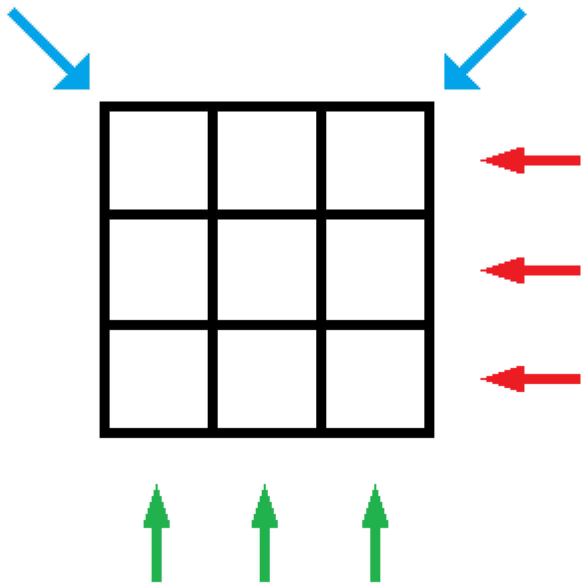
UN LINDO PROBLEMA DE CUADRADO MÁGICO

Autor: Oscar Bressan, GPDM

El problema consiste en ubicar los números del 1 al 9, sin repetir ninguno, en cada uno de los nueve casilleros del cuadrado de modo que sean iguales las sumas de los números de cada fila (flechas rojas) y que cada suma sea igual a las sumas de los números de cada columna (flechas verdes). Y por si esto fuera poco, que también esas sumas sean iguales las sumas de las dos diagonales (flechas azules). Es decir que tenemos 8 sumas iguales, cuyo valor llamamos "A".



¡¡¡Dejémoslo para mañana y así tenemos toda la noche para pensarlo!!!

Solución: Bueno… ya amaneció y ahora tenemos la mente despejada para racionalizar cómo se puede hacer.

Primero vamos a deducir cuánto vale A. Como el valor de cada fila es A, la suma conjunta de las tres filas es 3 A. pero esto es la suma de los números 1 al 9, ya que figuran todos y ninguno se repite:

$$3\,A = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 \quad \Rightarrow \quad A = 45/3 = 15$$

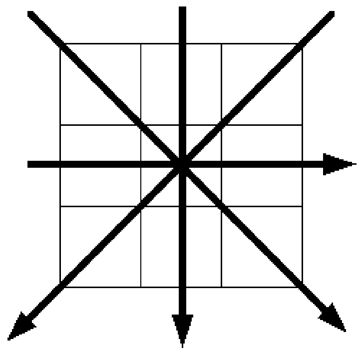
Ya conocemos A y esto es muy útil. Entonces las tres sumas de las filas, las tres sumas de las columnas y las dos sumas de las dos diagonales son iguales a 15.

Vamos a identificar a cada uno de los casilleros:

a_{11}	a_{12}	a_{13}

a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

¿Qué número debe ir en el centro del cuadrado, o sea en a_{22}? Al sumar filas, columnas o diagonales a_{22} se deben considerar todos los números de las otras casillas:



Si a_{22} fuera un número mayor que 6 entonces al sumar con el 9 el resultado daría mayor que 15, de modo que el resultado sería incorrecto. Si fuera 6 al sumar con el 9 daría 15 y el tercer número debería ser cero lo que también es incorrecto. Ergo a_{22} no puede ser mayor que 5.

Si a_{22} fuera par (2 o 4) tampoco andaría porque para sumar 15 (donde uno de los sumandos es el 4) se necesita un número par y otro impar. Hay cuatro sumas independientes, como se observa en las flechas del gráfico superior, además de 4 se necesitarían 4 números pares adicionales, y sólo hay 3 adicionales (2, 6 y 8). No anda.

Entonces a_{22} sólo puede ser el 1, el 3 o el 5. Si fuera el 1 entonces al sumar el 7 el otro número que falta del otro lado también debería ser otro 7, y dijimos que nos hay repetición. No puede ser un 1.

Si fuera un 3 entonces al sumar el 6 el otro número que falta del otro lado debería ser otro 6. Tampoco puede ser.

No queda más remedio que el a_{22} sea el número 5. Otro notable progreso.

Supongamos que el número 9 está en una esquina (a_{11}, a_{13}, a_{31} o a_{33}) y el número 1 debe estar en la esquina opuesta para que la diagonal sume 15. Como ya hemos usado el 5 en a_{22} para que la fila sume 15 se debe agregar el 2 y el 4 (o el 4 y el 2) en la fila. Pero en la columna tendríamos que poner dos veces el 3, lo que no está permitido.

9	2	4
3	5	
3		1

9	4	2
3	5	
3		1

En consecuencia el 9 no puede estar en una esquina, debe estar en a_{12}, a_{21}, a_{23}, o a_{32}. Elegimos que se encuentre en el a_{12} y entonces en a_{11} y a_{13} tenemos el 2 y el 4 (o al revés):

2	9	4
	5	
	1	

Ahora obligatoriamente el a_{31} es el 6 y el a_{33} es el 8 para que las diagonales sumen 15:

2	9	4
	5	
6	1	8

Finalmente, en inmediato, rellenar lo que nos falta:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Solo falta agregar que por simetría la tabla se puede rotar o reflejar, pero sigue valiendo lo mismo.

¡Albricias! Todo anda perfectamente. Colorín colorado, este cuento se ha acabado.