamos a simplificar el problema y suponer que la banda tiene inicialmente solo 3 metros, y ponemos en dos pasos sucesivos el avance de la tortuga y la extensión de la banda. Con la flecha azul se señala la posición de la tortuga:



En este caso la tortuga llega al final en 7 minutos mientras que la banda tiene una longitud inicial de 3 metros y una longitud final de 15 metros.

Sumar los porcentajes recorridos hasta que supera al 100 % es equivalente a sumar las fracciones de banda hasta que supera a la unidad, ya que los porcentajes son las fracciones de banda multiplicados por 100. Para la banda inicial de 20 metros tendríamos que la tortuga llega al final con la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{136}+\frac{1}{138}+\frac{1}{140}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{69}+\frac{1}{70}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{n}=10}^{70}\frac{1}{\boldsymbol{n}}=1{,}001934$$

($\sum_{n=a}^{b}\frac{1}{n}$ es un símbolo matemático que se llama "sumatoria" y significa la suma de los términos donde n va desde a hasta b (b>a) ; por ejemplo $\sum_{n=3}^{5} n^2 = 3^2+4^2+5^2=50$).

Como consecuencia de la fórmula anterior la tortuga supera el final de la banda cuando:

$$\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{n}=10}^{70}\frac{1}{\boldsymbol{n}}\geq 1\backslash$$

o lo que es lo mismo:

$$\sum_{\boldsymbol{n}=10}^{70}\frac{1}{\boldsymbol{n}}\geq 2$$

La cantidad de etapas es 70 - 10 + 1 = 61. El tiempo que le lleva a la tortuga alcanzar el final de la banda es justamente 61 minutos.

En el apéndice damos algunas propiedades de una serie que es la suma de inversos (o sea 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ….) y que se llama "***serie armónica***", y nos va a dar pautas sobre el comportamiento general de nuestra banda y nuestra tortuga.

Allí vemos que

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n} \geq 2$$

cuando p = parte entera de ($k \times e^2$).

Con esto podemos calcular en cuanto tiempo llega la tortuga al final para cualquier longitud de la banda. Si la banda tuviera inicialmente 200 metros (o sea k = 200) entonces p = parte entera de (200 × 2,718 × 2,718) = 1477.

La cantidad de etapas es 1477 - 200 + 1 =1278. La tortuga va a tardar 1278 minutos para llegar al final, esto es 21 horas y 18 minutos. Mientras que la longitud inicial de la banda es 200 m la final es (1477 × 2) m = 2954 m

Lo notable es que la tortuga va a llegar siempre al final, cualquiera sea la longitud inicial de la banda, aunque obviamente va a tardar más cuanto mayor sea el largo de la banda.

APÉNDICE - SERIE ARMÓNICA

Se llama serie armónica a la suma de los inversos de los números naturales:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$$

Esta suma diverge (tiende a infinito), que quiere decir que es mayor que cualquier número por grande que sea. Para demostrar este resultado comparamos la serie armónica (H):

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \ldots$$

con otra serie (S):

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

Obviamente H > S, y como S diverge entonces H (con más razón) también diverge. Esto fue descubierto por Nicolás Oresme en el año 1350.

La serie armónica crece a infinito, pero muy lentamente. Si sumamos los primeros 1000 términos (desde 1 hasta 1/1000) la suma es 7,48547… Si tomamos un millón de términos (desde 1 hasta 1/1000000) la suma es 14,3927…

Si eliminamos los primeros k términos (k un número natural) de una serie armónica es equivalente a restarle un valor finito, y lo que resta sigue siendo una serie divergente:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+5} + \ldots = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Es interesante que para cualquier número natural k si se toma un número p tal que:

p = parte entera de (k × e)

(donde e = 2,71828…) se satisface que:

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n} \geq 1$$

por ejemplo, si se toma $k = 100$, entonces p = parte entera de $(100 \times 2{,}71828) = 271$ y

$$\sum_{n=100}^{271} \frac{1}{n} = 1{,}0038 \geq 1$$

Por otro lado, si:

p = parte entera de $(k \times e^2)$

entonces

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n} \geq 2$$

Si

p = parte entera de $(k \times e^3)$

entonces

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n} \geq 3$$

Y así sucesivamente…

Otro problema sobre serie armónica se puede encontrar en esta página en Problemas para Secundaria con el título: **Secuencia y serie armónica: ¿qué de distinto?**

Ana Ma. y Oscar Bressan.