Secuencias numéricas en niños: una explicación de los constructos de Steffe y una extrapolación a los números racionales en aritmética

John Olive

Traducción: Graciela Méndez y Ana Bressan (GPDM) julio 2016.

En consideración a los niños pequeños, como matemáticos, debemos prestar atención de cerca a cómo desarrollan su pensamiento matemático. Podría ser engañoso asumir que los niños lo hacen en la misma forma que los adultos. Los niños deben desarrollar sus estructuras matemáticas y sus formas y medios de operar matemáticamente. Estas estructuras y operaciones deber ser construidas desde las propias actividades del niño. No deben ser dadas "ya hechas". Una de las estructuras más importantes que el niño desarrolla en forma temprana en su vida es la *serie numérica (SN o NS en inglés)*. La actividad básica que conduce a la construcción de la serie numérica es el *conteo*. No obstante, la actividad de contar no se da toda al mismo tiempo en el niño. Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb (1983) indicaron en sus investigaciones sobre la actividad de conteo en niños pequeños que hay un progreso temprano en el conteo a través de cinco tipos distintos de actividades, desde el conteo de objetos visibles como unidades perceptuales hasta el conteo considerando unidades abstractas. Estos autores relacionan esta progresión con el concepto de Piaget de "permanencia del objeto" (p. 117).

La SN en un niño, sin embargo, no es una estructura estática. Progresa a través de diversos cambios de estrategia que se producen gracias a las adaptaciones de las actividades de conteo de los niños cuando se encuentran frente a situaciones numéricas de mayor nivel de complejidad. Continuando su trabajos sobre tipos de conteo en los niños, Steffe y Cobb (1988) desarrollaron más la noción de secuencias numéricas abstractas a partir de sus experiencias de enseñanza con niños de primero y segundo grados. Describieron el desarrollo de tres secuencias numéricas sucesivas: la SN inicial (SNI, INS en inglés), la SN tácitamente anidada (SNT o TNS en inglés) y la SN anidada en forma explícita (SNE o ENS en inglés). Lo que sigue es mi intento de clarificar mi propio pensamiento acerca de estas SN hipotéticas y una extrapolación de las mismas a una SN generalizada (SNG O GNS) y posteriormente a la aritmética de los números racionales (ARN o RNA en inglés).

Aspectos psicológicos clave de las secuencias numéricas

Mientras está fuera del alcance de este trabajo intentar una discusión psicológica cuidadosa del aprendizaje, los siguientes aspectos psicológicos clave de las SN son importantes para darle sentido a la secuencia de desarrollo presentado en este artículo. Las siguientes definiciones breves son presentadas más como una orientación para el lector, que como una explicación minuciosa de términos. Se espera que los significados se aclaren a través de los ejemplos dados en las descripciones de las SN.

Esquemas

Las SN son esquemas de constructos mentales. De acuerdo con von Glasersfeld (1980) un esquema consta de tres partes: (1) una estructura asimilativa o plantilla de reconocimiento a través de la cual un niño reconoce una situación como relevante para este esquema particular, (2) una acción u operación asociada a la situación, (3) un resultado de la acción u operación. Las tres partes están relacionadas con el objetivo primordial del esquema.

Actividad interiorizada

Las operaciones posibles asociadas con una SN surgen de *la interiorización de las actividades* que los niños realizan a través de aplicaciones de sus SN previas. Es decir, que los niños pueden hacer cosas en acción antes de que sean capaces de hacerlas mentalmente. La interiorización de la actividad es un proceso de abstracción reflexiva (von Glasersfeld, 1995). Primero se internaliza la actividad a través de imágenes mentales, el niño puede re-presentar la actividad mentalmente. Esa re-presentación mental aún lleva consigo detalles contextuales de la actividad. La actividad se torna interiorizada a través de una abstracción mayor de esas re-presentaciones internalizadas por medio de la cual se eliminan esos detalles contextuales. Por ejemplo, un niño podría primero internalizar el acto de contar seis cubos por la formación de registros mentales de actos de conteo que incluirían las acciones de señalar y las imágenes de los cubos. Si los cubos se taparan y se le pidiera al niño que diga cuántos se cubrieron, podría re-representar (re-enact) sus actos de contar sobre la cubierta, proyectando imágenes mentales de los cubos que está contando en base a los registros que posee de la actividad anterior. Este *reprocesamiento* de los registros de su experiencia anterior puede conducir a una mayor abstracción por la cual ahora el acto de señalar puede ser reemplazado para contar objetos. Finalmente, será el mismo *resultado* de tal conteo figurativo, el que sustituirá los actos de contar. Es en este punto cuando podríamos decir que la actividad de conteo del niño se ha interiorizado.

Re-interiorización

El nivel más alto de las SN se construye a través de un proceso de *re-interiorización* del nivel más bajo. Re-interiorización que se logra por la aplicación recursiva de las operaciones de un esquema a los resultados de otro. Por ejemplo, cuando el niño puede tomar el resultado de contar un conjunto de objetos como algo a ser contado (una acción necesaria para establecer la numerosidad de un conjunto de conjuntos).

Unidades iterables y compuestas

La construcción de una *unidad iterable* es clave para el desarrollo de esquemas multiplicativos, y es el resultado de operaciones *reversibles* (uno iterado cinco veces da como resultado un cinco, que puede ser partido en cinco unos). Las *operaciones reversibles* se establecen a través de aplicaciones *recursivas* de la actividad de un esquema a los resultados del mismo.

Las *unidades iterables* son los ladrillos para la construcción de *unidades compuestas* -esto es, unidades formadas por elementos unidad. Por ejemplo, cinco unos pueden ser considerados como un cinco.

"Desdoblar o volver hacia atrás" (Folding back)

Las operaciones de SN de orden inferior reaparecen en las secuencias de orden superior, pero aplicadas a elementos unidad más complejos. Esto podría asemejarse a la noción de Kieren y Pirie (1991), de desdoblar o volver para atrás *(folding back)* en su modelo *recursivo* de pensamiento matemático.

Con estos aspectos psicológicos de las SN en mente, presento a continuación breves descripciones de las SN desarrolladas por Steffe et al., comenzando con su descripción de los esquemas de conteo de niños pre-numéricos y trabajando a través de la construcción de la SN Generalizada.

Esquemas de conteo pre-numérico

En la etapa pre-numérica, los niños suelen tener una "secuencia de palabras-número" que utilizan conjuntamente con el acto de señalar en sus intentos por "contar" los elementos de una colección; sin embargo, el resultado de sus actos de contar no significa la cardinalidad de la colección – esto sólo podría significar el cierre de sus intentos para definir la indefinición de una pluralidad (la "numerosidad" de la colección). Por ejemplo, estos niños pueden "contar" mediante la secuencia de palabras numéricas "uno, dos… cinco" y luego, cuando se les pide que cuenten nuevamente la misma colección, usarán la secuencia de palabras numéricas "uno, dos… seis". En la segunda oportunidad, pueden haber señalado un objeto dos veces, o no haber coordinado el recitado con el acto de señalar. Es posible que estos niños no se muestren preocupados por haber llegado a diferentes palabras numéricas como resultado de "contar".

Contadores perceptivos y figurativos

Los niños pre-numéricos pueden aprender a coordinar el señalamiento de los objetos con las palabras numéricas de la serie. Cuando ven esta coordinación como una *necesidad* para averiguar "cuántos" objetos tienen, el resultado de contar es un significado extensivo para sus palabras numéricas: contar una colección "uno, dos… cinco" da por resultado para el niño que hay "cinco" cosas "*ahí*" ("*out there*"). Estos niños son considerados contadores *perceptuales.* Los objetos deben permanecer en su campo perceptual para que sean capaces de contarlos. Si los niños que pueden contar una colección en forma perceptual dicen una palabra diferente cuando cuentan la misma colección por segunda vez, podrían sentirse desorientados. Este conflicto puede alentarlos a organizar su actividad de contar para asegurarse que cuentan cada objeto sólo una vez (por ejemplo, colocándolos en línea o separando los contados de los no contados).

Los contadores perceptuales pueden aprender a contar cosas *que permanecen* luego de haber sido contadas. Por ejemplo, si una vez contados los objetos de una colección se les pregunta cuántos objetos hay cuando esa colección se cubre, algunos niños pueden señalar la cubierta y contar los elementos *imaginados*, o pueden recurrir a patrones con los dedos para dos, tres, cuatro o cinco objetos y contar estos patrones. Pueden incluso dibujar imágenes en papel para los objetos, o registrar por medio de marcas para contarlos. Estos niños han *internalizado* los objetos contables y se convierten en *contadores figurativos*.

Para ambos, contadores perceptuales y figurativos, el resultado de contar *está por fuera (out there),* aún no está *interiorizado.* Ellos no pueden tomar ese resultado y usarlo como punto de partida para seguir contando. Por ejemplo, habiendo contado una colección de cinco objetos, cuando se agregan más objetos a esa colección, el niño *contará toda* la colección obtenida para saber cuántos objetos tiene ahora. Esta necesidad de *contar todo* distingue al niño pre-numérico del numérico.

Serie numérica inicial (SNI o INS en inglés)

Los niños que necesitan *contar todo* pueden ser alentados a representar mentalmente sus actos de contar cubriendo los elementos de la colección contada cuando se añaden más objetos. A menudo intentan visualizar los objetos ocultos señalando la cubierta mientras los recuentan. Estas actividades les ayudarán en principio a *interiorizar* (lograr una representación mental de) sus actos de contar y, eventualmente, *internalizar* los resultados de esos actos: el resultado de contar una colección no sólo está "ahí afuera" sino que se simboliza mentalmente por una palabra numérica *interiorizada*, que lleva consigo los registros de la experiencia de contar. El niño ha construido una secuencia numérica abstracta en el sentido de que cada elemento de su secuencia de palabras numéricas ahora representa la sub-secuencia de los actos de contar que resulta en esa palabra número. Por ejemplo, el número "cinco" está fijado para la secuencia de conteo "uno, dos,…, cinco". Los niños que han establecido esta acomodación en su secuencia de palabras numéricas pueden continuar contando (*sobrecontar)* cuando se agregan elementos a la colección previamente contada. Así, habiendo contado cinco objetos cuando se les dan otros tres, esos niños dirán: “cinco, seis, siete, ocho”, señalando por turno los nuevos objetos. El “cinco” ahora permanece para los primeros cinco objetos que habían sido contados. El número cinco ahora es una composición numérica: puede significar una colección de cinco objetos. La *numerosidad* de la colección está finalmente establecida.

Con una SNI los registros interiorizados sólo pueden ser usados para simbolizar los *resultados* de actos de contar; no pueden usarse aún como *puntos de partida* para contar. Por ejemplo, los niños con una SNI incluso pueden usar composiciones numéricas como elementos a ser contados y así generar acciones “de contar-de-a…” o contar por grupos (“counting-by”). Por ejemplo, pueden contar una colección grande de a dos (porque es más rápido), pero no pueden decir cuántas veces contaron de a dos. La pregunta “¿Cuántos dos?” no tiene sentido aún porque el “dos” corresponde a dos elementos en una colección (una composición numérica) no a un elemento contable (elemento compuesto en este caso, por dos unidades). En forma similar, los niños pueden aprender a contar de a cinco o de a diez, pero no ser capaces de llevar la cuenta de sus actos de “contar-de-a…”.

Secuencia de números tácitamente anidada (SNT o TNS en inglés)

Añadiendo más restricciones a las situaciones de contar (como cubrir los elementos que fueron añadidos, así como los ya contados) los niños con una SNI necesitarán desarrollar formas de registrar su sobreconteo (*counting on)* y su *conteo de a*… (*counting by*). Muchos niños usarán los dedos o señalarán para representar los objetos ocultos. Este acto de representar qué es lo que se sigue contando, es el primer paso en el uso de elementos de su SNI como entrada para conteos futuros. Al principio pueden usar patrones de dedos para reemplazar la cantidad a contar y simplemente usar cada dedo en el patrón como un *elemento contado* mientras continúan contando usando su SNI. Cuando la cantidad a contar es demasiado extensa (por ejemplo, más de diez), el niño que usa un patrón de dedos necesita desarrollar alguna otra forma de registro de sus actos de conteo cuando ellos continúan contando. Por ejemplo, después de haber contado un grupo de 12 bolitas en una taza y 15 bolitas en otra, tratando de averiguar cuántas bolitas hay en total, el niño puede empezar a contar desde 12, levantando un dedo para cada bolita: “13 (un dedo), 14 (dos dedos), 15 (tres dedos)…, 22 (diez dedos levantados)”. En este punto el niño puede bajar todos los dedos y continuar contando “23 (un dedo), 24 (dos dedos),…”. Si se detiene luego de levantar los cinco dedos de una mano, probablemente utiliza el patrón de “los diez dedos más una mano” para 15. Sin embargo, muchos niños no han desarrollado un patrón similar sólo con la SNI y no sabrán cuándo parar de contar. Esto genera un conflicto que el niño necesita resolver. Necesitan encontrar un modo de llevar el registro de contar 15 *más* a partir de 12. Esto los obliga a una reprocesamiento de sus SNI que resulta en una forma de doble conteo. Los elementos unitarios abstractos de sus SNI se convierten en *elementos contables*. En efecto utilizan su secuencia numérica de 1 a 15 como una forma original de marcar un segmento de sus secuencias numéricas desde 12 en adelante. Pueden decir algo como lo siguiente mientras levantan sus dedos: “13 es uno, 14 es dos,…, 27 es quince”. De esta manera reprocesando un segmento de la secuencia numérica han hecho un tácito anidado (encapsulado) de la secuencia de 1 a 15 dentro de la secuencia de 1 a 27. Esto constituye una re-interiorización de la SNI que Steffe llama Secuencia Numérica Tácitamente Anidada (SNT o TNS en inglés). Los elementos de la SNI fueron actos de conteo interiorizados. Ahora, los elementos de la SNT son *unidades abstractas contables*. La actividad de reprocesar uno a 15 como elementos contables también crea una estructura compuesta. El resultado (el intervalo anidado desde 13 hasta 27) tiene una numerosidad de 15. Existe ahora una conciencia de "15" como un entero compuesto, no sólo como el resultado interiorizado de contar de 1 a 15. En esencia, el niño ahora puede *unir* los resultados de contar. Así, una colección de 5 objetos contados puede ser tomada como *una cosa: un elemento unidad compuesto.*

Por ejemplo, cuando *cuenta-de-a…* una unidad compuesta (más que una composición numérica) el niño con una SNT puede realizar un seguimiento de cuántas veces lleva contado de a dos o de a cinco. La pregunta "¿cuántos (de) dos?" ahora tiene sentido porque los dos pueden tomarse como una cosa y pueden utilizarse para *segmentar* una secuencia en un número desconocido de intervalos de dos. Por lo tanto, los niños que han construido una SNT son capaces de encontrar cuántos grupos de dos hay en una colección cubierta de 12 elementos contando: 1, 2; 3, 4; 5, 6;…; 11, 12, llevando la cuenta del número de pares contados. Como alternativa, pueden contar "de dos en dos" hasta doce (2, 4, 6, 8, 10, 12) mientras registran el número de actos de contar pares. Este "llevar la cuenta" implica la coordinación de elementos unidad a dos niveles de su SNT. Esta coordinación, sin embargo, sólo puede efectivizarse en acción porque los intervalos anidados tienen que ser producidos (ellos aún no están explicitados). Así, los esquemas multiplicativos *en acción* se convierten en construcciones posibles para los niños con SNT, pero no son posibles para niños que sólo poseen una SNI.

Secuencia numérica explícitamente anidada. (SNE o ENS en inglés)

Aunque los niños con una SNT (TNS) pueden comenzar a construir estructuras multiplicativas durante sus actividades, éstas son limitadas dada la naturaleza *tácita* de la anidación en sus secuencias numéricas. Con esto quiero decir que los intervalos anidados pueden usarse para *segmentar* la serie numérica en el conteo. La secuencia de segmentos (por ejemplo "los seis dos" en la serie desde el 1 hasta el 12) es el *resultado* de aplicar las operaciones de una SNT. Pero esto aún no puede ser tomado como dato. Sin embargo, para establecer esquemas multiplicativos abstractos (razonamiento multiplicativo) los niños deben ser capaces de *empezar* con "seis dos" como una estructura asimilada. Para que sea capaz de asimilar tales estructuras hace falta otra *re-interiorización* de la serie numérica del niño. *Cada elemento* de la serie numérica debe ser una *unidad compuesta abstracta* anidada dentro de esa serie. Lo que quiero decir con esto es que un elemento de la serie, por ejemplo el número seis, contiene los registros de contar de 1 a 6 como una unidad abstracta de elementos. El número seis puede ser considerado tanto como "1" seis veces o como el resultado de haber contado los primeros seis elementos de la serie numérica. Una manera de pensar esto es que cada elemento de la serie numérica es una barra de un gráfico de frecuencias, que contiene su propio número de unidades (¡No me refiero a que es así como los niños imaginan los elementos de su SNE!). Un paso decisivo en este proceso de re-interiorización es el establecimiento del "uno" unidad abstracta como unidad *iterable*. El uno iterable es producto de aplicar repetidamente la operación de "un elemento más" al doble conteo. Cada vez que el niño cuenta crea un elemento más en la sub-secuencia (o intervalo anidado). Ésta es la re-interiorización de este "un elemento más" que resulta de una toma de conciencia de que, habiendo sobrecontado seis elementos, estos son seis unos.

Con un elemento de unidad iterable el niño puede acceder a un razonamiento parte-todo. El número seis puede pensarse como una colección de seis elementos, cualquier número de los cuales puede ser extraído de la unidad compuesta (*pulled out of*) de seis *sin destruir la unidad seis*. Tres está contenido en seis y puede ser comparado con la unidad seis. Un elemento iterable es producto de *operaciones reversibles*. "Seis" no sólo consiste en seis "unos", sino que cualquiera de esos seis "unos" puede ser iterado para recrear la unidad compuesta de seis.

Como un ejemplo de cómo los niños con una SNE pueden actuar en forma distinta de niños con sólo una SNT, considerar el siguiente problema: 1+1+1+1+1. Los niños que sólo tienen una SNT probablemente resolverán este problema por sumas sucesivas: 1+1 es 2; 2+1 es 3; 3+1 es 4; 4+1 es 5. Ellos tienen que *generar* las sumas anidadas, mientras que para los niños con SNE las sumas anidadas están implícitas y simplemente pueden ver el problema como cinco unos y saben que cinco unos son lo mismo que un cinco. Su concepto de número para el cinco es reversible.

Steffe (1994) ofrece el ejemplo de una niña con SNE, Johanna, quien podía operar con unidades compuestas en forma análoga a la que un niño con una SNT podría hacerlo con elementos como unidades abstractas simples. Johanna podía resolver problemas con unidades de unidades de tres como si fuera contando con ellas.

Ella había armado cuatro filas de tres a partir de 12 bloques y se le preguntó cuántas filas más de tres podría hacer si tuviera 27 bloques en total. Fue capaz de aplicar su doble conteo coordinando dos tipos diferentes de unidades, incorporando el resultado de su primera coordinación (cinco filas de tres a partir del complemento de 12 a 27) volviendo a su esquema de coordinación de unidades para continuar contando desde su unidad establecida previamente de cuatro filas de tres, para arribar a un total de nueve filas de tres. Esta aplicación recursiva de su esquema de unidades fue posible porque los elementos de su SNT fueron *re-interiorizados*, proporcionándole dos niveles de unidades abstractas (unidades simples y unidades compuestas) como herramienta de resolución. El proceso de re-interiorización es un proceso *recursivo*, y es este proceso recursivo el que produce el concepto reversible de número.

Otro ejemplo consiste en la construcción de sentidos en la división de partir y repartir. Cuando se les preguntó a niños con una SNT cuántos collares de cuatro podrían hacer a partir una caja de 24 bolitas (división con el sentido de repartir), pudieron contar de a cuatro hasta llegar a 24, manteniendo un seguimiento de sus cuatros hasta llegar al resultado. Sin embargo, cuando se les preguntó cuántas bolitas habría en cada uno de los seis collares armados con las 24 bolitas (significado de partir) tuvieron dificultades para conceptualizar el problema. A lo sumo podían hacer una estimación sobre cuántas bolitas iban en cada collar y luego usar su conjetura para *segmentar* la secuencia numérica de 1 a 24, en un intento de resolver el problema como de repartir. Los niños con una SNE podrían resolver el problema de repartir de la misma manera que el niño con sólo un SNT, pero podrían resolver el problema *partiendo* 24 en seis partes iguales. Ellos pueden hacerse una representación del problema como "¿cuántos seis me darán 24?". Incluso, pueden elegir un número e iterarlo seis veces hasta llegar a 24, pero partiendo de un sentido de la estructura resultante y esto hace más probable una solución. Sin embargo, el niño con una SNE, no sería capaz de resolver el problema de encontrar cuántos seis hay en 24. Esta solución *conmutativa* requiere todavía otra re-interiorización de la secuencia numérica.

Secuencia numérica generalizada (SNG o GNS en inglés)

Los niños con una SNE pueden crear esquemas multiplicativos que involucran dos niveles de unidades. Pueden formar unidades compuestas como elementos y utilizarlos como punto de partida para otras operaciones (contar, combinar, comparar, segmentar y repartir). Pueden formar un elemento compuesto por unidades compuestas como resultado de estas operaciones. Por ejemplo, el resultado de la combinación de seis grupos de 5 es una colección de seis elementos, cada uno de los cuales es un cinco. Pueden desarmar cada paquete de cinco para llegar a un resultado de 30 elementos unidad. Incluso pueden ver estas 30 unidades simples como una unidad compuesta de 30. Lo que no pueden hacer es tomar los seis grupos de cinco como una cosa que puede utilizarse como punto de partida para operar. Pueden *producir* unidades de unidades de unidades pero todavía no pueden simbolizarlas. Como se indicó anteriormente, en general pueden funcionar con unidades compuestas de manera similar a como lo hacen los niños que tienen sólo una SNT con unidades simples. Hace falta una re-interiorización de la secuencia numérica para que los resultados de estas operaciones con unidades compuestas se conviertan en insumos para otras operaciones. Esta re-interiorización de una SNE es lo que constituye una SNG.

Esta re-interiorización de los resultados de la ENS en *unidades compuestas iterables* se produce de la misma forma como la re-interiorización de la SNT resulta en "unos" iterables. Con una unidad iterable compuesta de cuatro, digamos, un niño puede concebir seis veces "cuatro" como el equivalente a una unidad compuesta de seis *unidades* de cuatro elementos unitarios en cada una, que son seis "unos". Los "unos" en la unidad compuesta de seis se han convertido en lugares que pueden ser ocupados por cualquier tipo de unidades (simples o compuestas). El ejemplo anterior de Johanna muestra la manera en que esta interiorización puede producirse a través de aplicaciones recursivas de operaciones de coordinación de unidades a los resultados de esas operaciones: unidades compuestas abstractas. Así como el uno iterable fue la abstracción de la aplicación repetida de la operación "uno más" en el conteo doble de a uno, la *unidad compuesta iterable* es el resultado de la abstracción de la aplicación repetida de los "un cuatro más" (digamos) cuando se hace un doble conteo de a cuatro. Los niños con una SNG pueden comenzar a construir estructuras exponenciales. También pueden coordinar al menos tres niveles diferentes de unidades. Mientras que los niños que sólo tienen una SNE muy probablemente estarán trabajando con notación de valor posicional del orden de cientos (y posiblemente miles), experimentarán dificultad para explicar las relaciones numéricas involucradas en el sistema posicional. Los niños con una SNG pueden demostrar explícitamente estas relaciones de posición y extrapolar a más y más altos exponentes de la base.

Podemos ver un ejemplo del poder estratégico que proporciona una SNG en la construcción de Nathan de un procedimiento para encontrar el múltiplo común menor (mcm o LCM en inglés) de dos números. Esta construcción tuvo lugar en el tercer grado de Nathan durante su trabajo con el proyecto de fracciones[1]. Nathan no tenía como meta encontrar el mcm de dos números. El mcm no fue mencionado en ninguno de nuestros episodios de enseñanza con él. Yo lo utilizo sólo para dar un nombre abreviado para el procedimiento de Nathan.

El objetivo de Nathan era encontrar una forma de partir una barra de chocolate (en Microworld TIMA: Bars, Olive y Steffe, 1994) que le permitiera sacar tanto un tercio como una quinta parte de la misma. Su procedimiento fue contar de a tres y de a cinco hasta que encontró un número común en las secuencias. Pensaría para sí mismo de la siguiente manera: 3, 6; 5, 10; 9, 12, 15; 15. Es 15. Entonces dividió en 15 partes su barra, sacó cinco para un tercio y tres para un quinto. Fue capaz de coordinar y comparar sus dos secuencias de múltiplos hasta hallar un múltiplo común, pero también sabía cuántos de cada uno había usado para llegar a este múltiplo común; él guardó registro de cada secuencia. Pudo llevar a cabo estas coordinaciones porque “tres” y “cinco” estaban a su disposición como *unidades compuestas iterables*.

Al año siguiente Nathan pudo usar su conocimiento de los factores para obtener un resultado similar de una forma más eficaz: en una tarea más complicada en la que se pidió a los niños que obtuvieran una fracción de una barra a partir de otra fracción (por ejemplo, encontrar un noveno a partir de un doceavo de la barra unidad), Nathan finalmente pudo partir un doceavo en tres para hacer 36avos. Sabía que funcionaría porque “ambos 9 y 12 llegan a 36… cuatro nueves son 36 y tres de doce son 36, entonces cuatro de esos serán 1/9”. Así como pareció Nathan tan potente en estos ejemplos, tuvo limitaciones en sus operaciones con fracciones que sugirieron la necesidad de construir otra acomodación más allá de la SNG para superar esas dificultades.

Los números racionales en aritmética

El ejemplo dado en la última sección de obtener una fracción a partir de una fracción diferente no era una tarea fácil de lograr por los dos jóvenes (Arthur y Nathan) que recibieron la misma. Aunque estábamos convencidos por sus acciones previas, de que habían construido una secuencia numérica generalizada, a Nathan le demandó cuatro episodios de enseñanza a lo largo de un mes construir un esquema que podía utilizar para resolver tales problemas. Para Arthur, vencer esa dificultad tomó mucho más tiempo.

Un obstáculo que encontraron consistió en nombrar una fracción de una fracción como una nueva fracción. Podían fabricar y anticipar “un quinto de un quinto” pero no conocían su valor como fracción única. Con el fin de establecer su valor tuvieron que iterar/repetir el resultado 25 veces para reproducir la barra unidad. Entonces supieron que el resultado era 1/25. Sus operaciones para hallar la fracción de una fracción, aunque de naturaleza recursiva, no eran aún *reversibles*.

Con el tiempo, desarrollaron la habilidad de proyectar mentalmente la partición en tres partes iguales, por ejemplo, de un doceavo, en cada una de las 12 doceavas partes de la unidad para establecer el valor de un tercio de un doceavo como 1/36. ¿La simbolización de este procedimiento constituiría una re-interiorización de sus SNG *hacia dentro* (*inward*) en lugar de hacia afuera lo que proporciona estructuras exponenciales? Es decir, ¿en lugar de producir unidades de unidades de unidades, ellos podrían producir unidades *dentro* de unidades *dentro* de una unidad? ¿Y es esa re-interiorización *hacia el interior* la necesaria acomodación de la SNG que generará N**úmeros Racionales en Aritmética**? Las respuestas a estas importantes cuestiones se han publicado en un artículo (Olive, 1999) y aún se están desarrollando en nuestra investigación en curso. Nuestros resultados actuales indican que el trayecto desde la Secuencia Numérica Aritmética de los Números Racionales es largo y complejo.

Implica una re-interiorización hacia el interior que produce unidades dentro de las unidades dentro de una unidad, pero en el camino hacia la reestructuración, los niños necesitan desarrollar los siguientes esquemas y operaciones:

- Un *Esquema de Unidad Compuesta de Fracción* (*Unit Fraction Composition Scheme*) para establecer fracción unitaria de una fracción unitaria, como se indicó arriba.
- Un *Esquema de Composición de la Fracción (Fraction Composition Scheme)* para encontrar cualquier fracción de cualquier otra (por ejemplo 2/3 de 3/5 de una unidad)
- Un esquema para el establecimiento de *fracciones como unidades de medida (fractions as measurement units)* por lo que preguntas como "¿qué parte de 3/4 es 1/8?" tienen sentido y pueden ser contestadas.
- Una unidad común de medición para fracciones (*Co-measurement unit for*

fractions) de modo que las fracciones puedan simplificarse y cualquier fracción puede ser generada por cualquier otra.

Cuando los niños han logrado construir fracciones como unidades de medida tienen la posibilidad de encontrar cualquier fracción desde cualquier otra buscando una unidad de *medida común* a las dos fracciones. Desde la perspectiva de un matemático es justamente esa posibilidad la que genera la propiedad de cierre en el campo de los números racionales. Al final de su quinto año Nathan y Arthur eran capaces de hacer comparaciones con razones entre fracciones y crear cualquier fracción a partir de cualquier otra.

Implicaciones para la práctica

En mis cursos sobre pensamiento matemático infantil para maestros de primaria en formación y en servicio he comprobado que una breve introducción a los aspectos distintivos de estas secuencias numéricas les ayuda a dar sentido a las dificultades que perciben en el aprendizaje de la matemática de los niños en la escuela. El uso de videos que muestran ejemplos de nuestros proyectos de investigación y la experiencia práctica con nuestras herramientas informáticas han ayudado a dar vida a estas ideas teóricas. Tan solo con una comprensión rudimentaria de las diferencias en el pensamiento matemático de los niños representadas en estos modelos hipotéticos, estos estudiantes y maestros han sido capaces de reconocer diferentes niveles de pensamiento al trabajar con niños pequeños, a través de actividades de conteo y, así, planificar actividades más apropiadas para ellos.

En lugar de instar a los niños a que abandonen sus actividades de conteo ni bien comienzan a aprender sus "hechos básicos aditivos" ("basic addition facts"), nuestra investigación indica que debemos animarlos a construir sobre estas actividades de conteo sus propias estrategias más sofisticadas de conteo que darán lugar a modificaciones en sus secuencias numéricas.

Después de todo, si tomamos en serio a los niños como matemáticos, debemos valorar sus formas y sentidos de hacer matemática, y usar esas formas y sentidos para fomentar el avance de su pensamiento matemático. Desde la toma de conciencia de que la actividad numérica de los niños está limitada por su disponibilidad de secuencias numéricas, podremos fomentar mejor ese crecimiento.

Bibliografía

Kieren, T. E. & Pirie, S. E. B. (1991). Recursion and the mathematical experience. In L. P. Steffe (Ed.) *Epistemological foundations of mathematical experience.* New York: Springer-Verlag, 78-101.

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 279-314.

Olive, J. & Steffe, L. P. (1995). *TIMA: Bars* (computer program). Acton, MA: William K. Bradford Publishing Company.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* New York: SUNY Press.

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer-Verlag.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application.* New York: Praeger.

von Glasersfeld, E. (1980). The concept of equilibration in a constructivist theory of knowledge. In F. Bensler, P. M. Hejl, & W. K. Kock (Eds.), *Autopoiesis, communication, and society* (pp. 75-85). Frankfurt: Campus Verlag.

von Glasersfeld, E. (1995). Sensory experience, abstraction, and teaching. In L. P. Steffe and J. Gale (Eds.) *Constructivism in Education,* (pp. 369-383). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[1] Children's Construction of the Rational Numbers of Arithmetic, NSF Project No. RED-8954678, co-directed by Leslie P. Steffe and John Olive. 1991-1995.