

¿Cuántas bolitas de cada clase para que la probabilidad sea 1/3?

Oscar Bressan

A mi sobrino le dieron el siguiente problema:

De un bolillero que tiene bolitas negras y rojas se extrae una bolita roja. Luego se duplica la cantidad de bolitas negras. ¿Cuántas bolitas debe haber para que la probabilidad del resultado sea 1/3?



Solucion...es

Todos los problemas matemáticos (y también los no matemáticos) deben enunciarse sin ambigüedades a fin de que tengan una interpretación única y eviten confusiones sobre cómo deben tratarse. Este enunciado puede ser interpretado de tres modos diferentes y cada alternativa va a tener un resultado diferente.

Primera interpretación: de un bolillero que tiene bolitas negras y rojas se extrae una bolita roja **que no se repone en el bolillero**. Luego se duplica la cantidad de bolitas negras. ¿Cuántas bolitas debe haber para que la probabilidad de sacar una bolita negra sea 1/3?

Solución: para que sea 1/3 la probabilidad de sacar una negra tiene que haber en el bolillero (en el momento de extraerla) el doble de bolitas rojas que de bolitas negras (o sea 2/3 de bolitas rojas y 1/3 de bolitas negras).

Esto puede pasar de infinitos modos posibles. Por ejemplo en el bolillero tenemos:

Originalmente: 13 bolitas rojas y 3 negras

Extraemos una roja: 12 bolitas rojas y 3 negras

Duplicamos las negras: 12 bolitas rojas y 6 negras

y ahora la probabilidad de extraer una negra es 1/3:

$$P(\text{negra}) = 6 / (12 + 6) = 6 / 18 = 1/3$$

Un ejemplo alternativo sería que en bolillero tengamos:

Originalmente: 21 bolitas rojas y 5 negras

Extraemos una roja: 20 bolitas rojas y 5 negras

Duplicamos las negras: 20 bolitas rojas y 10 negras

y ahora la probabilidad de extraer una negra es 1/3:

$$P(\text{negra}) = 10 / (20 + 10) = 10 / 30 = 1/3$$

En resumen, si tengo originalmente “n” bolitas negras tengo que tener “4 n + 1” bolitas rojas, para que después de sacar la roja y duplicar las negras tenga una probabilidad igual a 1/3 de sacar una negra.

Segunda interpretación: de un bolillero que tiene bolitas negras y rojas, se extrae una bolita roja **que se repone en el bolillero**. Luego se duplica la cantidad de bolitas negras. ¿Cuántas bolitas debe haber para que la probabilidad de sacar una bolita negra sea 1/3?

Solución: en este caso si tengo originalmente “n” bolitas negras tengo que tener “4 n” bolitas rojas, para que al duplicar las negras tenga una probabilidad de 1/3 de sacar una negra. Por ejemplo, podría tener

originalmente 12 rojas y 3 negras. Saco una roja y la devuelvo al bolillero y duplico la cantidad de negras, con lo cual hay 12 rojas y 6 negras. La probabilidad de sacar una negra es:

$$P(\text{negra}) = 6 / (12 + 6) = 6 / 18 = 1/3$$

Tercera interpretación: de un bolillero que tiene bolitas negras y rojas se extrae una bolita roja **que no se devuelve al bolillero**. Posteriormente se **duplica la cantidad de bolitas negras** y se extrae **otra bolita** que resulta ser negra. ¿Qué cantidad de bolitas de uno y otro color debo tener para que sea 1/3 la probabilidad de haber obtenido estos resultados (es decir, que sea 1/3 la probabilidad de extraer una bolita roja primero y una negra después)?

Solución: En un comienzo tenemos “n” bolitas rojas y “m” negras. La probabilidad de extraer la bolita roja es entonces:

$$P(\text{roja}) = n/(n + m)$$

Después de extraer la bolita roja me quedan en el bolillero **n-1** bolitas rojas y al duplicar las negras tendré **2xm** bolitas negras, con lo cual la probabilidad de extraer una negra será:

$$P(\text{negra}) = 2 \times m / (n - 1 + 2 \times m)$$

$$P(\text{negra}) = \frac{2 \times m}{n - 1 + 2 \times m}$$

La probabilidad de que ocurran estas dos cosas **es el producto de las dos probabilidades:**

$$P(\text{primero roja y luego negra}) = \frac{n}{(n+m)} \times \frac{(2 \times m)}{(n-1+2 \times m)}$$

$$P(\text{primero roja y después negra}) = \frac{n \times (2 \times m)}{(n+m) \times (n-1+2 \times m)}$$

Y esta probabilidad debe ser igual a 1/3, o sea que tendremos:

$$\frac{n \times (2 \times m)}{(n+m) \times (n-1+2 \times m)} = \frac{1}{3}$$

Operando llegamos a:

$$6 * n * m = (n + m) * (n - 1 * 2 * m)$$

Tanto n como m deben ser números naturales, y este tipo de problemas se llaman “diofánticos” y, en general, son muy difíciles de resolver. Pero probando se encuentra que existen dos soluciones. Una es que n sea igual a 1 y m igual a 2 (al principio una roja y dos negras en el bolillero):

$$\frac{n * (2 * m)}{(n + m) * (n - 1 + 2 * m)} = \frac{1 * (2 * 2)}{(1 + 2) * (1 - 1 + 2 * 2)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

cuya solución es justamente 1/3.

Otra solución es que n sea igual a 6 y m igual a 2 (al principio seis rojas y dos negras en el bolillero):

$$\frac{n * (2 * m)}{(n + m) * (n - 1 + 2 * m)} = \frac{6 * (2 * 2)}{(6 + 2) * (6 - 1 + 2 * 2)} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

Y nuevamente la solución es 1/3. No existe ninguna otra solución por lo menos para n y m menores que 500.

Si lo miramos paso a paso en este segundo ejemplo tendremos que la probabilidad de sacar la bolita roja es:

$$P(\text{roja}) = n / (n+m) = 6 / (6+2) = 6 / 8 = 3 / 4$$

La probabilidad de sacar la bolita negra (después de sacar la roja y duplicar las negras) es:

$$P(\text{negra}) = 2 * m / (n - 1 + 2 * m) = 2 * 2 / (6 - 1 + 2 * 2) = 4 / 9$$

y el producto de las probabilidades es:

$$P(\text{roja}) * P(\text{negra}) = (3/4) * (4/9) = (3 * 4) / (4 * 9) = 1/3$$

Cuarta interpretación: Sean las mismas condiciones que la tercera interpretación, pero con la bolita roja devolviéndola al bolillero. Las variaciones son sencillas y lo dejamos como ejercicio.

¡Y eso es todo!