MIRANDO ADENTRO DE UNA CAJA CÚBICA

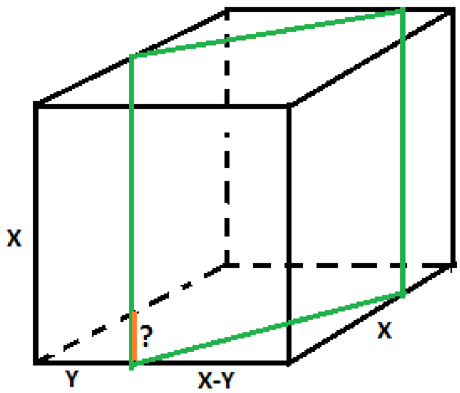
Oscar Bressan y Adriana Rabino.
Aportes del alumno Roberto Reynoso de Instituto de Formación Docente Continua de San Carlos de Bariloche

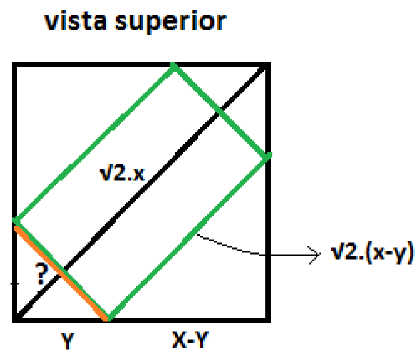
Problema extraído del libro "*Enseñar geometría: Redescubrir una tarea posible*" Ed. Styrka, de Ana María Bressan, Ignacio Reyna y Gustavo Zorzoli.

a. ¿Cuál es el cuadrado de mayor área que se puede guardar en una caja cúbica?
b. ¿Cuántas pirámides de base igual a una cara y altura igual a la mitad de su lado entran en una caja cúbica? ¿Cómo es posible construirlas? ¿Qué longitud tienen sus aristas? ¿Qué volumen posee cada una?
c. Coloquemos pirámides como las anteriores hacia afuera, sobre cada cara de la caja cúbica. ¿Cuántas caras tiene este nuevo cuerpo? ¿Qué forma tienen sus caras? ¿Qué volumen tiene este cuerpo?
d. ¿Existen tetraedros que llenan la caja?

a. Se presentan a continuación dos soluciones analíticas del punto que conducen al resultado exacto: una resuelta en forma vectorial por Oscar Bressan y otra resuelta en forma algebraica por Adriana Rabino.

En forma algebraica:
Llamemos x la longitud de la arista del cubo.
Supongamos que colocamos un cuadrilátero dentro del cubo de tal manera que cada vértice del mismo está a una distancia "y" del vértice del cubo:





El lado de la parte inferior (o superior) del cuadrilátero inserto sería:

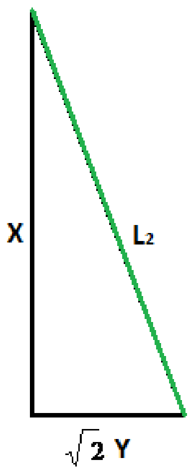
$$L_1 = \sqrt{(x-y)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{2}.(x-y)$$

Cada uno de los otros dos lados del cuadrilátero (en el dibujo en forma vertical) se podría hallar aplicando el Teorema de Pitágoras en el espacio o aplicando el mismo teorema en forma reiterada dos veces (dado que si queremos que esta figura sea un cuadrado, una de las condiciones que debe tener es que sus ángulos sean rectos, o sea que sería un rectángulo):

Situándonos en la base del cubo, el primer paso sería hallar la longitud que está con (?):

$$\sqrt{y^2 + y^2} = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}y$$

Luego, ya en el espacio y considerando que la altura es X, se puede saber la expresión del otro lado del cuadrilátero, o de los otros dos lados (ya que si es un rectángulo sus lados opuestos deben ser congruentes):



$$\sqrt{x^2 + (\sqrt{2}.y)^2} = \sqrt{x^2 + 2y^2}$$

Por último, para que este rectángulo sea un cuadrado debe cumplirse que los lados consecutivos sean congruentes, o sea:

$$\sqrt{2}(x - y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$2(x - y)^2 = x^2 + 2y^2$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = x^2 + 2y^2$$

$$x^2 = 4xy$$

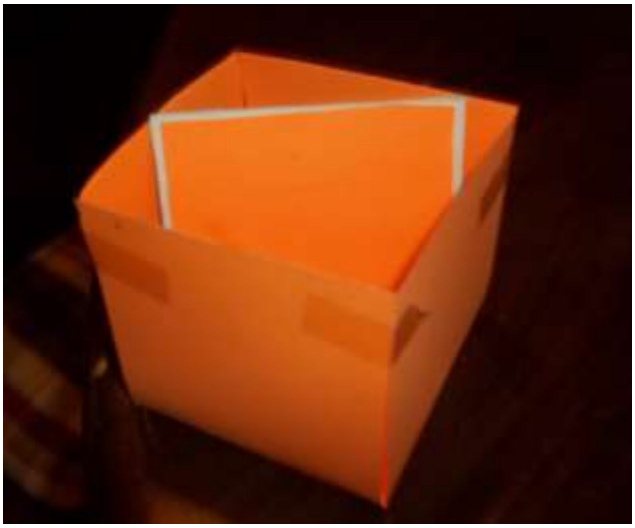
de donde:

$x = 4y$ ó $y = \dfrac{1}{4}x$ (se descarta la solución x = 0 por razones obvias)

Entonces, reemplazando esta expresión en cualquiera de los dos miembros de la igualdad original, se tiene:

$\sqrt{2}(x - y) = \sqrt{2}(x - \dfrac{1}{4}x) = \sqrt{2}.\dfrac{3}{4}x = 1{,}06x$ aproximadamente.

Esto quiere decir que el mayor cuadrado inserto en un cubo tiene un lado cuya longitud es aproximadamente un 6% mayor que la arista del cubo.



La siguiente es la resolución en forma vectorial:

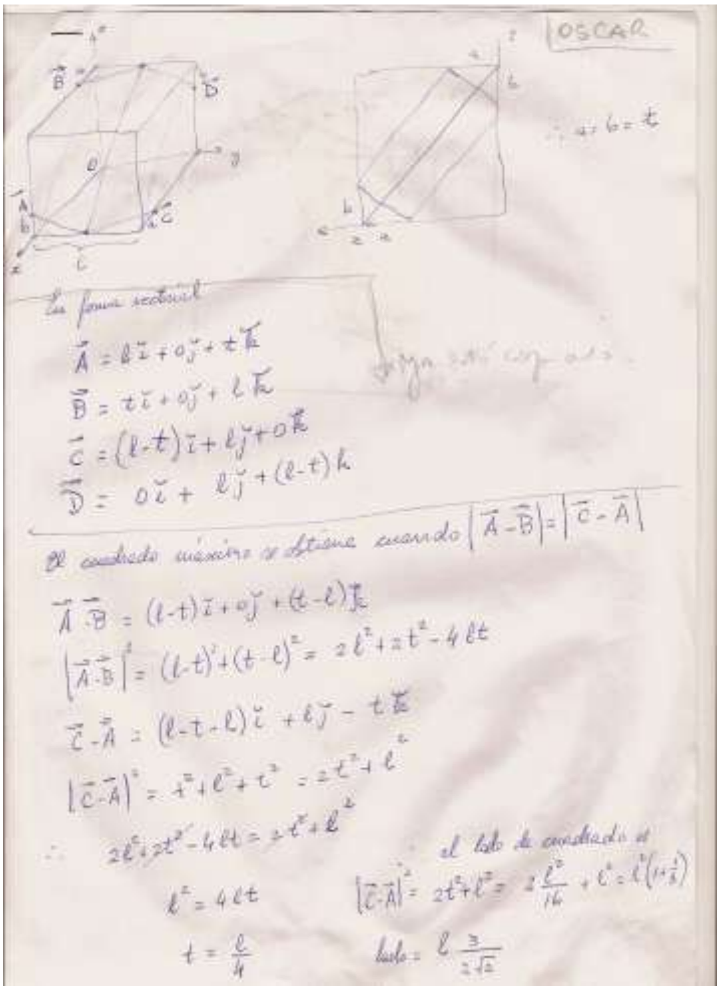
$$\vec{A} = li + 0j + tk$$

$$\vec{B} = ti + 0j + lk$$

$$\vec{C} = (l - t)i + lj + 0k$$

$$\vec{D} = 0i + lj + (l - t)k$$

el cuadrado máximo se obtiene cuando $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left|\vec{C} - \vec{A}\right|$



OSCAR

La forma vectorial

$\vec{A} = l\breve{i} + 0\breve{j} + t\breve{k}$

$\vec{B} = t\breve{i} + 0\breve{j} + l\breve{k}$

$\vec{C} = (l-t)\breve{i} + l\breve{j} + 0\breve{k}$

$\vec{D} = 0\breve{i} + l\breve{j} + (l-t)k$

El cuadrado máximo se obtiene cuando $\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \left|\vec{C}-\vec{A}\right|$

$\vec{A}-\vec{B} = (l-t)\breve{i} + 0\breve{j} + (t-l)\breve{k}$

$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2 = (l-t)^2 + (t-l)^2 = 2l^2 + 2t^2 - 4lt$

$\vec{C}-\vec{A} = (l-t-l)\breve{i} + l\breve{j} - t\breve{k}$

$\left|\vec{C}-\vec{A}\right|^2 = t^2 + l^2 + t^2 = 2t^2 + l^2$

$\therefore\ 2l^2 + 2t^2 - 4lt = 2t^2 + l^2$

$l^2 = 4lt$

$t = \frac{l}{4}$

el lado de cuadrado es

$\left|\vec{C}-\vec{A}\right|^2 = 2t^2 + l^2 = 2\frac{l^2}{16} + l^2 = l^2\left(1+\frac{1}{8}\right)$

lado $= l\,\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$$\vec{A}-\vec{B}=(l-t)i+0j+(t-l)k$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2=(l-t)^2+(t-l)^2=2l^2+2t^2-4lt$$

$$\vec{C}-\vec{A}=(l-t-l)i+lj-tk$$

$$\left|\vec{C}-\vec{A}\right|^2=t^2+l^2+t^2=2t^2+l^2$$

$$2l^2+2t^2-4lt=2t^2+l^2$$

$$l^2=4lt$$

$$t=\frac{l}{4}$$

por lo tanto, el lado del cuadrado es:

$$\left|\vec{C}-\vec{A}\right|^2=2t^2+l^2=2\frac{l^2}{16}+l^2=l^2\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

con lo cual el lado es : $l.\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, que es aproximadamente 1,06.l

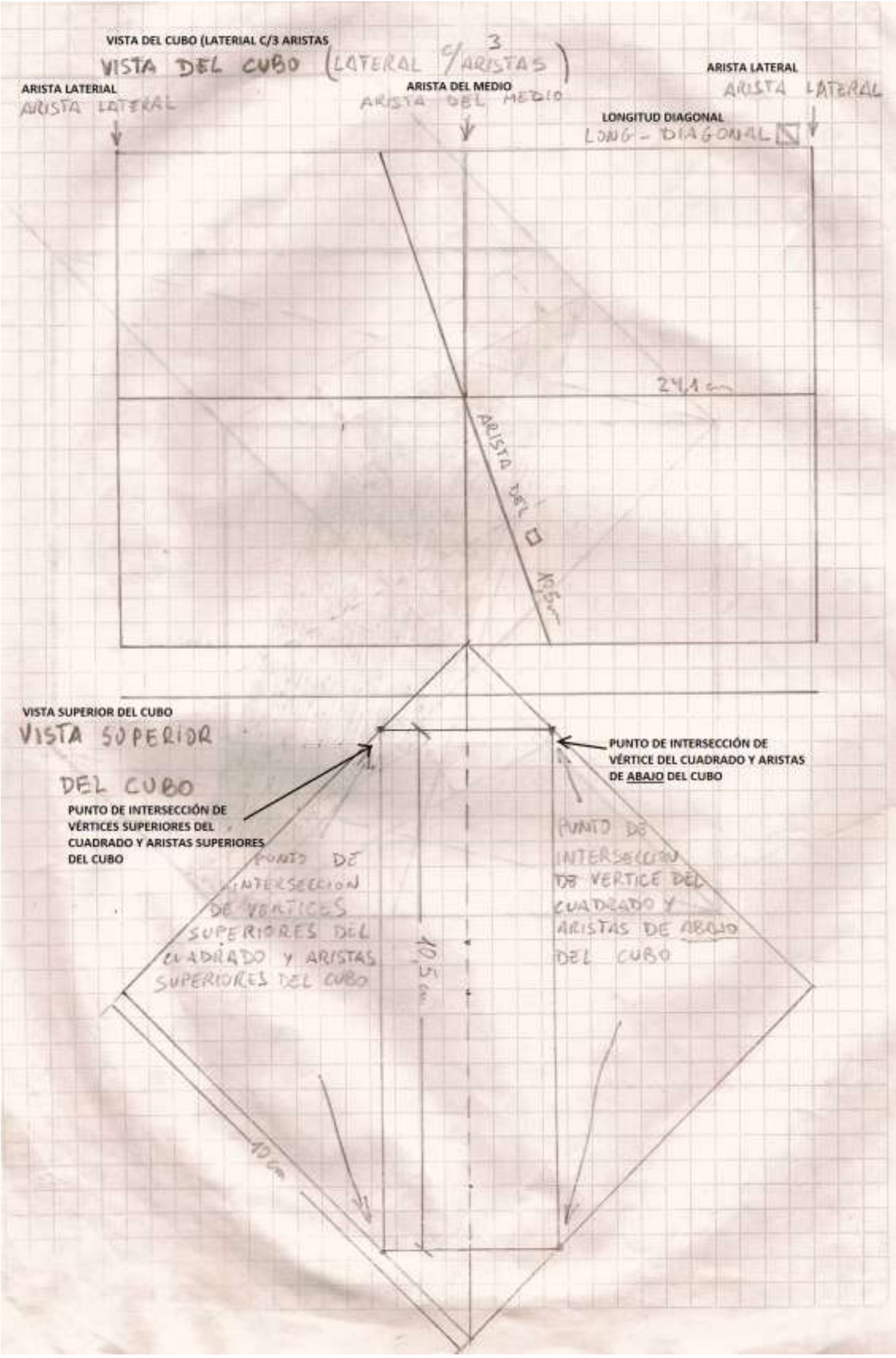
Ambos caminos llevan al mismo resultado (¡menos mal!) que, si bien es una expresión irracional, podemos decir que la longitud del lado de este cuadrado es aproximadamente 1,06 veces la longitud de la arista del cubo, o sea el 6% más.

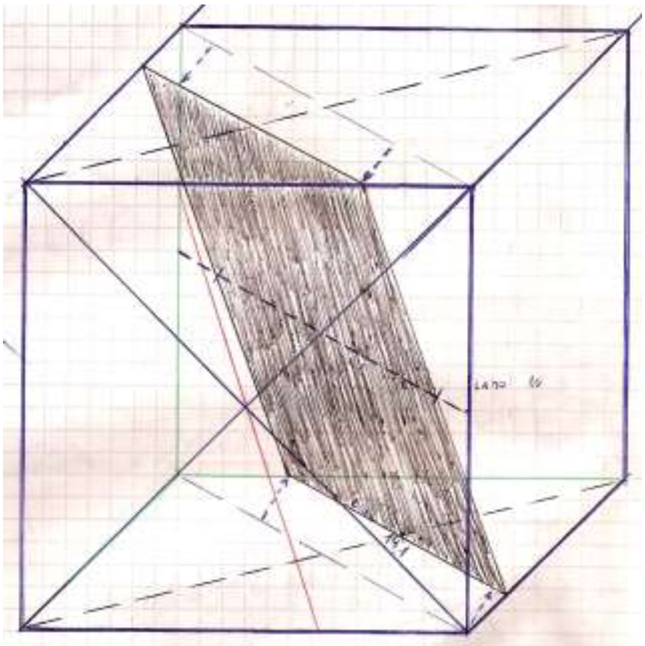
Respuesta dada por un alumno del IFDC

He aquí lo que sucedió con uno de los alumnos, Roberto Reynoso de la Carrera de Educación Especial.

En general, los alumnos, llevados por la intuición, dicen que el cuadrado máximo que se puede colocar es del tamaño de la cara del cubo. A veces buscan un cuadrilátero cuyos vértices coinciden con los vértices opuestos del cubo, pero después se dan cuenta que se trata de un rombo no cuadrado. Se trabaja con material concreto pero el grosor del cartón no permite visualizar si hay una diferencia que sea pequeña.

Roberto no estaba convencido que esa fuera la respuesta correcta, se fue a la casa, lo pensó y trajo otra conclusión. Él se dejó llevar, más que por su intuición, por su visualización. Se lo imaginó, hizo un modelo en escala y luego dibujó la situación también en escala reproduciendo de la mejor manera posible la situación en perspectiva y con distintas vistas, lo que le ayudó a concluir de que hay un cuadrado cuyo lado mide aproximadamente el 5% más que la arista del cubo y que entra dentro del mismo.

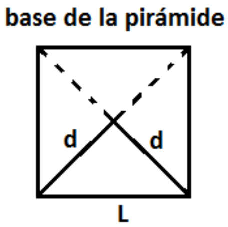

VISTA DEL CUBO (LATERIAL C/3 ARISTAS
ARISTA LATERAL
ARISTA DEL MEDIO
ARISTA LATERAL
LONGITUD DIAGONAL
24,1 cm
ARISTA DEL ☐ 10,5 cm
VISTA SUPERIOR DEL CUBO
PUNTO DE INTERSECCIÓN DE VÉRTICES SUPERIORES DEL CUADRADO Y ARISTAS SUPERIORES DEL CUBO
PUNTO DE INTERSECCIÓN DE VÉRTICE DEL CUADRADO Y ARISTAS DE ABAJO DEL CUBO
10,5 cm
10 cm



No lo pudo demostrar pero su conjetura fue correcta.

b. Entran 6 pirámides (una por cada cara). Se construyen hacia adentro utilizando como base cada una de las caras del cubo, uniéndose sus vértices superiores en un mismo punto dentro del cubo.

Sus aristas se calculan en función de la arista L del cubo aplicando el Teorema de Pitágoras en el espacio o el mismo teorema en el plano en forma sucesiva:



$L^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Rightarrow d = L/\sqrt{2}$

Luego la arista $A^2 = (L/\sqrt{2})^2 + h^2 = L^2/2 + L^2/4 = \frac{3}{4} L^2$

Para hallar el volumen de cada pirámide es:

V = (superficie de la base) x h)/3 = $L^2 \times L/2 : 3 = L^3 / 6$

Si sumamos los volúmenes de las 6 pirámides da L^3 que es el volumen del cubo, o sea que estas pirámides construidas hacia adentro cubren la totalidad del volumen del cubo.

c. Este nuevo cuerpo tiene 24 caras triangulares (4 por cada pirámide).

Su volumen es $V = 2 L^3$

d. No es posible rellenar el espacio únicamente con tetraedros regulares (aunque, parece ser, que Aristóteles así lo creía), pero sí es posible hacerlo con elementos formados por una combinación de un octaedro regular y dos tetraedros regulares.

Lo que sí es posible es incluir un tetraedro regular en un cubo de tal forma que cada uno de los vértices del tetraedro coincida con un vértice del cubo, coincidiendo las aristas del tetraedro con diagonales de las caras del cubo. El volumen del cubo necesario para incluir un tetraedro en la forma descrita es el triple que el del tetraedro.