

# AVENTURAS MATEMÁTICAS

Dr. Leandro Cagliero

Dr. Daniel Penazzi

Dr. Juan Pablo Rossetti

Lic. Ana Sustar

Dr. Paulo Tiraó



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

---

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

# AVENTURAS MATEMÁTICAS

Dr. Leandro Cagliero, Dr. Daniel Penazzi, Dr. Juan P. Rossetti,  
Lic. Ana Sustar y Dr. Paulo Tirao

## ADVERTENCIA

La habilitación de las direcciones electrónicas y dominios de la web asociados, citados en este libro, debe ser considerada vigente para su acceso, a la fecha de edición de la presente publicación. Los eventuales cambios, en razón de la caducidad, transferencia de dominio, modificaciones y/o alteraciones de contenidos y su uso para otros propósitos, queda fuera de las previsiones de la presente edición -Por lo tanto, las direcciones electrónicas mencionadas en este libro, deben ser descartadas o consideradas, en este contexto-.

---

Distribución de carácter gratuito.

---

## a u t o r i d a d e s

---

PRESIDENTE DE LA NACIÓN

**Dra. Cristina Fernández de Kirchner**

MINISTRO DE EDUCACIÓN

**Dr. Alberto E. Sileoni**

SECRETARIA DE EDUCACIÓN

**Prof. María Inés Abrile de Vollmer**

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

**Lic. María Rosa Almandoz**

DIRECTOR NACIONAL DEL CENTRO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

**Lic. Juan Manuel Kirschenbaum**

DIRECTOR NACIONAL DE EDUCACIÓN TÉCNICO PROFESIONAL Y  
OCUPACIONAL

**Ing. Roberto Díaz**

Ministerio de Educación.  
Instituto Nacional de Educación Tecnológica.  
Saavedra 789. C1229ACE.  
Ciudad Autónoma de Buenos Aires.  
República Argentina.  
2010

---

# AVENTURAS MATEMÁTICAS

Dr. Leandro Cagliero

Dr. Daniel Penazzi

Dr. Juan Pablo Rossetti

Lic. Ana Sustar

Dr. Paulo Tirao



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática”.  
Director de la Colección: Juan Manuel Kirschenbaum  
Coordinadora general de la Colección: Haydeé Noceti.

Queda hecho el depósito que previene la ley N° 11.723. © Todos los derechos reservados por el Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

La reproducción total o parcial, en forma idéntica o modificada por cualquier medio mecánico o electrónico incluyendo fotocopia, grabación o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información no autorizada en forma expresa por el editor, viola derechos reservados.

Industria Argentina

ISBN 978-950-00-0775-7

**Director de la Colección:**  
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum  
**Coordinadora general y académica de la Colección:**  
Prof. Ing. Haydeé Noceti  
**Diseño didáctico y corrección de estilo:**  
Lic. María Inés Narvaja  
Ing. Alejandra Santos  
**Coordinación y producción gráfica:**  
Tomás Ahumada  
**Diseño gráfico:**  
Martin Alejandro Gonzalez  
**Ilustraciones:**  
Diego Gonzalo Ferreyro  
Victoria Rossetti (Capítulo 3)  
Federico Timerman  
**Retoques fotográficos:**  
Roberto Sobrado  
**Diseño de tapa:**  
Tomás Ahumada  
**Administración:**  
Cristina Caratozzolo  
Néstor Hergenrether  
**Colaboración:**  
Téc. Op. en Psic. Soc. Cecilia L. Vazquez  
Dra. Stella Maris Quiroga  
Nuestro agradecimiento al personal del Centro Nacional de Educación Tecnológica por su colaboración.

Juan Pablo Rossetti  
Aventuras matemáticas / Juan Pablo Rossetti, Leandro Cagliero... [et.al.]; dirigido por Juan Manuel Kirschenbaum.  
- 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2009.  
216 p.: il.; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / Juan Manuel Kirschenbaum.)

ISBN 978-950-00-0775-7

1. Matemática.
  2. Enseñanza Secundaria.
  3. Libros de Texto.
- I. Cagliero, Leandro  
II. Kirschenbaum, Juan Manuel, dir.

CDD 510.71 2

Fecha de catalogación: 15/04/2010

Impreso en Artes Gráficas Rioplatense S. A., Corrales 1393 (C1437GLE), Buenos Aires, Argentina.

Tirada de esta edición: 100.000 ejemplares



## Los Autores



### *Dr. Leandro Cagliero*

Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba y Profesor en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de esa universidad e investigador del CONICET. Fue becario externo del CONICET. Realizó un posdoctorado en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Actualmente es investigador en el área de representaciones de grupos de Lie y álgebra homológica. Ha publicado artículos científicos en revistas internacionales sobre estos temas. Dirige alumnos de doctorado, maestría y licenciatura. Realiza actividades de divulgación y apoyo a la enseñanza de la matemática en el nivel medio. Es colaborador desde 1990 de la Olimpiada Matemática Argentina, en la cual se ha desempeñado, en diversas oportunidades como jurado. Está casado y tiene tres hijos.



### *Dr. Daniel Penazzi*

Se graduó de Doctor en Matemática (Ph.D. in Mathematics) en la Universidad de Minnesota (EE. UU). Previamente se graduó de Licenciado en Matemática en la Universidad Nacional de Córdoba. Es Profesor Adjunto en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba. Ha dictado numerosos cursos en áreas diversas como Criptografía, Combinatoria, Álgebra, Análisis, Teoría de Grafos, Algoritmos de Flujos sobre Redes, Teoría de Complejidad Algorítmica, Teoría de Códigos y Dinámica Topológica. Ha publicado diversos artículos en las áreas de Dinámica Topológica, Combinatoria Algebraica y Criptografía. Ha dirigido 6 trabajos finales en áreas de Criptografía, Combinatoria y Teoría de Grafos. En el aspecto personal, está casado y tiene una hija, una perra, un perro, dos gatas y un gato.



### *Dr. Juan Pablo Rossetti*

Es profesor en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, donde obtuvo los títulos de Licenciado y Doctor en Matemática. Es investigador del CONICET. Realizó estudios posdoctorales en EE. UU, con beca externa del CONICET y con beca de la fundación Guggenheim. En la Universidad de Princeton trabajó con el gran matemático John Horton Conway. Fue profesor visitante por un año en la Universidad Humboldt en Berlín. Sus temas de interés son la geometría de los grupos cristalográficos, la geometría espectral inversa y los retículos en espacios euclídeos. También se ha interesado por la matemática recreativa, colaborando con las Olimpiadas Matemáticas y la Competencia Paenza.



### *Lic. Ana Sustar*

Obtuvo el título de Profesora de Matemática, Física y Cosmografía; otorgado por el Instituto Nacional de Enseñanza Superior (INES), Córdoba. Es Licenciada en Matemática de la Facultad de Matemática Astronomía y Física, (FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba). Actualmente realiza el Doctorado en Matemática en FaMAF con beca doctoral de la Secretaría de Ciencia y Técnica, (SECyT) UNC, y es profesora de nivel medio en el Instituto "Academia Argüello" en Córdoba. Sus temas de interés son la combinatoria y el álgebra.



### *Dr. Paulo Tirao*

Recibió el título de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba y es Profesor en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de esa universidad e investigador del CONICET. Luego de graduarse pasó un período como posdoc en el International Centre for Theoretical Physics en Trieste, Italia, con una beca de la UNESCO y otro período en la Universidad de Düsseldorf, Alemania, con una beca externa del CONICET para regresar a Córdoba en el año 2000. Fue becario de la Fundación Alexander von Humboldt en Alemania. Sus intereses e investigación se desarrollan dentro del álgebra y la geometría diferencial en temas de la Teoría de Lie, álgebra homológica y teoría de grupos. Dirige a alumnos de doctorado, maestría y licenciatura y además de las tareas de docencia de grado y posgrado en la universidad realiza actividades de divulgación y apoyo a la enseñanza de la matemática en el nivel medio.

Introducción	8
--------------	---

## Capítulo 1

Los maravillosos números primos <i>por Leandro Cagliero</i>	10
---	----

- 1.1. Los números naturales, cimientos de la matemática 11
- 1.2. La irreductibilidad en las ciencias 14
- 1.3. Primera etapa de la historia de los números primos 18
- 1.4. Teoremas básicos sobre los números primos 23
- 1.5. ¿Cómo se determinan los factores primos de un número dado? 30
- 1.6. ¿Cuáles son todos los números primos? 39

## Capítulo 2

Contar sin enumerar <i>por Ana Sustar</i>	46
---	----

- 2.1. Introducción 45
- 2.2. Los principios de adición y multiplicación 49
- 2.3. Permutaciones y arreglos 52
- 2.4. Combinaciones y los números combinatorios 54
- 2.5. Conjuntos con repetición 64
- 2.6. El Principio de Inclusión-Exclusión 67
- 2.6. Apéndice: El principio del palomar 76

## Capítulo 3

Una Aventura por el Infinito <i>por Juan Pablo Rossetti</i>	82
---	----

- 3.1. ¿Qué es el infinito? 82
  - 3.2. Hotel Hilbert 92
  - 3.3. La paradoja de Aquiles y la tortuga 95
  - 3.4. Sumas infinitas 100
  - 3.5. La serie geométrica y la serie armónica 103
  - 3.6. ¡Los números racionales son numerables! ...y los reales? 103
  - 3.7. ¡Los números reales no son numerales! 114
-

• 3.8 El método de la diagonal de Cantor	119
• 3.9 ¡Hay infinitos tipos de infinito!	123
<b>Capítulo 4</b>	
<b>La aritmética de los relojes</b> <i>por Paulo Tirao</i>	131
• 4.1 Introducción	131
• 4.2 La aritmética del reloj	133
• 4.3 Los enteros módulo $m$	135
• 4.4 La aritmética modular	144
• 4.5 Aplicaciones a la aritmética entera	148
• 4.6 Las reglas de divisibilidad	151
• 4.7 Ecuaciones lineales en la aritmética modular	153
• 4.8 Residuos cuadráticos	157
• 4.9 Los códigos de Julio César	160
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Criptografía</b> <i>por Daniel Penazzi</i>	163
• 5.1 Introducción	163
• 5.2 Primera ley de la criptografía. Sistema César	164
• 5.3 Sistema Playfair	172
• 5.4 El cifre (supuestamente) indescifrable	174
• 5.5 Un poco de historia moderna	187
• 5.6 Clave pública, clave privada	199
• 5.7 RSA	201
• 5.8 Apéndice: ¿Cómo calcular $1/a \bmod p$ ?	204
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Soluciones de los ejercicios</b>	206
<b>Bibliografía y Referencias</b>	216

---