CÓMO ENGENDRAR TERNAS PITAGÓRICAS A PARTIR DE UN NÚMERO IMPAR

Ana Bressan - Oscar Bressan

Ya en el libro X de *Los elementos de Euclides,* aparecen las fórmulas para encontrar todas (infinitas) las ternas pitagóricas con números enteros: tomando dos enteros positivos cualesquiera m y n con m › n, uno par y otro impar, tómese

$$x = 2mn$$
$$y = m^2 - n^2$$
$$z = m^2 + n^2$$

Pero otra manera curiosa de encontrar infinitas ternas pitagóricas con números enteros es partiendo de un número impar y siguiendo el siguiente algoritmo:

Tomamos un número impar cualquiera, lo elevamos al cuadrado, lo dividimos por 2 y al resultado le restamos ½ y le sumamos 1.

Probemos:

a) Sea 7 el impar elegido, lo elevamos al cuadrado: $7^2 = 49$; lo dividimos por 2: 49:2 = 24,5; le restamos 0.5: 24,5 - 0.5 = 24, le sumamos 1: 24 + 1 = 25.

$$\mathbf{25^2 = 7^2 + 24^2}$$

Los valores en rojo constituyen una terna pitagórica.
Note además que la suma de los dos últimos de esos números, que son consecutivos, da el cuadrado del número impar elegido (**49 = 24 + 25**)

b) Elijamos otro número impar, por ejemplo el 35. Haciendo el mismo procedimiento tenemos

35; 35^2 = 1225; 1225:2 = 612,5; 612,5 – 0,5= 612; 612 + 1 = 613

$$\mathbf{613^2 = 35^2 + 612^2}$$

Y otra vez comprobamos**: 1225 = 612 + 613**

Inferimos que existen infinitas ternas pitagóricas obtenidas a partir de un número impar si seguimos el algoritmo dado. Podemos demostrarlo.

TEOREMA: Si se determinan tres números, tal que *a* es impar, *b* es igual a la mitad del cuadrado de *a* menos un medio (1/2) y *c* es igual a la mitad del cuadrado de *a* más un medio obtenemos una terna pitagórica.

HIPÓTESIS
Sea "a" un número natural impar
Sea $b = (1/2) \times a^2 - (1/2)$
Sea $c = (1/2) \times a^2 + (1/2)$

TESIS
a, b y c constituyen una terna pitagórica, tal que $a^2 + b^2 = c^2$

DEMOSTRACIÓN
$a^2 + b^2 = a^2 + [(1/2) \times a^2 - (1/2)]^2 = (1/4) \times a^4 + (1/2) \times a^2 + (1/4) = (1/4) \times (a^2 + 1)^2$
$c^2 \quad = \quad [(1/2) \times a^2 + (1/2)]^2 = (1/4) \times a^4 + (1/2) \times a^2 + (1/4) = (1/4) \times (a^2 + 1)^2$

En consecuencia $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$**,** que es lo que queríamos demostrar, lo que es válido para cualquier número impar "a", tan grande como se quiera.

Nota: b y c resultan números consecutivos (¿por qué?) y sumando b + c puedes comprobar que el resultado es igual a $\mathbf{a^2}$.

¿PUEDES RELACIONAR LAS CONDICIONES DE LA HIPÓTESIS CON EL ALGORITMO DADO? ¿Y CON LAS FÓRMULAS DE EUCLIDES?

Busca en esta misma página otro problema relacionado, en **PROBLEMAS PARA SECUNDARIA:** **Ternas pitagóricas.** *Adriana Rabino.*