JAMES A. MIDDLETON, MARJA VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN Y JULIA A. SHEW

Usando Representaciones de Barras como un Modelo para Conectar Conceptos de los Números Racionales

Los alumnos de los grados intermedios deberían entender, representar y usar números en una variedad de formas equivalentes, incluyendo fracciones, decimales y porcentajes. Ellos deberían desarrollar un sentido numérico para las fracciones y otras representaciones de números racionales. Los alumnos también deberían poder representar esas relaciones en una forma gráfica (NCTM 1989). Este artículo examina los modelos de barra como representaciones gráficas de los números racionales.

Fundamentación

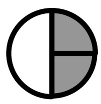
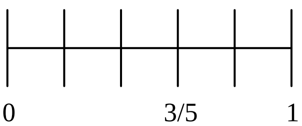
Muchas de las investigaciones de la comprensión de los niños del concepto de número racional indican que aunque el aprendizaje de las fracciones básicas se construye en base a conceptos aritméticos de los números enteros que los niños tienen, en todo respecto, ya adquiridos, ellos tienden a tener una gran dificultad en dar contenido significativo a estas ideas una vez que están puestas juntas (Ohlsson, 1988). Algunas de las dificultades que los niños experimentan están resumidas en la figura 1.

Las dificultades en enseñar números racionales pueden ser atribuidas en gran manera al excesivo énfasis en los *diferentes* significados del número racional en lugar de las *similitudes* generales. Cada significado del número racional ha sido tratado como un tema aislado: y cada manera de representar razones como un método distinto o un conjunto de símbolos. Generalmente, los intentos para hacer conexiones entre ellos a través de representaciones apropiadas no han sido difundidos lo suficiente. Los alumnos deben llegar a la comprensión de que las fracciones, decimales, porcentajes y razones tienen un significado subyacente que es común a todos ellos y que uno puede y debería moverse de uno a otro cuando fuere apropiado.

Para ayudar a resolver estas confusiones, los maestros necesitan alguna forma de representación de los números racionales que sintetice la naturaleza relativa de las cantidades, pero que también pueda ser usado como un modelo "concreto". Los dibujos han sido usados por mucho tiempo para dar a los alumnos una percepción de la magnitud de las fracciones, como por ejemplo las barras de fracciones que han sido diseñadas con el propósito de comunicar los números racionales de una manera que sea fácilmente comprendida.

Cualquier representación adecuada debe ser construida en base al conocimiento previo que nuestros alumnos tienen- su comprensión de compartir, estirar, encoger y graduar en un mundo real. Este requerimiento significa que por una parte, el modelo debe ser concreto para los alumnos en el sentido que sea imaginable y comprensible en sí mismo y por otra parte, el modelo debe ser tan flexible como los mismos números racionales.

Figura 1: Algunas de las dificultades que los niños tienen aprendiendo los conceptos de números racionales

DIFICULTAD	EJEMPLO
Sobre generalizar las propiedades del número natural al número racional	½+ ½ = 2/4
No teniendo en cuenta el tamaño de las partes	El dibujo de un niño de 2/3: 
Confundiendo los diferentes significados de una fracción en diferentes contextos, que pueden ocurrir cuando cada significado es enseñado como un tema separado.	3/5 puede tener cualquiera de los siguientes significados: *-Parte / todo:* 3/5 de un sándwich submarino ("sub"). *-Probabilidad:* La chance de ganar es de 3 a 5 *-Parte- parte:* La proporción de lo ganado es de 3:5 (se ganan 3 de cada 5 eventos que se pierden). -Factor de escala: Yo sólo necesito 3/5 como mucho. ¿Puedes reducirlo al 60%? *-Unidad de medida*: Lleva realizados 5 vueltas de 3/5 de km. para finalizar una carrera de 3km. *-El número en una recta:* 

La Barra como un Modelo Matemático

La figura 2 ilustra como hemos usado los modelos de barra para desarrollar la comprensión de los alumnos de fracciones, decimales, porcentajes y razones. Nosotros generalmente comenzamos con los objetos “reales” y nos movemos hacia representaciones más abstractas a medida que la comprensión de los alumnos se hace más sofisticada, pero un maestro puede desear introducir la representación absoluta en cualquier momento, de acuerdo a como los alumnos están pensando o al contexto del problema. Nosotros elegimos el contexto de los sándwiches submarinos como la primera introducción formal a nuestros alumnos de las fracciones porque la división es *lineal*, entonces los alumnos necesitan concentrarse sólo en una dimensión, y porque el modelo encarna la unidad simple, la longitud. Otros contextos lineales también son usados: vasos graduados para medir, rutas en un mapa y otras cosas similares- para hacer conexiones con la comprensión que los alumnos tienen del mundo real.

A medida que los alumnos se familiarizan con cortar sándwiches y otros modelos “lineales” los dibujos son luego abstraídos a una representación lineal, pero *común*, una barra (ver figura 2 a). Pero aún aquí la barra es usada a la manera de un “número natural”. Cada sándwich submarino, o “sub”, es representado por una barra separada. Los alumnos pueden resolver cada problema de partición usando la barra como modelo o substituto de los objetos reales y contar el número de pedazos para ser distribuidos en total.

El uso de un dibujo para construir el razonamiento acerca de las fracciones es útil de varias maneras. La barra se divide fácilmente en fracciones conocidas o familiares para los alumnos, como ½, 1/3, y ¼, simplemente estimando o midiendo. En las instancias de ½ y ¼, la simetría de la barra permite el desarrollo de estrategias conceptuales que hacen uso de dividir por dos en ocasiones reiteradas. La barra entonces provee un indicador visual del tamaño relativo de estas fracciones y puede ser fácilmente situada en un contexto en el que los alumnos o bien comprendan de manera intuitiva o tengan un acceso experimental, como el compartir sándwiches o cintas de fruta, o medida y distancia (ver Ball, 1993, para una linda descripción de cómo ella usa modelos pictóricos en su enseñanza).

La comprensión que la barra puede ser usada para representar contextos- el numerador (aquí los sándwiches) o el denominador (la gente) - puede significar un salto grande para algunos alumnos (ver fig. 2 b). La fracción debe ser extraída del número de gente por el principio de compartir en forma equitativa: Un pedazo de cada sub es dado a cada una de las cinco personas, resultando en un total de 2/5 de sub para cada una. Debe señalarse que la contabilidad de los objetos es aun esencial, de modo que la abstracción del modelo no es demasiado grande. El salto puede también ser reducido tomando sólo un sub (ver fig. 2 c) y relacionando la fracción a una propiedad física del contexto, como el peso.

La barra puede también ser usada para representar una cantidad que pueda no ser contable en la representación propiamente dicha. En el ejemplo de compartir 30 subs entre 75 personas (fig.2 d), los alumnos deben usar un razonamiento proporcional al dividir la barra equitativamente para descubrir que 5 personas deberían compartir 2 subs. Aquí el alumno dividió la barra primero en tercios, y luego cada tercio en quintos, la fracción reducida. El alumno puede entonces comenzar a ver la relación entre 30/75; 20/50; 10/25, y la fracción irreducible 2/5, con la ayuda del modelo.

Cuando se lo extiende a una representación abstracta de la relación entre dos o más cantidades (ver fig. 2e), la barra de fracción ayuda a los alumnos a conectar diferentes nociones de los números racionales con una indicación visual de las proporciones. A causa de que las notaciones comunes usadas para comunicar números racionales- fracciones, decimales, porcentajes y razones- surgen de la representación común, pueden ser vistas por los alumnos como instancias del mismo concepto matemático. Hemos encontrado que este elemento común es particularmente útil para minimizar las dificultades que se asocian con la enseñanza de las diferentes notaciones de las relaciones parte – todo - fracciones, decimales y porcentajes.

Una herramienta tan gráfica permite un acceso fácil al sentido numérico a aquellos alumnos que tienen una forma de pensamiento más visual, así como también actúa como una herramienta de flexibilización visual para alumnos que tienen una forma de pensamiento más simbólica. Provee una base para desarrollar rutinas conceptuales para el cálculo y ofrece una manera rápida de chequear la racionalidad de las respuestas. Más aún, se extiende al uso de gráficos de dos dimensiones en álgebra, geometría y contextos de estadística.

Viñetas

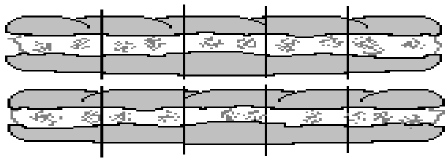
Compartiendo sándwiches submarinos

Esta viñeta (figura 4) describe las estrategias de alumnos de quinto grado en sus primeras experiencias con un modelo de barra. Era su primera experiencia formal con fracciones, aunque su conocimiento informal de fracciones era bastante detallado para las fracciones más comunes como ½, ¼, y ¾. Los alumnos trabajando en grupos, tuvieron que resolver problemas del conjunto que se muestra en la fig. 3 (van Galen et al. 1979). Cuando los grupos terminaron, el maestro los reunió para discutir las estrategias. Sus soluciones son presentadas en la figura 4.

Figura 2: Compartiendo sándwiches submarinos

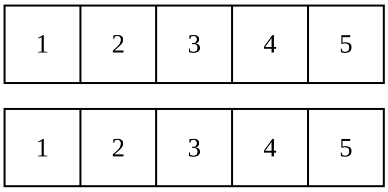
REPRESENTACIÓN	MODELO	PROBLEMAS EJEMPLO

Objetos "reales"



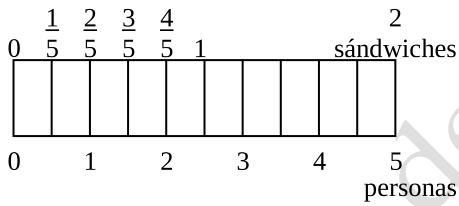
Cinco estudiantes quieren compartir 2 sándwiches submarinos. ¿Cuánto recibe cada alumno?

a) Substituir los objetos "reales"



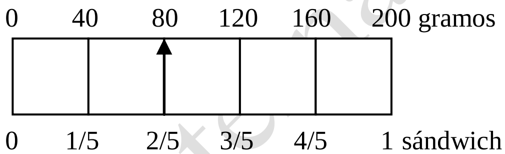
Cinco estudiantes quieren compartir 2 subs ¿Cómo pueden compartirlos de forma equitativa?

b) Partición parte-todo y denominación de los pedazos con fracciones (Aquí la barra representa más de un solo objeto).



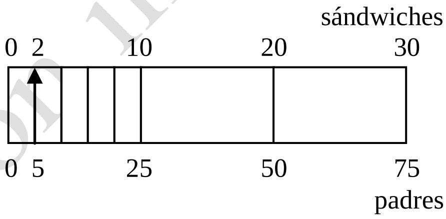
Cinco estudiantes quieren compartir 2 subs ¿Qué fracción recibe cada uno?

c) Relacionar fracciones con las propiedades del objeto. (peso, costo, etc.)



Cada sándwich pesa 200 gramos. Si cada alumno recibe 2/5 de sub ¿cuánto pesa la porción?

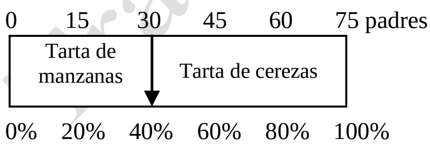
d) Cantidad que representa la relación entre dos conjuntos de objetos.



El consejo de alumnos servirá 30 subs a 75 padres. ¿Cuánto recibe cada padre para comer?

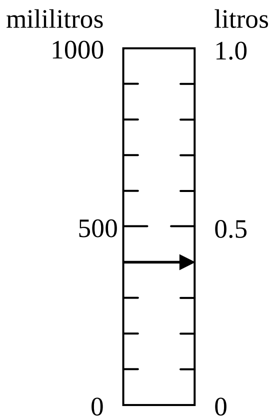
e) Representación abstracta de dos o más cantidades relacionadas.

Porcentaje



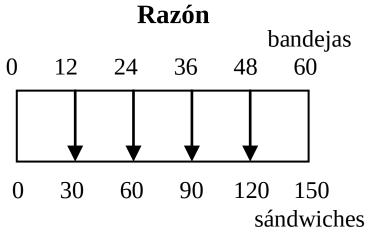
El consejo de estudiantes tiene 30 pedazos de pastel de manzanas y 45 de pastel de cerezas para repartir entre los 75 padres. ¿Qué porcentaje de los padres recibe cada tipo de pastel?

Decimal



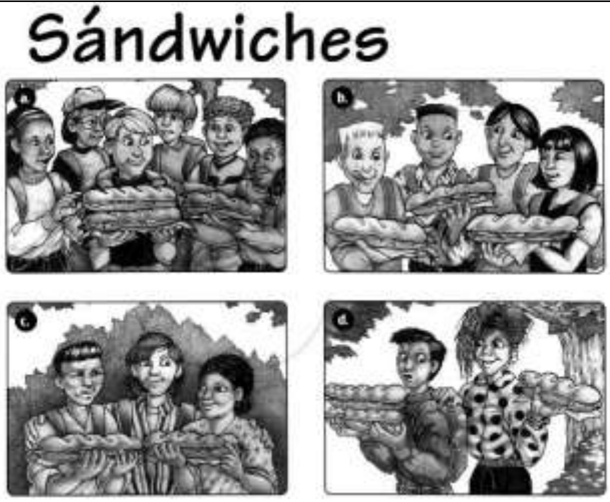
De la reunión sobró 400ml de jugo. Susan tiene una botella de un litro para guardarlo. ¿Hasta dónde se llenará su botella?

Razón



El consejo de estudiantes planea comprar 12 bandejas de ensaladas grandes por cada 30 sándwiches. Si compran 150 subs, ¿cuántas bandejas tendrán que comprar?

Figura 3: Fracciones de sándwiches



En la escuela Booker T. Washington, una clase está planeando una salida de campo. La clase está dividida en grupos de alumnos. Cada grupo de alumnos junta su dinero para comprar sándwiches submarinos para el almuerzo. Cuando llega la hora del almuerzo, cada grupo comparte los subs de forma equitativa.
Arriba, puedes ver cuatro grupos y el número de subs que ellos tienen para compartir.

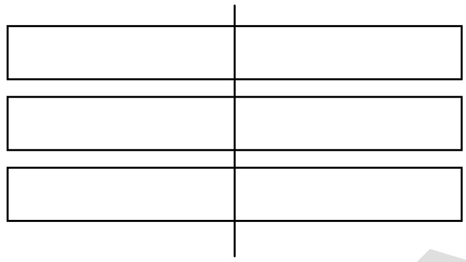
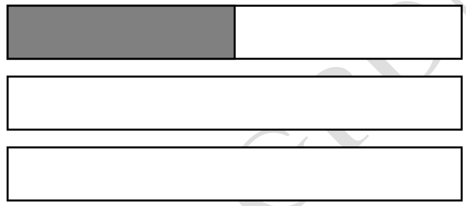
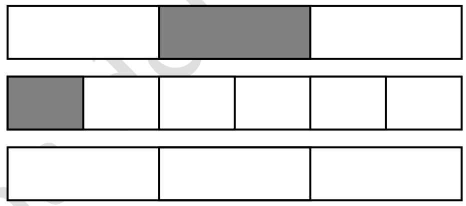
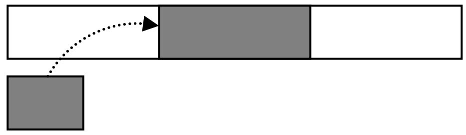
1. ¿En qué grupo los alumnos reciben mayor cantidad para comer?
2. ¿En qué grupo los alumnos reciben menos? Explica tu respuesta
3. Usa los rectángulos que están al lado de cada dibujo para mostrar cómo deberían ser cortados los sándwiches para que cada alumno en el grupo reciba la misma cantidad. Colorea los pedazos para Emmy, Jake, Sandra y Walter. Luego usa fracciones para describir cuánto recibirá cada persona.

4. Haz dos dibujos más de alumnos con sándwiches submarinos. Elige tus propios números para alumnos y subs. Muestra cómo los sándwiches podrían ser repartidos de manera equitativa. Describe en fracciones cuánto podrá recibir cada alumno.

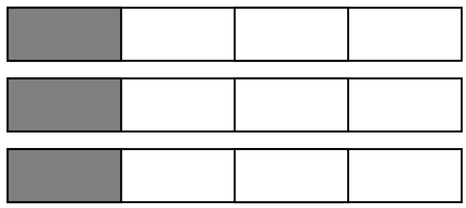
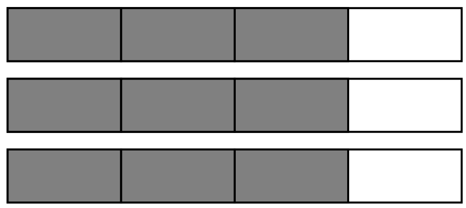
Fuente original del material: Corporación Educativa de la Enciclopedia Británica, *Matemáticas en un Contexto: Algunas de las Partes, 1997.* Todos los derechos reservados. Adaptado con permiso. Sólo puede ser reproducido con propósitos educacionales. Llamar al (800) 554-9862 para ordenar información.

Durante la sesión plenaria, los niños idearon varios métodos para compartir 3 subs de manera equitativa entre seis alumnos. Las soluciones ofrecidas por Beth y Steve fueron las estrategias más comunes, y los alumnos fácilmente vieron que 3 subs divididos en 6 pedazos hacían porciones del mismo tamaño que dividiendo un solo sub en dos pedazos. De todas maneras, los alumnos discutieron acerca de si la fracción representada por la porción debería ser un sexto o un medio. El grupo de Beth sostuvo que la fracción debería ser un medio porque los subs eran cortados en 6 pedazos en total. El grupo de Steve contradecía diciendo. "Sí, pero Emmy sólo recibe un medio de un sub." La maestra preguntó: ¿Quién tiene razón?
"Depende de si tú piensas que el "todo" es un sub o todos los subs. Beth tiene razón si estás tomando una fracción de todos los subs, pero Steve tiene razón si estás hablando de qué parte de un sándwich recibirá ella."

Figura 4: Estrategias de niños de quinto grado usando la barra parra representar fracciones parte –todo.

ALUMNO	ESTRATEGIA	MODELO DE BARRA
	Soluciones para los problemas de compartir 3 subs entre 6 alumnos.	
Beth	Cortar los 3 subs en dos pedazos y dar medio a cada alumno.	
Steve	Cortar todos los subs en dos pedazos y dar la mitad a Emmy.	
Anna	Cortar los 3 subs en tercios. Y luego cortar un sub en 6 pedazos (dividiendo los tercios por la mitad)	
Darren	(Usando la solución de Anna) Mover físicamente un sexto de cada sub al lado de un tercio de un segundo sub para hacer tres sextos.	

Soluciones para los problemas de compartir 3 subs entre 4 alumnos

Jeff	Cortar un sub en un pedazo de tres cuartos y dar el pedazo más grande a Jake.	
Anna	Cortar todos los subs en cuartos, y darle a Jake tres pedazos de un cuarto. Los pedazos restantes son distribuidos entre los otros alumnos.	
Tim	Cortar los tres subs en cuartos, y dar tres pedazos de un cuarto a tres alumnos. Los pedazos restantes se ponen juntos para hacer la última porción de tres cuartos	

Más tarde Anna ofreció una estrategia muy diferente (ver fig. 4). La cuestión que surgió fue si su solución era la misma que la de Steve. Darren usó el modelo de barra de Anna para demostrar que 1/3+1/6=1/2. Las explicaciones de Darren ilustran el uso de la barra para desarrollar los comienzos del razonamiento proporcional. Como las barras son del mismo largo, el “entero” es un valor de contraste y los alumnos sólo necesitaban acomodar las piezas para comparar las diferentes soluciones.

Más tarde, cuando la clase pasó al problema de compartir 3 subs entre 4 alumnos, los niños usaron estrategias similares de cortar y pegar para comprobar si las soluciones diferentes eran equivalentes. Las estrategias de Jeff, Anna y Tim ilustran diferentes maneras en las que los niños usan las barras para probar que tres pedazos de un cuarto son lo mismo que un pedazo de tres cuartos.

Estas estrategias ilustran como los modelos pictóricos como la barra pueden ser usados como una herramienta para la comunicación de todo el grupo de alumnos reunido en plenario. La barra es valiosa como un modelo por el hecho de que permite a los alumnos *mostrar* diferentes niveles de soluciones y sostiene diferentes maneras de expresar las fracciones subyacentes.

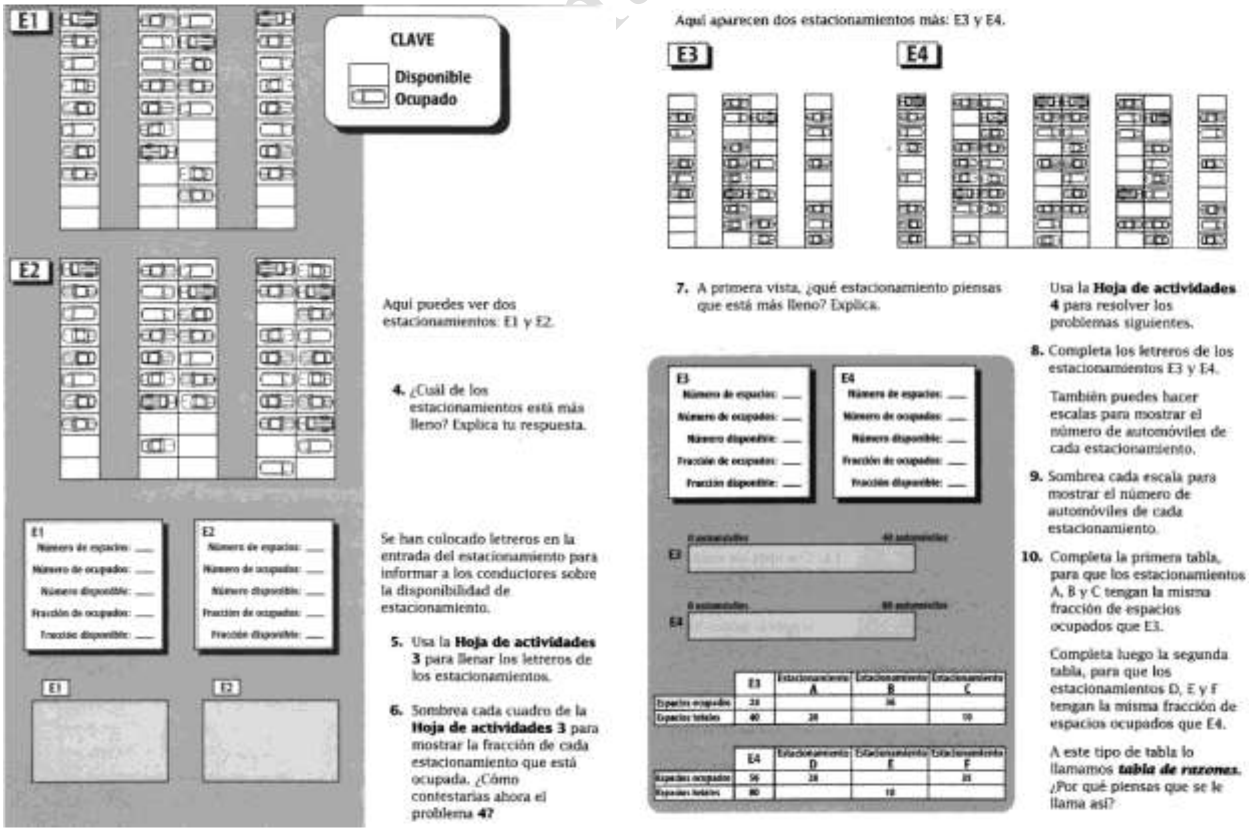
Después de crear sus propias estrategias individuales y de pequeños grupos, los alumnos compartían maneras muy distintas de pensar acerca del problema, y esta discusión era importante para llevar a los alumnos a un nivel mayor de razonamiento. Jeff veía la fracción como tres cuartos de un solo sub. Tim también puede haber percibido la fracción en esta forma. Él inicialmente se mofaba de que no todos los alumnos iban a recibir una porción tan grande, olvidándose de los tres “pedazos de las puntas”. De todas maneras, cuando Anna creó una representación mensurable y distribuyó los pedazos, Tim y el resto de la clase fueron capaces de ver la conexión entre tres cuartos (los tres pedazos) y ¾ (la proporción continua).

Tim: Ellos suman uno, dos, eso haría medio y luego ¡boom! ¡Tienes tres cuartos!

Determinando el uso del estacionamiento

Esta viñeta es de otro quinto grado, que había tenido más experiencia con números racionales. Los alumnos estaban acostumbrados a usar el modelo de barra para estimar fracciones, pero esta actividad fue su primer intento para conectar su conocimiento de fracciones con el nuevo concepto: porcentaje. Se presentó a los alumnos la página de problemas que aparece en la **figura 5** y trabajaban en pequeños grupos (van den Heuvel-Panhuizen et al. 1997). Sus estrategias de solución se muestran en la **figura 6**.

Figura 5: Problemas de estacionamiento



Rae: Yo tomé ½ y un poquito más… Yo encontré 24 aquí [señala la línea de la barra de arriba], y como 40 es la mitad de 80, esto [señala el 24] es la mitad de aquí [señala al 48 en la barra de abajo], entonces esto es 48, y un poco más es 56.

En otro grupo el razonamiento fue menos visual y más de cálculo; de todas maneras, ilustra las conexiones que la barra puede hacer entre estrategias de cálculo y modelos visuales.

Breah: Nosotros dividimos la barra de arriba en 5 espacios iguales y coloreamos 3, y coloreamos 7 (en el estacionamiento 4).

Cal: 3/5=6/10, que es menor que 7/10, entonces el lugar 4 de estacionamiento está más lleno (ver figura 7).

Antes de hacer el ejercicio, Cal pensó que el lugar de estacionamiento 3 estaba más lleno; él se estaba concentrando en el número de espacios vacíos en cada espacio de estacionamiento (16 contra 24) más que en la proporción de lugares ocupados. Más tarde él corrigió su razonamiento para incluir ambos puntos- que si uno estaba buscando un lugar para estacionar, el número de espacios sería suficiente para hacer una decisión, pero si uno estuviera planeando cerrar un estacionamiento, las proporciones serían más adecuadas.

Nótese que aquí, la barra ha evolucionado desde un modelo concreto de los objetos a compartir, como en el ejemplo de sándwiches submarinos, hacia un modelo *relativo* que puede ser usado para realizar comparaciones.

Como los alumnos comenzaron a usar la barra como una herramienta para dibujar según una escala, empezaron a desarrollar estrategias generales para la estimación. La estrategia más común que vemos en quinto grado es la de dividir por dos reiteradamente. Por ejemplo, al siguiente alumno se le pidió que estimara el porcentaje de competidores que abandonaron en una maratón a causa de la lluvia. El número total de competidores era 1603, y el número de los que abandonaron era 91.

Alumno: Es un poco menos que 6 %.

Los dibujos del alumno (**fig. 8**) son un ejemplo claro de división por dos repetida como una estrategia de estimación general. Él halló la mitad del número total de competidores, después de redondear a 1600, y marcar esa posición en la barra. Luego usó su conocimiento previo de porcentajes y fracciones comunes y escribió el 50% que correspondía a los 800 competidores. Luego encontró la mitad de los 800 y marcó 25% en la barra. Repitiendo esta estrategia, nuevamente con un redondeo apropiado, él finalmente terminó con 100 competidores, lo cual corresponde a grosso modo con el 6% del total. Como 91 es un poco menos que 100, una estimación rápida como “Es un poco menos del 6%” parece ser una muy buena y rápida estimación conceptual del 5% representado por el número.

Otras estrategias también fueron usadas. Muchos alumnos como Breah y Cal, usaron su conocimiento previo de fracciones comunes, ½, ¼, ¾, 1/5, y 1/10, para dividir las barras y asignar los porcentajes o razones correspondientes. Otros usaron una combinación de estrategias, como encontrar 3/10, o 30%, y luego dividir por 2 para encontrar 3/20, o 15%. Las barras se volvieron herramientas más flexibles para la estimación y el cálculo.

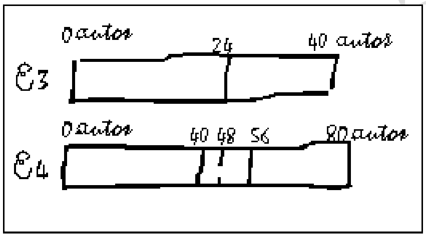


Fig. 6: Una solución visual al problema del lugar de estacionamiento.

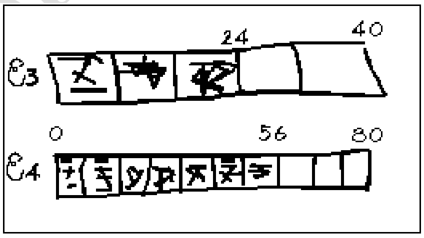


Fig. 7: Una solución más computacional.

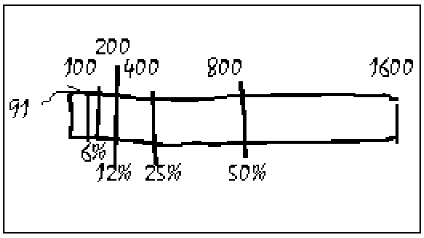


Fig. 8: Estimación usando la división reiterada por 2.

Aplicaciones del Modelo de Barra

En numerosas aplicaciones de la vida real encontramos extensiones del modelo de barra, donde a menudo aparecen como “líneas numéricas dobles”. Por ejemplo casi todas las herramientas para convertir las unidades del sistema métrico decimal a las medidas que se utilizan en los EE.UU. toman esta forma. Un patrón metro – yarda, puede ser leído como una relación lineal o de razón entre dos sistemas de medidas de longitud. Otros ejemplos pueden encontrarse en la **figura 9.**

Figura 9: Aplicaciones del modelo de barra tomadas del mundo real:

Aplicaciones del modelo de Barra en el Mundo Real	Relación Matemática
Gráficos de barras	Proporciones de barras indican una fracción o porcentaje relativo al número total de observaciones.
Indicadores del nivel de llenado en aspiradoras nuevas.	Indicador visual de cuán llena de polvo está la cámara de recolección de una aspiradora.
Medidores de combustible	Los indicadores visuales de cuan lleno está el tanque de combustible de un automóvil pueden ser comparados con su capacidad total en litros o galones. (ej., lleno por la mitad = 7 galones)
Cilindros graduados	1 litro = 1.06 cuartos de galón. 1 decilitro = 100 mililitros. 1 mililitro = 0.034 onzas fluidas. 355 mililitros = 12 onzas fluidas, la capacidad de una lata típica de gaseosa.
Escalas en los mapas	1 km. = 0.625 millas (alrededor de 5 mi/ 8km.). Los mapas más viejos también usan una medida de 16 ½ pies como unidad.
Patrón de metro – yarda	1m. = 3.3 pies. 1cm. = 0.4 pulgadas. ½ m. = 50 cm. 15 m. = 50 pies, la medida promedio de un edificio de cinco pisos.
Medidor de velocidad	88km. por hora = 55 millas por hora, un típico límite de velocidad máxima.
Barras de estado en las computadoras	Muestran cuánto ha sido copiado de un archivo, a menudo están expresadas en bytes o porcentajes.
Medidores de la presión de las cubiertas de un vehículo.	1 kilopascal (Newtons por metro cuadrado) = 0.1458 libras por pulgada cuadrada. 247 kilopascales = 36 libras por pulgada cuadrada, una típica presión de cubierta recomendada para automóviles en E.E.U.U.*

Conclusión

Comparando las barras de fracciones con tablas de razones (en pares) (Middleton y van den Heuvel –Panhuizen 1995) y otras formas de enseñar números racionales, las estrategias numéricas se conectan con las estrategias visuales, permitiendo a los alumnos con maneras diversas de pensamiento, el compartir su comprensión. A menudo las conexiones entre diferentes maneras de representar los números racionales- entre un dibujo, un símbolo y una actividad manipulativa- construyen una comprensión para los niños. (Behr et al. 1992). El modelo de barra es una representación matemática para enseñar números racionales que hace estas transferencias más fáciles. Es una extensión de muchas cosas que muchos buenos maestros ya usan, como tiras o regletas de fracciones, pero puede ser desarrollada para incluir situaciones más complejas. Aunque nosotros nos concentramos en este método de representar razones, no estamos propiciando la imposición de la barra a los alumnos como “la manera correcta de pensar acerca de las fracciones.” En lugar de eso, nosotros creemos que la barra debería surgir naturalmente de los buenos problemas que son fácilmente imaginados como un modelo lineal, y luego puede ser desarrollada como una manera común para los alumnos de mostrar su pensamiento y así facilitar la comunicación. El maestro puede desear proveer dibujos de barras para que los alumnos usen, pero más a menudo, alentarlos a dibujar las representaciones ellos mismos. A medida que los alumnos se familiarizan con las fracciones más comunes, el uso de las barras tiende a disminuir y ser reservado para problemas más difíciles.

Nosotros hemos incluido dos ejemplos de problemas en **la figura 10** para utilizar con los alumnos. El primer problema puede referirse tanto a fracciones como a razones- usando una relación para predecir una cantidad en base al valor de otra diferente - y el segundo problema tiene que ver con el razonamiento vuelto a los porcentajes. Este segundo problema es bastante difícil para muchos alumnos de grados intermedios sin la ayuda de un dibujo, pero se hace mucho más accesible a través del uso de la barra como un modelo de soporte.

Figura 10: Problemas ejemplo (a) y soluciones (b)

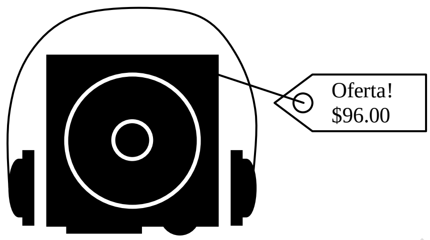
PROBLEMAS

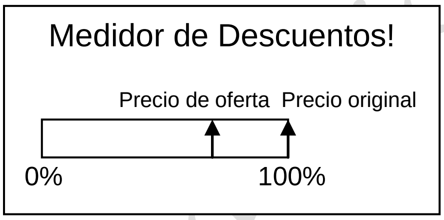
Problema 1

John y Margie están conduciendo de Salt Lake City a Reno. La mamá de Margie le dice que es un viaje de 10 horas. Margie está de acuerdo. “Mirando el mapa, parece ser de 520 millas,” dice ella.
Durante el viaje, John dice, “Nosotros hemos conducido alrededor de 7 horas. Me pregunto cuánta distancia más tenemos que recorrer aún.” Dibuja una barra que ilustre la distancia desde Salt Lake City a Reno. Muestra en la barra el lugar aproximado donde están John y Margie y la distancia que aún deben recorrer. Usando tu dibujo, explica cómo se relacionan entre sí el tiempo y la distancia en los cuales han viajado.

Problema 2

Un centro comercial está realizando una liquidación en su departamento de electrónica. El precio oferta de venta de un reproductor de discos compactos se muestra en la etiqueta del dibujo



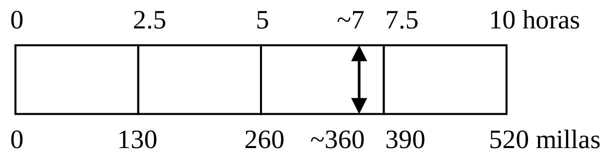


De acuerdo a la barra, ¿cuánto piensas que fue el porcentaje aproximado de descuento? ¿Cuál era el precio original del reproductor de discos compactos?

(a)

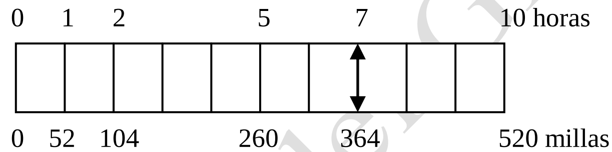
SOLUCIONES

Problema 1: Solución 1



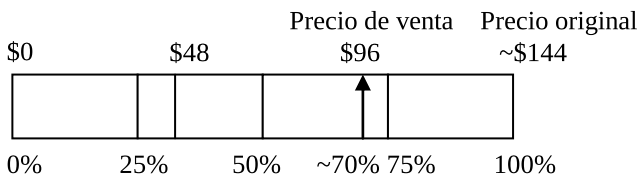
Aquí la división repetida por dos es la estrategia primaria. Luego encontrar el cuarto del viaje (7 ½ horas y 390 millas) y moverse un poco hacia la izquierda para realizar una estimación de 360 millas. Restando esta cantidad de 520 se muestra que quedan alrededor de 160 millas para recorrer.

Problema 1: Solución 2



Esta estrategia es un poco más sofisticada. Encontrar 1/10 de la razón para determinar cuan lejos han viajado en una hora. Luego multiplicar por 7 para determinar la distancia que viajaron en 7 horas.
Una manera alternativa sería dividir por 2 para encontrar la distancia que viajaron en 5 horas.. Encontrar 1/10 de la barra, y doblar esta cantidad para encontrar la distancia que viajaron en 2 horas (o sólo hallar 1/5). Sumar esta cantidad a la distancia que viajaron en 5 horas para encontrar la distancia que viajaron en 7 horas.
Ambas estrategias llevan a una solución exacta de 364 millas en 7 horas, con 156 millas más para recorrer.

Problema 2: Solución



Esta estrategia involucra dividir por 2 los $96 para llegar a $48, aproximadamente 1/3 del precio original. Sumando los $48 a los $96 se aproxima al precio original de $144.
Para estimar el porcentaje del descuento, dos métodos son comunes. El primero reconoce visualmente que el precio de venta es alrededor de 2/3 del total. La mayoría de los alumnos después, o bien recuerdan que 1/3 es un poco más del 33% y estiman que el doble de esta cantidad es 67%, o dividen 100% en tercios y suman dos de los tercios. El segundo método que hemos visto para estimar el porcentaje también involucra la división reiterada por 2. Los alumnos primero hacen una marca para 50% y otra para 75%. Después hacen una estimación “a ojo” de aproximadamente el 70%, o continúan dividiendo por 2 (por ejemplo, encuentran 62.5%, luego 69%, etc.) hasta que piensan que su estimación está lo suficientemente cerca del precio de liquidación.

(b)

Referencias

Ball, Deborah L. “Mitades, Pedazos y Medios: Construcción y Uso de Contextos de Representación en la Enseñanza de las Fracciones.” En *Números Racionales: Una Integración de la Investigación,* editado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, y Thomas A. Romberg. Hillsdale, N.J.: Asociación Lawrence Erlbaum 1993.

Behr, Merlyn J., Guershon Harel, Thomas Post, y Richard Lesh. “Número Racional, Razón y Proporción.” En *Guía de la Investigación de la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática,* editado por Douglas A. Grouws. Reston, Va.: Consejo Nacional de Maestros de Matemática, 1992.

Marshall, Sandra P. “Evaluación de la Comprensión de los Números Racionales: Un Enfoque Basado en Esquemas.” En *Números Racionales: Una Integración de la Investigación,* editado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, y Thomas A. Romberg, 261-88. Hillsdale, N. J.: Asociación Lawrence Erlbaum, 1993.

Middleton, James A., y Marja van den Heuvel-Panhuizen. “La Tabla de Razones: Ayudando a los alumnos a Comprender los Números Racionales” *Enseñanza de la Matemática en los Grados Intermedios 1*(Enero – marzo 1995): 282-88.

Consejo Nacional de Maestros de Matemática (NCTM).*Standards de Curriculum y Evaluación para la Matemática Escolar*. Reston, Va.: NCTM, 1989.

Ohlsson, S. “Significado Matemático y Significado de Aplicación en la Semántica de las Fracciones y Conceptos Relacionados.” En *Conceptos Numéricos y Operaciones en los Grados Intermedios,* editado por James Hiebert y Merlyn Behr. Reston, Va.: Asociación Lawrence Erlbaum, 1988.

Streefland, Leen. “Fracciones: Un Enfoque Realista”. En *Los Números Racionales: Una Integración de la Investigación,* editado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema. Y Thomas A. Romberg, 289 – 325. Hillsdale, N.J.: Asociación Lawrence Erlbaum, 1993.

van den Heuvel – Panhuizen, Marja, Leen Streefland, y James Browne. “Por el Sentido.” En *Matemáticas en un Contexto: Un Curriculum Conectado para Grados del 5° al 8°*, editado por el Centro Nacional de Investigación de la Educación de las Ciencias Matemáticas y el Instituto Freudenthal. Chicago: Corporación Educativa de la Enciclopedia Británica, 1997.

van Galen, Frans, Mónica Wijers, Beth R. Cole, y Julia A. Shew. “Algunas de las Partes.” En *Matemáticas en un Contexto: Un Curriculum Conectado para Grados del 5° al 8°*, editado por el Centro Nacional para la Investigación de la Educación de las Ciencias Matemáticas y el Instituto Freudenthal. Chicago: Corporación de Educación de la Enciclopedia Británica, 1997.

JAMES MIDDLETON, jimbo@imapl.asu.edu, enseña en la Universidad del Estado de Arizona, Tempe, AZ 85287. Sus intereses profesionales se centran en el pensamiento matemático de los niños, la motivación y el cambio en los docentes.

MARJA van den HEUVEL – PANHUIZEN, m.vandenheuvel@fi.ruu.nl. fue durante diez años maestra de grados en la escuela primaria y de educación especial. Desde 1987, ella ha trabajado en el Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, Países Bajos. Ella es una de las personas que desarrolló el material para el proyecto Matemática en un Contexto y está especialmente interesada en evaluación.

JULIA SHEW, shewa@muc.edu. Enseña en la Universidad Mount Union, donde disfruta de trabajar con maestros primarios en formación.

Este artículo fue publicado en la revista Mathematics Teaching in the Middle School – Vol. 3. N° 4 – January 1998, pag. 302-312 - NCTM – Estados Unidos de Norteamérica

Traducido por Nora A. Da Valle y Ailén Bressan Bariloche, Agosto de 2000