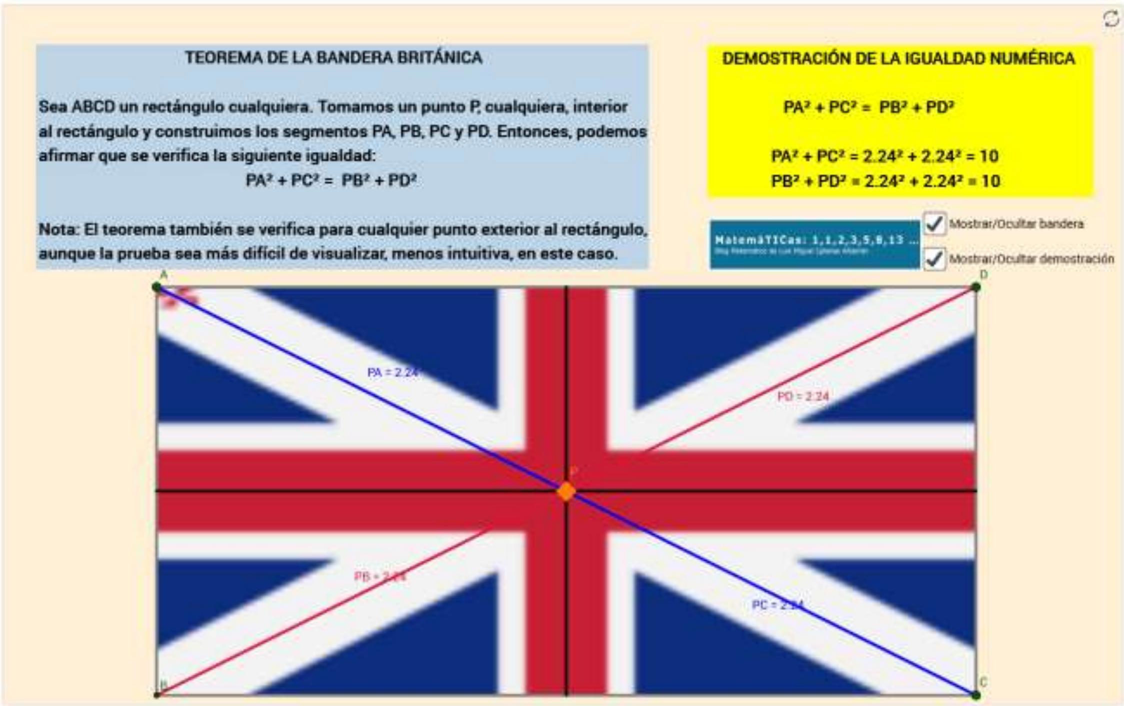
TEOREMA DE LA BANDERA BRITÁNICA

AUTORA: Ana Ma. Bressan, GPDM

Este problema ha sido tomado del Blog de Luis M. Iglesias http://matematicas11235813.luismiglesias.es/2016/07/06/ y completado por nosotros con su demostración analítica.

Dice el autor del blog: *coincidiendo con el* ***Brexit, he decidido crear y compartir este applet interactivo*** *que he realizado con* ***Geogebra,*** *el cual ofrece una* ***demostración visual de*** *un teorema geométrico, muy curioso, conocido como* ***"Teorema de la bandera británica"****.* Y propone la demostración visual de este curioso teorema geométrico. Su nombre es debido a la configuración geométrica que dibujan los segmentos cuando el punto escogido es el punto de corte de las diagonales del rectángulo, la cual es muy parecida a la bandera británica, como bien se puede apreciar. Lo importante es que esta propiedad se continúa cumpliendo cuando se desplaza el punto **P** por el interior (¡y exterior!) del rectángulo.



Visitando la página indicada se puede trabajar con el applet que propone el autor, continuando luego con la demostración analítica de este teorema, la cual hacemos a continuación.

La ubicación del punto P es indistinta, pero analizaremos las tres posibilidades.

a) Sea el rectángulo ABCD y el punto interior P en la intersección de las dos diagonales (ver figura 1):

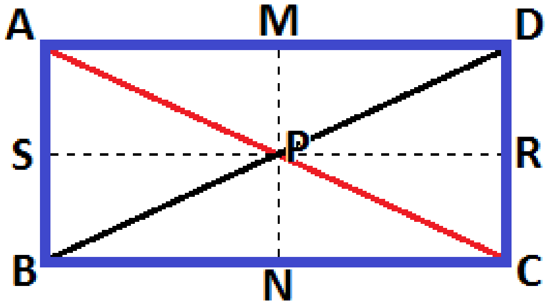


Figura 1

Se pide demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos AP y PC es igual a la suma de los cuadrados de los segmentos BP y PD:

$$AP^2 + PC^2 = BP^2 + PD^2 \qquad (1)$$

La demostración es obvia porque son iguales las longitudes de los cuatro segmentos AP, PC, BP y PD.

b) Sea el rectángulo ABCD y un punto interior P arbitrario (ver figura 2):

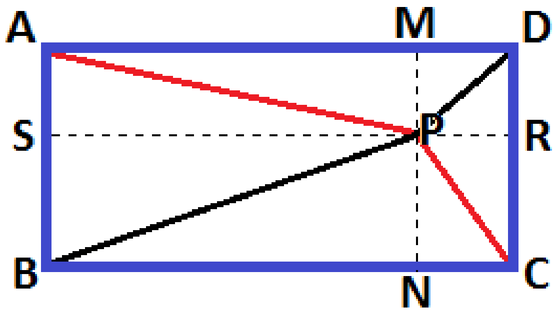


Figura 2

Se pide demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos AP y PC es igual a la suma de los cuadrados de los segmentos BP y PD:

$$AP^2 + PC^2 = BP^2 + PD^2 \qquad (2)$$

Dibujamos con líneas de puntos el segmento MN que pasa por el punto P y es paralelo a los segmentos AB y DC, de modo que AS = DR y SB = RC. También dibujamos el segmento SR que pasa por el punto P y es paralelo a los segmentos AD y BC, de modo que AM = BN y MD = NC. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$AP^2 = AM^2 + AS^2$ (3)

$PC^2 = NC^2 + RC^2$ (4)

$BP^2 = AM^2 + RC^2$ (5)

$PD^2 = NC^2 + AS^2$ (6)

Reemplazando las ecuaciones (3) a (6) en la ecuación (2) nos queda:

$AM^2 + AS^2 + NC^2 + RC^2 = AM^2 + RC^2 + NC^2 + AS^2$ (7)

Vemos que esto es una igualdad, de modo que se verifica la ecuación (2).

c) Sea el rectángulo ABCD y un punto exterior P arbitrario (ver figura 3):

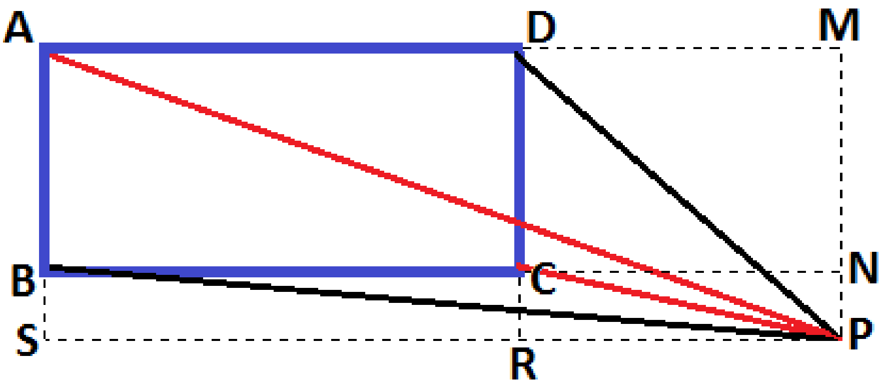


Figura 3

Se pide demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos AP y PC es igual a la suma de los cuadrados de los segmentos BP y PD:

$\mathbf{AP^2 + PC^2 = BP^2 + PD^2}$ (8)

Dibujamos con líneas de puntos el segmento MP que pasa por el punto P y es paralelo a los segmentos AB y DC, de modo que AS = MP y BS = NP. También dibujamos el segmento SP que pasa por el punto P y es paralelo a los segmentos AD y BC, de modo que AM = SP y DM = RPC. Por el teorema de Pitágoras y tenemos que:

$AP^2 = AM^2 + AS^2$ (9)

$PC^2 = RP^2 + NP^2$ (10)

$BP^2 = AM^2 + NP^2$ (11)

$PD^2 = RP^2 + AS^2$ (12)

Reemplazando las ecuaciones (9) a (12) en la ecuación (8) nos queda:

$AM^2 + AS^2 + RP^2 + NP^2 = AM^2 + NP^2 + RP^2 + AS^2$ (13)

Vemos que esto es una igualdad, de modo que se verifica la ecuación (8).