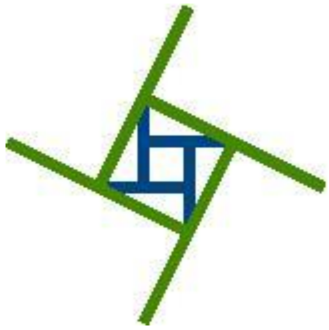
CUADRADOS CADA VEZ MÁS GRANDES

EXTRAÍDO Y ADAPTADO DE NRICH enriching mathematics. https://nrich.maths.org/72

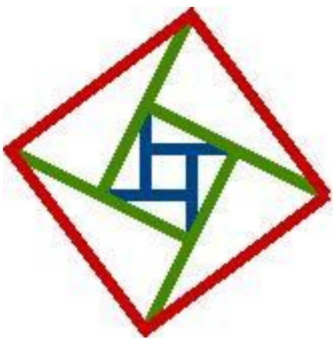
El otro día estaba garabateando y dibujé un cuadrado como este:

Supuse que el lado medía una unidad (cualquiera). Me pregunté qué pasaría si dibujaba los cuatro lados un poco más largos, digamos el doble de largo de tal manera que los pedacitos extra sobresalgan.

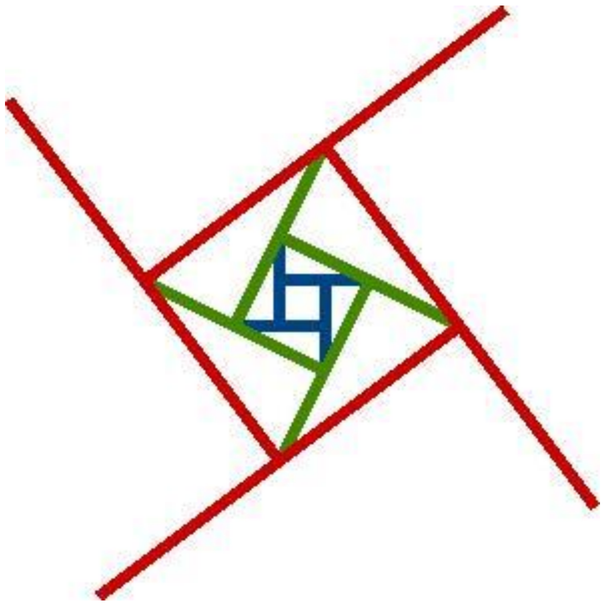
Pensé que era un pequeño diseño bastante lindo, y luego me di cuenta que los extremos de estas líneas parecían formar un cuadrado. ¡Entonces lo dibujé! Usé un color diferente para mostrar este nuevo cuadrado.



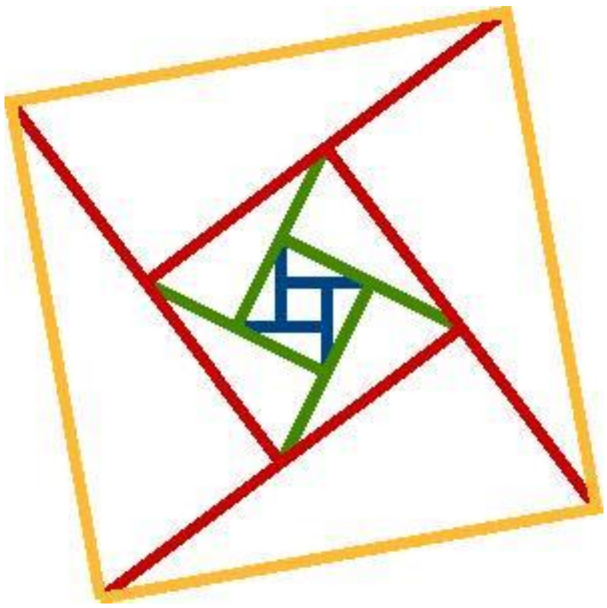
Ahora bien, los patrones matemáticos generalmente se siguen repitiendo por sí mismos, así que usé esta idea simulando que este nuevo cuadrado verde era el primero, por lo tanto dibujé los pedacitos extra otra vez, de tal manera que las líneas fueran el doble de largo que los lados del cuadrado.
¡Y así seguí!
Un nuevo cuadrado apareció, ahora ¡rojo!



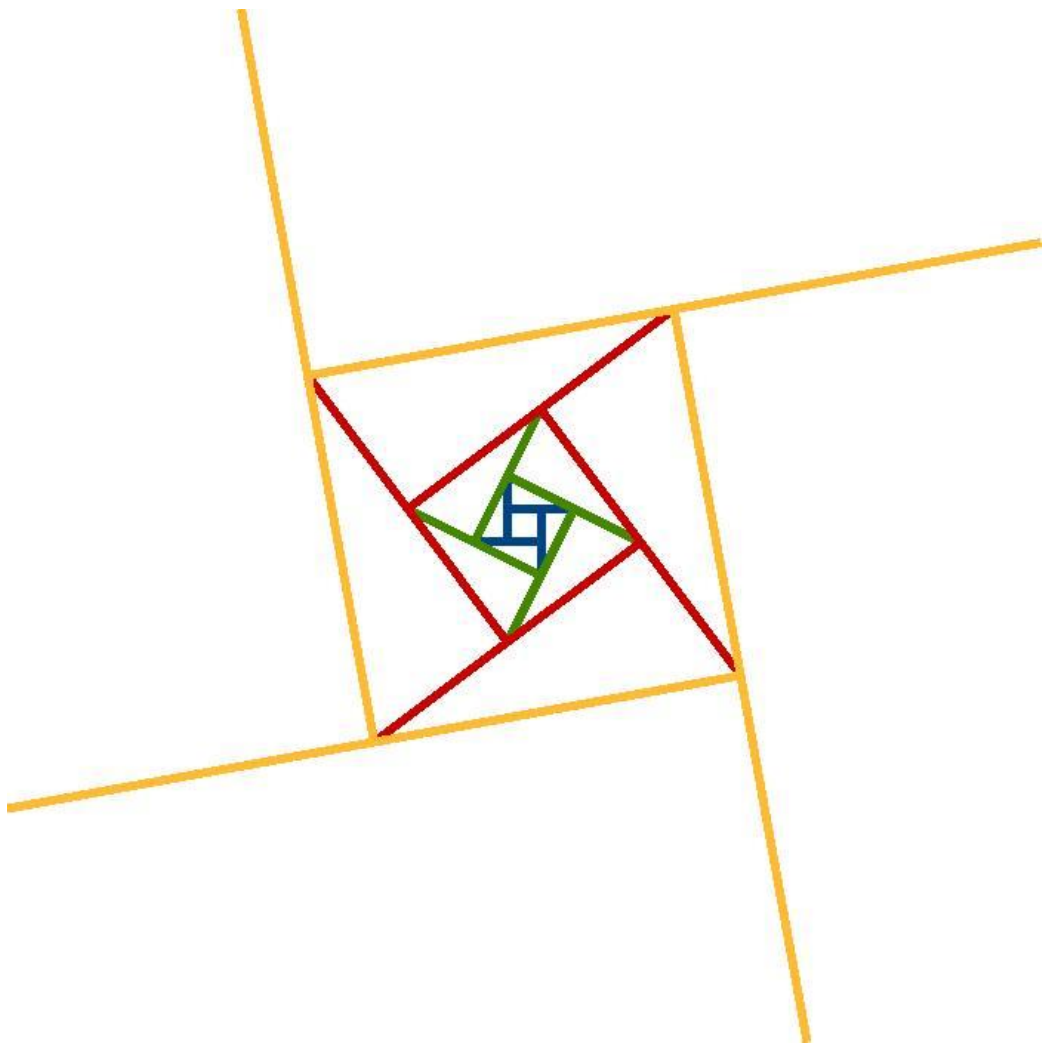
Al ampliar este …

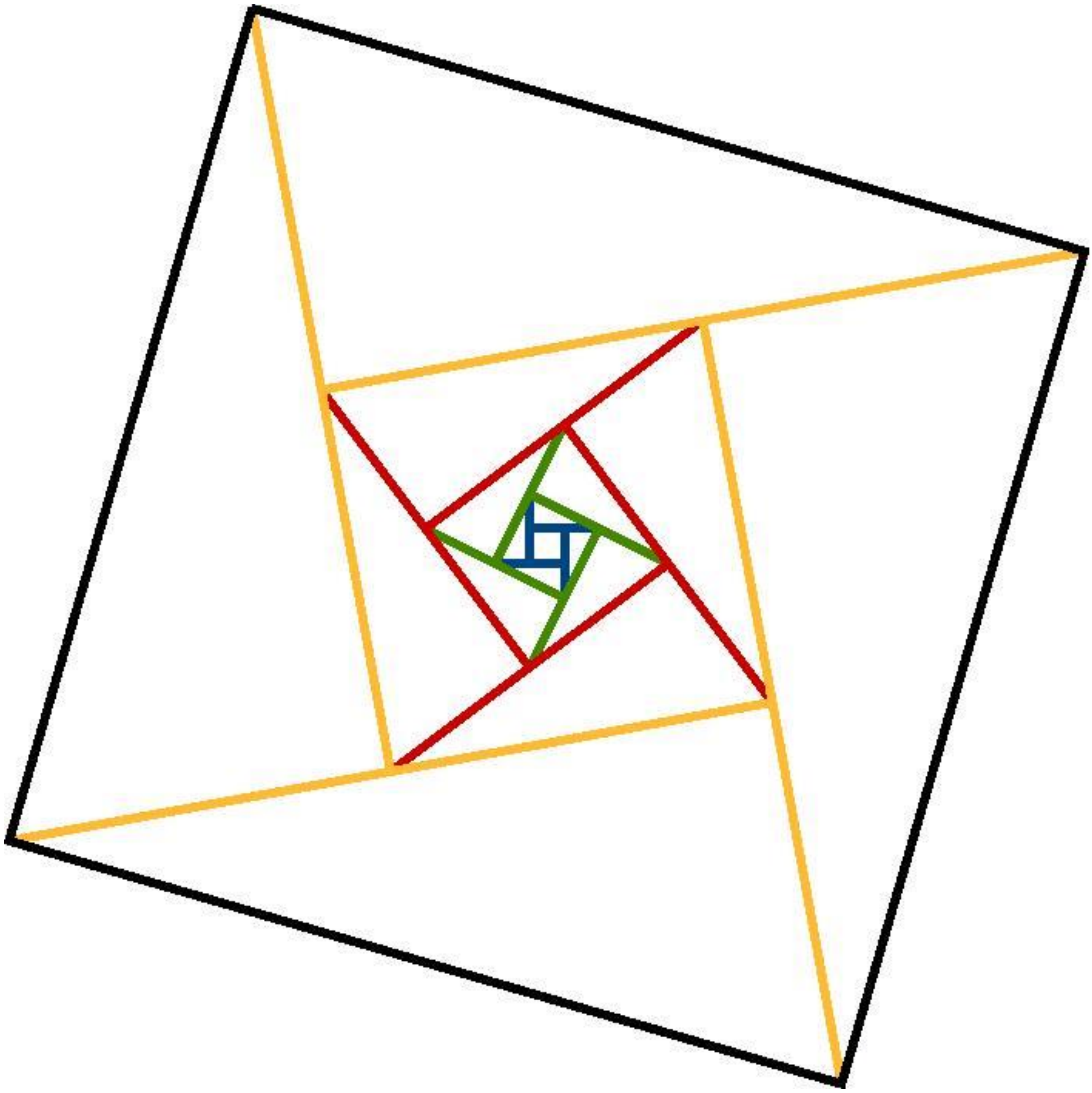


Realmente, ¡me gustó lo que estaba pasando!



Y así sucesivamente…





Tuve que parar acá porque el tamaño de la hoja no me permitía seguir.

Sugiero que se impriman estas páginas hasta acá para tener una buena visión de cómo creció el patrón y ver qué cosas observás en esta última imagen.

Cuando miré esta forma pude imaginar que estaba mirando a través de una ventana cuadrada en un patrón de cuadrados pero sólo podía ver el cuadrado del medio.

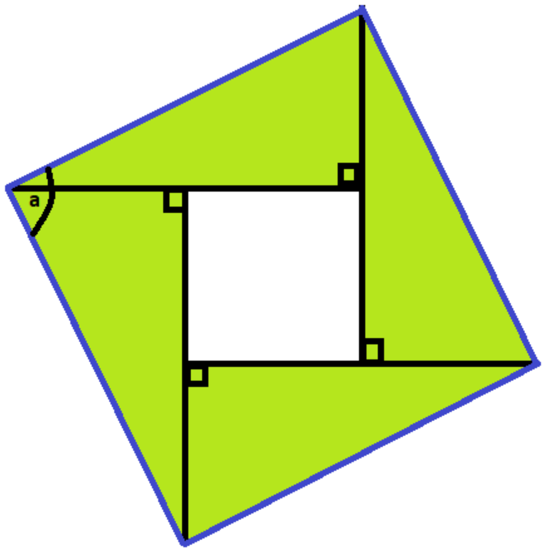
PREGUNTAS Y RESPUESTAS

Adriana Rabino y Ana Bressan

1. **En el primer paso de construcción aparentemente se genera un "nuevo cuadrado". ¿Por qué se puede asegurar que lo es?**

En principio debemos acordar en la definición de cuadrado. Podríamos decir que *es un cuadrilátero con sus lados congruentes y un ángulo recto* (hay otras definiciones, por ejemplo, *es un rombo con un ángulo recto o es un rectángulo con sus lados congruentes*).

Ahora hay que <u>demostrar</u> que el "nuevo cuadrado" cumple con estas condiciones, siempre tomando como hipótesis que la figura original es un cuadrado.



Los cuatro triángulos sombreados son rectángulos, porque poseen cada uno un ángulo recto por ser son ángulos exteriores (suplementarios) de los ángulos del cuadrado original. Además son triángulos congruentes porque: sus catetos menores son miden lo mismo que el lado del cuadrado original y los catetos mayores también lo son porque miden todos el doble del lado del cuadrado. Cumplen con el criterio de igualdad de triángulos L.A.L. Por lo tanto sus hipotenusas con congruentes (que son los lados del nuevo cuadrilátero). Con esto se cumple la primera condición (lados congruentes).

Ahora queda demostrar que uno de sus ángulos es recto. Y lo es, porque el ángulo **a** está formado por dos ángulos complementarios (por ser los ángulos agudos de los triángulos rectángulos verdes).

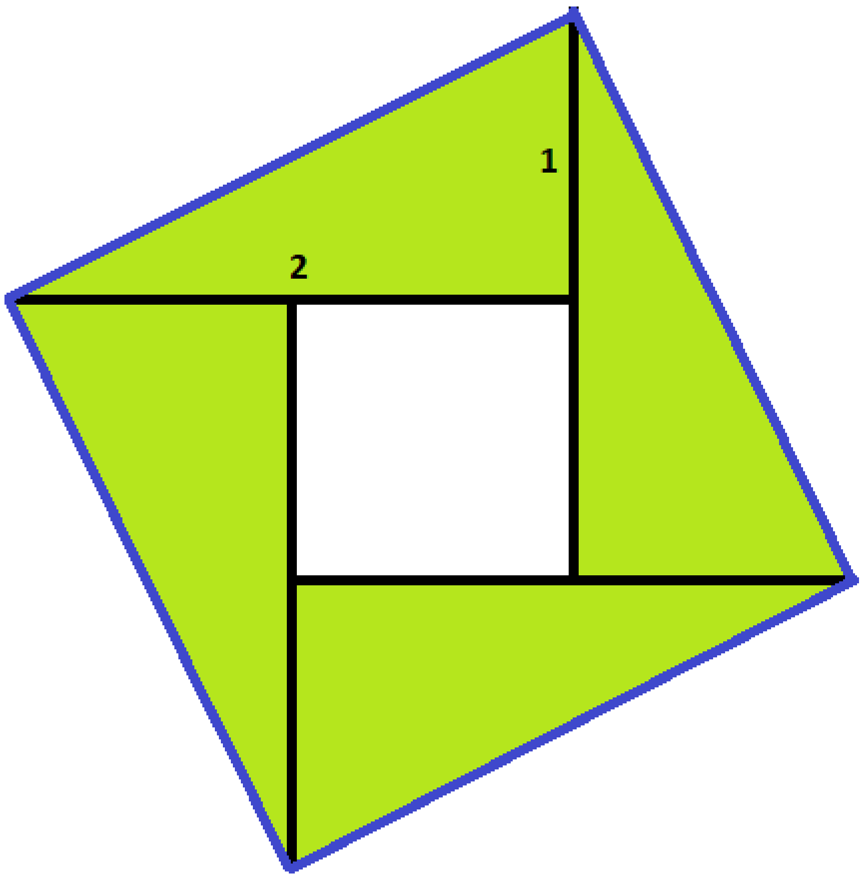
A medida que se siguen haciendo las otras construcciones (con el mismo procedimiento) podemos asegurar que los cuadriláteros que se van formando son cuadrados. Uno podría realizar el procedimiento anterior en cada paso, pero esto resultaría muy tedioso y no nos aseguraría que se cumpla para las infinitas construcciones que se pueden ir haciendo.

Pero, hay un método de demostración que sirve para ciertos casos (en general, demostraciones con números naturales) y que podemos aplicar a esta situación. Este método se denomina de *Inducción completa* y dice que si la propiedad (ser cuadrado) se cumple para el primer elemento (en este caso se cumple porque es hipótesis), luego tomando un elemento al azar que se supone que cumple esa propiedad, podemos demostrar que se cumple para el siguiente de ese elemento, entonces podemos asegurar que se cumple para todos. Este último paso se puede hacer con repitiendo la demostración que hicimos anteriormente. Con esto nos aseguramos que, siguiendo siempre las mismas construcciones, todos los cuadriláteros que se van generando en cada paso son cuadrados.

2. ¿Cómo varían los perímetros de estos cuadrados? ¿Y las áreas?

a) **Duplicando el lado**. Supongamos que el lado del primer cuadrado mide 1 (cualquier unidad). Para calcular el lado del siguiente cuadrado podemos recurrir al Teorema de Pitágoras: $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Ahora la nueva unidad es $\sqrt{5}$, y repetimos el procedimiento: $\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2}$ = $\sqrt{25}$ = 5



Al hacer una tabla para organizar la información y encontrar alguna regularidad:

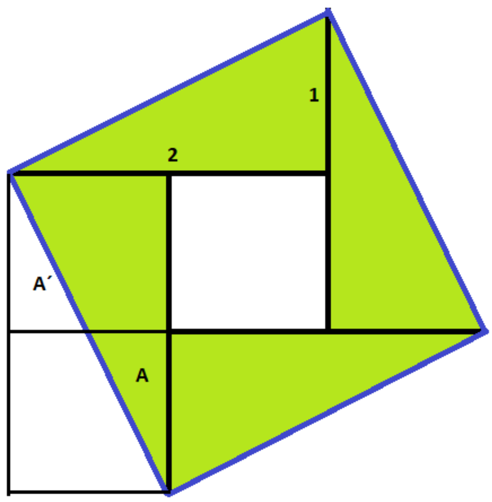
Figura	**Lado del cuadrado**	**Perímetro**
1	$1 = \sqrt{5}^0$	4
2	$\sqrt{5} = \sqrt{5}^1$	$4\sqrt{5}$
3	$\sqrt{25} = \sqrt{5}^2$	4.5
4	$\sqrt{125} = \sqrt{5}^3$	…

…	…	…
n	$\sqrt{5}^{n-1}$	$4\sqrt{5}^{n-1}$

podemos conjeturar que el cuadrado n tendrá $4\sqrt{5}^{n-1}$ como valor de lado.

Teniendo los valores de los lados de los distintos cuadrados se pueden calcular fácilmente las áreas de los mismos.

Pero veamos si podemos encontrar una relación visual:



Los triángulos A y A´ son congruentes (A.L.A., 1 ángulo recto, ángulos opuestos por el vértice y la diagonal del rectángulo corta por el medio la base media del mismo). Quiere decir que cada triángulo sombreado equivale en área al cuadrado original. Si este mide 1 unidad, en la figura siguiente tendremos 5 unidades de área. En el paso siguiente habrá 5.5 = 25 = 5^2, y así sucesivamente.

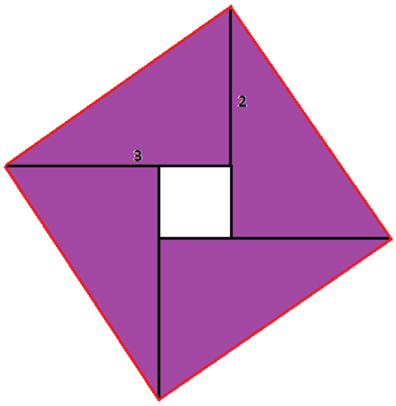
Figura	**Lado del cuadrado**	**Perímetro**	**Área**
1	$1 = \sqrt{5}^0$	4	5^0
2	$\sqrt{5} = \sqrt{5}^1$	$4\sqrt{5}$	5^1
3	$\sqrt{25} = \sqrt{5}^2$	$4\sqrt{5}^2$	5^2
4	$\sqrt{125} = \sqrt{5}^3$	…	5^3
…	…	…	5^4
n	$\sqrt{5}^{n-1}$	$4\sqrt{5}^{n-1}$	5^{n-1}

Observación a: Tanto en la columna de los lados como del perímetro y el área se dan **sucesiones geométricas**. La razón para la sucesión de lados y perímetros es $\sqrt{5}$, mientras que para las áreas es 5.

4. **¿Qué pasaría si en vez de prolongar el lado del cuadrado al doble se hace al triple? ¿Y si se hace n veces el triple? Responder las mismas preguntas anteriores para estos casos.**

La demostración que las figuras que se van formando son cuadrados es análoga a la anterior.

b) **Triplicando el lado** del cuadrado unidad. El primer triángulo tendrá un cateto que es 2 veces la unidad y el otro cateto que es 3 veces la unidad.



En cada triángulo rectángulo se puede observar que la diferencia entre los catetos siempre es 1 (como en el caso anterior). Es fácil verlo visualmente. Busquemos regularidades en una tabla para ver qué pasa con los perímetros y las áreas:

Figura	**Lado del cuadrado**	**Perímetro**	**Área**
1	$1 = \sqrt{13^0}$	4	13^0
2	$\sqrt{13^1}$	$4\sqrt{13}$	13^1
3	$\sqrt{13^2}$	$4\sqrt{13^2}$	13^2
4	$\sqrt{13^3}$	…	13^3
…	…	…	13^4
n	$\sqrt{13^{n-1}}$	$4\sqrt{13^{n-1}}$	13^{n-1}

Observación b: Tanto en la columna de los lados como del perímetro y el área se dan **sucesiones geométricas**. La razón para la sucesión de lados y perímetros es $\sqrt{13}$, mientras que para las áreas es 13.

c) **Cuadruplicando los lados.** El primer triángulo tendrá un cateto de 3 unidades y el otro de 4 unidades.

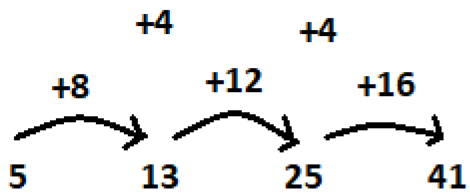
Figura	**Lado del cuadrado**	**Perímetro**	**Área**
1	$1 = \sqrt{25^0}$	4	25^0
2	$\sqrt{25^1}$	$4\sqrt{25}$	25^1
3	$\sqrt{25^2}$	$4\sqrt{25^2}$	25^2
4	$\sqrt{25^3}$	…	25^3
…	…	…	25^4
n	$\sqrt{25^{n-1}}$	$4\sqrt{25^{n-1}}$	25^{n-1}

Observación c: Tanto en la columna de los lados como del perímetro y el área se dan **sucesiones geométricas**. La razón para la sucesión de lados y perímetros es $\sqrt{25}$, mientras que para las áreas es 25.

d) **Quintuplicando los lados** queda que los lados de los catetos de los triángulos son 4 y 5 por lo tanto la hipotenusa es $\sqrt{41}$ y las áreas de cuadrados que se van formando son las potencias de 41^{n-1}.

Observación d: Tanto en la columna de los lados como del perímetro y el área se dan **sucesiones geométricas**. La razón para la sucesión de lados y perímetros es $\sqrt{25}$, mientras que para las áreas es 25.

O sea que según la extensión de las prolongaciones respecto del cuadrado original de lado 1 las áreas van variando de la siguiente manera:



Usa la regularidad y conjetura: ¿Si multiplico por 6 el lado unidad qué lado, perímetro y área tendrá el nuevo cuadrado? Compruébalo.

¿Y si multiplico por n el lado unidad qué valor de lado tendrá el nuevo cuadrado? ¿Qué sucesiones se forman? Usa una tabla cómo las anteriores.

Rta: Si multiplico por n el lado unidad obtengo un triángulo de catetos n y n-1. Luego su hipotenusa, lado del nuevo cuadrado, es $\sqrt{(n-1)^2+n^2}$, por lo tanto, su perímetro será

4 $\sqrt{(n-1)^2+n^2}$ y su área $2n^2 - 2n + 1$. Las progresiones geométricas son de razón $\sqrt{(n-1)^2+n^2}$ para los lados y el perímetro y la de las áreas $2n^2 - 2n + 1$

Otra mirada duplicando y usando coordenadas.

CUADRADOS CADA VEZ MÁS GRANDES

Oscar Bressan

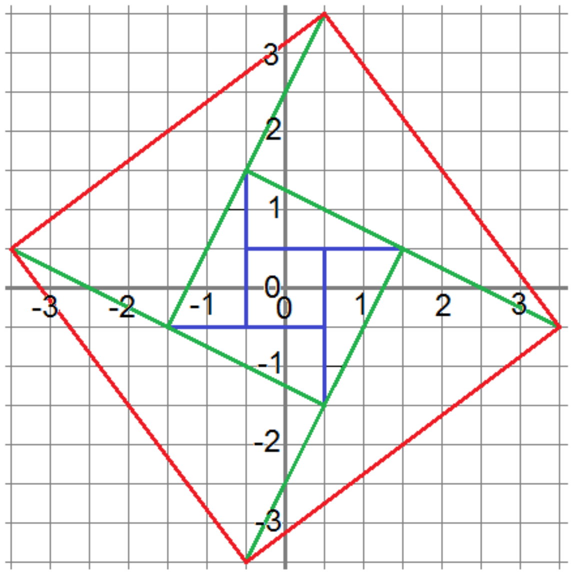


FIGURA 1

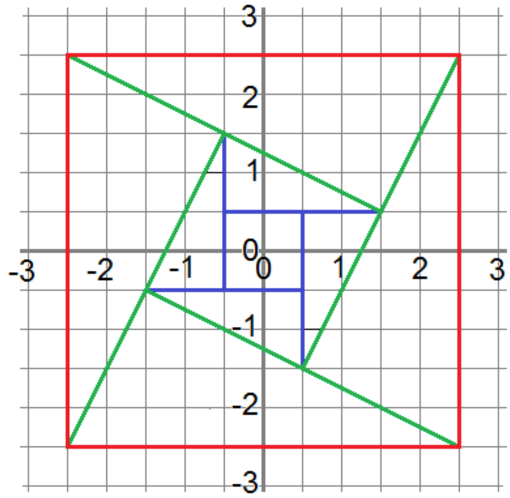


FIGURA 2

<u>De la Figura 1:</u>

Los vértices del cuadrado azul son (0,5 ; 0,5), (- 0,5 ; 0,5), (- 0,5 ; -0,5) y (0,5 ; -0,5).
Los lados del cuadrado azul en consecuencia miden una unidad.
La superficie del cuadrado azul es una unidad al cuadrado

Los vértices del cuadrado verde son (1,5 ; 0,5), (- 0,5 ; 1,5), (- 1,5 ; -0,5) y (0,5 ; -1,5).
Los lados del cuadrado verde miden (calculado por Pitágoras) $\sqrt{(1 + 2^2)} = \sqrt{5}$
La superficie del cuadrado verde es $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Los vértices del cuadrado rojo son (0,5 ; 3,5), (- 3,5 ; 0,5), (- 0,5 ; -3,5) y (3,5 ; -0,5).
Los lados del cuadrado rojo miden (calculado por Pitágoras) $\sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25}$.
La superficie del cuadrado rojo es $(\sqrt{25})^2 =25$.

Supongamos que el próximo cuadrado fuera marrón. Verificar que:

> Los lados del cuadrado marrón miden (calculado por Pitágoras) $\sqrt{(5^2 + 10^2)} = \sqrt{125}$
> La superficie del cuadrado marrón es $(\sqrt{125})^2 = 125$.

Los lados siguen la serie geométrica : 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, … = $\sqrt{5^n}$ …….con n = 0, 1, 2, 3, ….
Las superficies siguen la serie geométrica : 1, 5, 25, 125, …. = 5^{2n} ……con n = 0, 1, 2, 3, ….,