LA IMPORTANCIA DE QUÉ ES DEMOSTRAR EN MATEMÁTICA

(PARA DISCUTIR EN CLASE CON LOS ALUMNOS)

AUTORA: Adriana Rabino, GPDM

Un teorema es una propiedad matemática que se puede demostrar, a diferencia de un postulado o axioma (que se acepta su veracidad tal como es). Para demostrar un teorema en general se utilizan métodos y propiedades matemáticas válidas, ya sea porque son postulados o axiomas, o porque son otros teoremas ya demostrados.

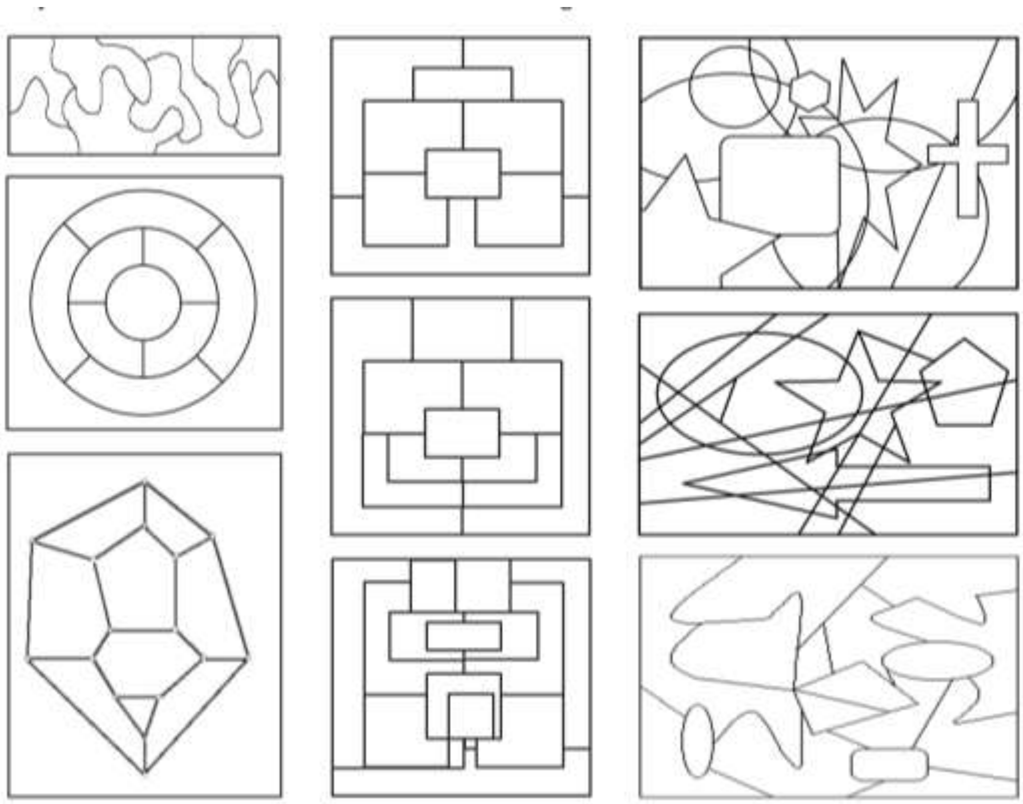
Pero, ¿hasta dónde es rigurosa una demostración matemática? ¿Cuándo una demostración se acepta como tal?

Vamos a trabajar algunos ejemplos de demostraciones y después discutiremos si son válidas o no y por qué.

1. ***USANDO LA COMPUTADORA***

El teorema de los cuatro colores

Intenta colorear las regiones de cada imagen con solo cuatro colores de tal manera que ninguna región vecina con otra tenga el mismo color, asumiendo que las regiones adyacentes comparten no solo un punto, sino un segmento de borde (frontera) en común.



Teorema: dado cualquier *mapa* geográfico con regiones continuas, puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones *adyacentes* con el mismo color. https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_colores

En primer lugar, todas las esquinas y puntos en común que pertenecen a tres o más regiones, deben ser ignoradas.

En segundo lugar, las regiones deben ser continuas.

El teorema de los cuatro colores surgió como conjetura (*¿qué es una conjetura*?). En 1852, Francis Guthrie era un estudiante de Augustus De Morgan y formuló esa conjetura, que no pudo ser probada por Guthrie, ni por su hermano Frederick, que había sido también estudiante de De Morgan, ni por Sir William Rowan Hamilton, a quien De Morgan le escribió formulando la conjetura.

En 1879 Alfred Bray Kempe anunció en la revista Nature que tenía una demostración para la conjetura. En 1890, Percy John Heawood encontró un error en la demostración de Kempe.

En 1976 la conjetura tuvo demostración, gracias a Kenneth Appel y Wolfgang Haken, que utilizaron una computadora para la demostración, lo cual generó múltiples controversias en el ambiente matemático. *¿Por qué habrá sido*?

2. *CASOS PARTICULARES*

¿Qué sucede si se prueba con casos particulares (aunque sean muchos) para saber si una propiedad es válida?

Hay un teorema (ya demostrado) que dice:

Existen infinitos números primos.

Veamos la siguiente conjetura:

La fórmula "generadora" de números primos es:

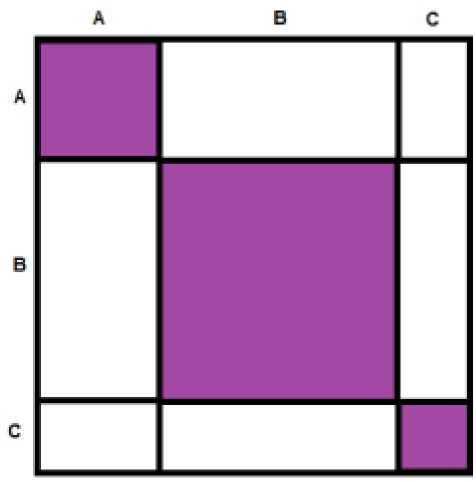
a) $p = n^2 - n + 11$.
b) $p = n^2 - n + 41$
c) $p = n^2 - 79n + 1601$.

¿Estás seguro que sirve para generar todos los números primos?

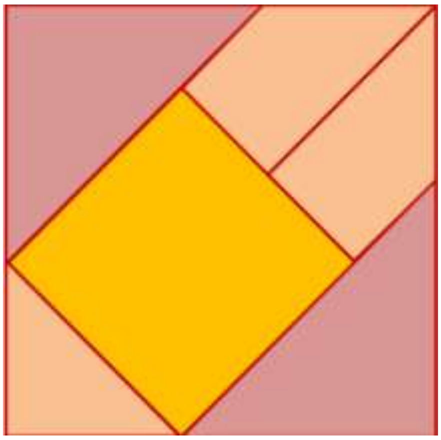
3. DEMOSTRACIONES VISUALES

¿Qué son las "demostraciones sin palabras"? Generalmente son dibujos o diagramas que ayudan al lector a *ver* por qué una proposición matemática en particular puede ser verdadera, así como también para ver *cómo* uno puede empezar a demostrar que es verdadera. *¿Son realmente demostraciones matemáticamente rigurosas*?

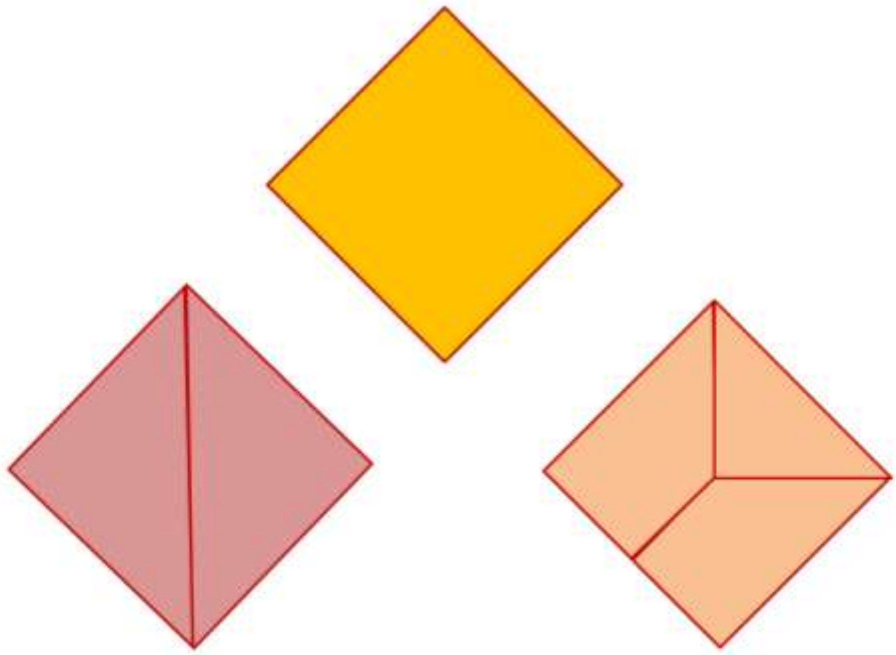
Veamos el siguiente ejemplo y después discutimos.
¿Qué te sugiere este dibujo?



4. LAS APARIENCIAS ENGAÑAN



Pareciera que se puede disecar un cuadrado en 5 piezas de tal manera que se pueden ensamblar para formar 3 cuadrados menores. Probar si es cierto. (Ayuda: usar el Teorema de Pitágoras).



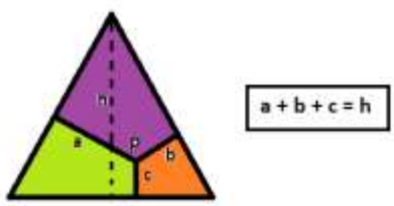
(Problema extraído de http://donsteward.blogspot.com.ar/2010_12_01_archive.html)

5. ***DEMOSTRACIONES RIGUROSAS***

Teorema de Viviani

Un surfista se encuentra viviendo en una isla con forma de triángulo equilátero. Quiere construir una cabaña de tal manera que las distancias a cada una de las costas sean mínimas, ya que le gusta surfear en las tres costas por igual. Se sorprenderá al ver que es indistinto el lugar donde construya su cabaña.

Este es el enunciado del **teorema** que se denomina de **Viviani** en honor al matemático y científico florentino Vincenzo Viviani, contemporáneo de Galileo Galilei (quien lo contrató como su colaborador por su talento).



Teorema: desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero, trazar los tres segmentos perpendiculares a cada lado del triángulo. Independientemente de dónde esté ubicado el punto, la suma de las distancias del punto a cada uno de los lados es constante e igual a la altura del triángulo (Viviani, Florencia, 1659).

¡A demostrarlo!

El teorema se puede extender a polígonos equiláteros y polígonos equiangulares. Específicamente, la suma de las distancias desde un punto hasta los lados de un polígono equilátero o equiangular no depende del punto.

RESPUESTAS PARA EL DOCENTE

1. ***USANDO LA COMPUTADORA***

La polémica demostración del teorema de los cuatro colores.

El teorema de cuatro colores fue demostrado con la ayuda de una computadora. Sin embargo, la demostración no es aceptada por todos los matemáticos dado que sería impracticable por su gran cantidad de detalles, de manera que una persona se vería imposibilitada para verificarlo manualmente. Solo queda aceptar la exactitud del programa, del compilador y del computador en el cual se ejecutó la prueba.

Otro aspecto de la demostración que puede ser considerado negativo, es su falta de elegancia. Una crítica que habla sobre la elegancia de la misma, comentada en la época de su publicación, dice:

«*Una buena prueba matemática es similar a un ´poema´— ¡pero esto es una guía telefónica!*»

En la actualidad se realizó otra demostración, también haciendo uso de cálculos por ordenador, lo cual verifica la prueba original; pero sigue sin existir una demostración matemática (https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_colores).

2. ***CASOS PARTICULARES***

Es muy común que los alumnos, para "demostrar" una propiedad, prueben con algunos casos particulares que, en general, son números chicos. Seguramente se apresuran a decir que la propiedad es válida si "sirve" para 3 o 4 o… 10 casos. Algunos se aventuran a probar más números y más grandes pero muchas veces se "conforman con poco" y lo dan por cierto.

El contraejemplo que se da de los números primos es muy representativo de este problema, ya que muchos números "n" funcionan para generar primos con estas fórmulas pero en algún momento empiezan a generar números compuestos. En definitiva, estas fórmulas no sirven para este propósito. (En a y b, probar con n= 11; en c probar con n = 80)

Entonces es importante destacar el valor de esta investigación matemática, es decir el camino para llegar a una conjetura. Pero luego, esta conjetura hay que demostrarla para que se transforme en teorema, o en su defecto, encontrar un contraejemplo que nos muestre que esa conjetura es falsa.

3. ***DEMOSTRACIONES VISUALES***

¿Son realmente demostraciones desde la rigurosidad matemática?
Este dibujo pretende mostrar la propiedad de un trinomio elevado al cuadrado:

Sumando las áreas de los rectángulos se tiene que:
$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

En el diagrama se ve claramente que:
$(A + B + C)^2 > A^2 + B^2 + C^2$, o sea que la operación de potenciación no es distributiva respecto de la suma.

Muchos matemáticos argumentan que las demostraciones sin palabras no son verdaderas demostraciones. Entonces, ¿qué son? La respuesta no es simple. James Robert Brown en el libro "Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures" (Routledge, Londres, 1999) dice:

> *"A los matemáticos, como al resto de la gente, les gustan las ideas inteligentes; en particular se deleitan con un dibujo ingenioso. Pero esta apreciación no acalla un escepticismo prevaleciente. Después de todo un diagrama es, a lo sumo, un caso particular, por lo tanto no puede establecer un teorema general. Aún peor, puede ser categóricamente de falsas apariencias. Aunque no en forma universal, la actitud prevaleciente es que los dibujos no son más que ideas heurísticas; son sicológicamente sugestivas y pedagógicamente importantes, pero no demuestran nada. Quiero oponerme a este punto de vista y decir que los dibujos juegan un rol legítimo en la evidencia y la justificación, un rol que va más allá de lo heurístico. En síntesis, los dibujos pueden demostrar teoremas" (*extraído de la introducción de "Proofs without words II" de Roger B. Nelsen. Ed. The Mathematical Association of America. 2000).

Los problemas visuales permiten generalizar expresiones y verificarlas a través del dibujo. Si se tuvieran que demostrar estas expresiones desde el álgebra, habría que utilizar métodos de demostración de alto nivel, como es el caso del método de Inducción Completa (contenido que no corresponde a nivel medio). Además este método permite demostrar igualdades entre expresiones algebraicas pero no así deducir dichas igualdades.

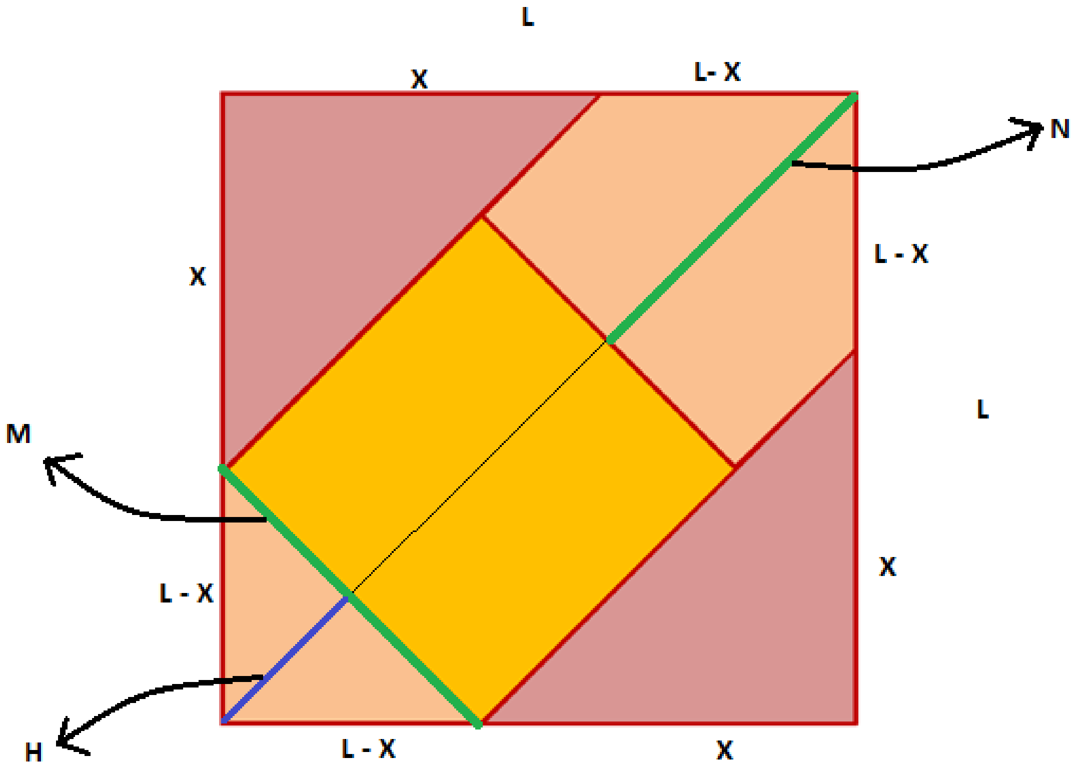
4. LAS APARIENCIA ENGAÑAN

Podemos hacer una prueba empírica recortando la figura original y armando los cuadrados menores. Si bien son cuadriláteros con ángulos rectos, queda la duda de que alguno de ellos pueda ser un rectángulo. En efecto, la tercera figura (naranja) es un rectángulo.

Si bien la prueba empírica nos ayuda a conjeturar (superponiendo los lados consecutivos se verá que no son congruentes), no es una demostración matemática aceptable, ya que (en este caso) la diferencia es mínima y lo podríamos atribuir a algún tipo de error (en el calcado, en el corte, en el doblez, etc.)

Entonces no queda otro camino que hacer una demostración analítica.

Para empezar hay que suponer como ciertas algunas condiciones que no las especifica la imagen. Supongamos que la figura total es u cuadrado de lado L, que la figura amarilla también es un cuadrado y que los triángulos violetas son isósceles y congruentes entre sí.



Para que el tercer "cuadrado" menor sea efectivamente un cuadrado, debe ser M = N (pintados de verde en la figura).

Por el teorema de Pitágoras, sabemos que $M = \sqrt{2}.(L-X)$ y que

$$N = \sqrt{2}.L - \sqrt{2}.(L-X) - H = \sqrt{2}.L - \sqrt{2}.L + \sqrt{2}.X - H = \sqrt{2}.X - \frac{\sqrt{2}.(L-X)}{2} = \frac{3\sqrt{2}X - \sqrt{2}L}{2}$$

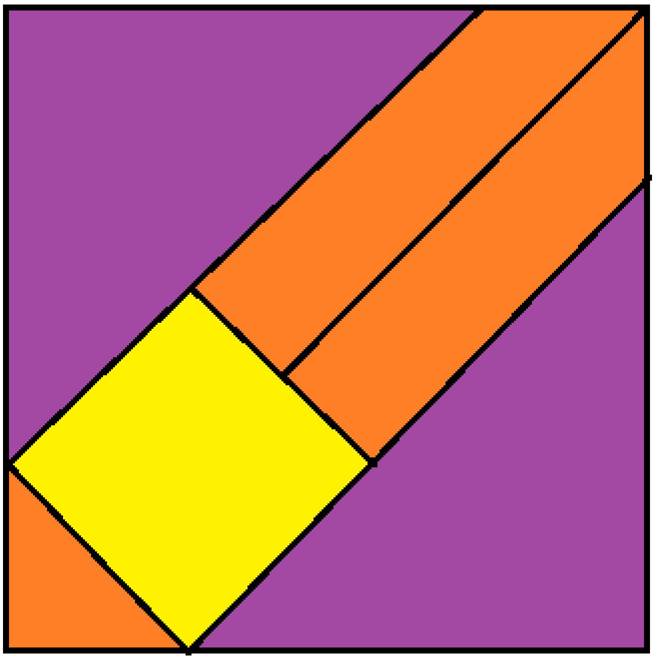
Para que M = N debe cumplirse que:

$$\sqrt{2}.(L-X) = \frac{\sqrt{2}(3X-L)}{2}$$

Simplificando y despejando nos queda que $\frac{3}{5}L = X$

O sea que solo bajo esta condición entre X y L se cumpliría que el último "cuadrado" menor sea un cuadrado.

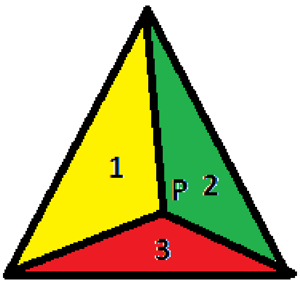
Podríamos dibujar una situación más exagerada en donde se ve que la figura naranja armada es un rectángulo:



5. DEMOSTRACIONES RIGUROSAS

El teorema de Viviani es muy sencillo de demostrar. Así y todo, la demostración que se presenta es una demostración rigurosa:

Unir el punto P con cada uno de los vértices del triángulo. Quedan determinados tres triángulos. Calcular sus áreas y compararlas con el área del triángulo original… ¡y ya está!



Sea l el lado del triángulo equilátero.
Área Δ1 = l . a/2
Área Δ2 = l . b/2
Área Δ3 = l . c/2
Si sumamos estas tres áreas nos da el área del triángulo original, que sería l . h/2, pero al plantear esta ecuación:

l . a/2 + l . b/2 + l . c/2 = l . h/2

y simplificando los 2 y los lados en ambos miembros de la ecuación concluimos que **a + b + c = h**, que es lo que queríamos demostrar.

(Ver gpdmatematica.org.ar/recursos/problemas secundaria/teorema de Viviani)