Este problema se hizo en una reunión del **Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática**:

APROXIMADAMENTE, ¿CUÁNTOS DÍGITOS HAY EN LA RESPUESTA A LA MULTIPLICACIÓN:
20 x 21 x 22 x 23 x 24 x 25 x 26 x 27 x 28 x 29 x 30?

Se citan ejemplos de las respuestas dadas.

Rocío: hace 23 x 27, 24 x 26, 22 x 28, 21 x 29 sacando como conclusión que los números cuyas unidades sumaban 10, al multiplicarse, aumentaban en 3 el número de cifras, por lo cual da por respuesta 15 cifras.

Oscar: tomó lo de Rocío y trabajó:

24x26= (30-6)(30-4) = 900 - (6+4).30 + 6x4= 600 +24
23x27= (30-7)(30-3) = 900 – (7+3).30 +7x3 = 600 + 21
y así siguiendo con 22 x 28, 21 x 20 y 20 x 30 esto daría 600^5 aproximadamente lo que se desdobla en 6^5. 10^{10} dando cerca de 10^4. 10^{10} o sea 14 cifras.

Maro: tomó grupos de 5 factores haciendo una aproximación a 20^5 (lo que le da 3.200.000), pero no completó su idea.

Adri: usó la calculadora haciendo 2010 y le dio 14 dígitos; 3010 le dio 15 dígitos; 2510, etc. buscando una aproximación. Entonces aproxima el producto dado a 2510 que debe tener entre 14 y 15 dígitos.

Pato: usó factorial haciendo 30! dividido 19!.. (30x29x28x27x….x1): (19x18x17x…x1) con la calculadora y le dio un número de 14 cifras.

Oscar: pensó que convenía trabajar con la suma de logaritmos ya que la característica del logaritmo de un número da el número de cifras enteras que posee ese número menos 1.

Por ejemplo, sabía de memoria que el logaritmo de 2 es 0,13, luego el de 20 iba a ser 1,30 (por tener dos cifras enteras). Así estimó 1,30 x 10 (veces que aparece el 20…) y obtuvo 13 cifras y luego le sumó 1 más del logaritmo de 30= 1,477. Total: aproximadamente 14 cifras.

Revisando: $\log_{10} (\Pi_{n=20}^{30}\ n) = \log_{10} 20 + \log_{10} 21 + \ldots + \log_{10} 29 + \log_{10} 30 = 15{,}338565$
La cantidad de cifras es la característica (15) más 1, o sea 16 cifras.

Ana: agrupó en grupos de 20 x 20 desestimando las unidades, eso da 400^5 x 30 y eso se puede expresar como 4^5 x 100^5 x 30 = 4^5 x 10^{10} x 30 lo que da aproximadamente 1000 x 10^{10} x 30 y eso lleva a unas 14 cifras.

Avanzamos entre todos:

$20\times21\times22\times23\times24\times25\times26\times27\times28\times29\times30$ =

= $(25-5)\times(25-4)\times(25-3)\times(25-2)\times(25-1)\times25\times(25+1)\times(25+2)\times(25+3)\times(25+4)\times(25+5)$ =

= $25\times[(25-5)\times(25+5)]\times[(25-4)\times(25+4)]\times[(25-3)\times(25+3)]\times[(25-2)\times(25+2)]\times[(25-1)\times(25+1)]$ =

= $25\times[25^2 - 5^2]\times[25^2 - 4^2]\times[25^2 - 3^2]\times[25^2 - 2^2]\times[25^2 - 1^2]$

Dado que $25^2 = 625$ es mucho mayor que 5^2 (y obviamente que 4^2, 3^2, 2^2 o 1) despreciamos estos valores y aproximamos:

= $25\times[25^2 - 5^2]\times[25 - 4^2]\times[25^2 - 3^2]\times[25^2 - 2^2]\times[25^2 - 1\text{^}^2] \approx$

$\approx 25\times25^2\times25^2\times25^2\times25^2\times25^2 = 25\times(25)^{10} = 25\times(100/4)^{10}$ =

= $25\times100^{10}/4^{10} = 25\times10^{20}/2^{20}$

Pero $2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 \approx (10^3)^2 = 10^6$

Y finalmente:

= $25\times10^{20}/2^{20} \approx 25\times10^{20}/10^6 = 25\times10^{14}$

¡O sea 16 cifras significativas!

En este caso, el error con respecto al valor exacto es menor que el 13 %.

Resultado exacto:

$$20 \text{ x } 21 \text{ x } 22 \text{ x}\ldots\text{x } 28 \text{ x } 29 \text{ x } 30 = \prod_{n=20}^{30} n = 2.180.547.008.640.000$$

O sea que el resultado exacto tiene 16 cifras.