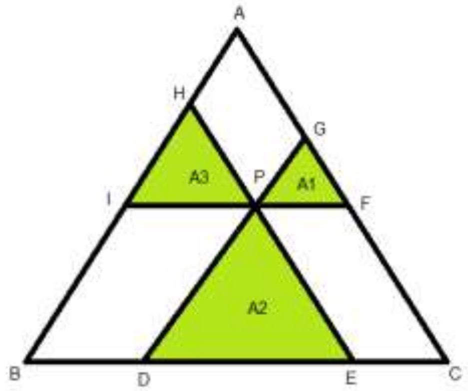
TRIÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO

Marcelo Ponce y Adriana Rabino

Contenidos: propiedades de la semejanza de triángulos.

Se puede demostrar que "*el área del triángulo grande es igual a la suma de las raíces cuadradas de las áreas de los tres triángulos, obtenidos al trazar rectas paralelas a sus lados, elevadas al cuadrado*".



Entonces, ¡atención! estos triángulos se construyen de la siguiente manera:
elijamos un punto P interior al triángulo original. Tracemos por P rectas paralelas a los lados AB, BC y CA; dichas rectas determinan seis puntos sobre los lados del triángulo. Ahora puedes trabajar para demostrar.

Solución

Los triángulos DPE, FGP y HIP son semejantes a ABC (los tres ángulos interiores son congruentes).
Sea "A" el área del triángulo ABC.
La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza $\frac{A'}{A} = k^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{A}} = k$, y se pueden establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A}};\ \frac{PF}{BC} = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}};\ \frac{IP}{BC} = \frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A}}$$

Si: $IP = BD$,$PF = EC$ y $BC = BD + DE + EC$
Tenemos que: $\frac{IP}{BC} + \frac{DE}{BC} + \frac{PF}{BC} = \frac{BD+DE+EC}{BC} = 1$

Sustituyendo y operando: $\frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A}} + \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A}} + \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{A_3}+\sqrt{A_2}+\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}} = 1$

Luego $\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} = \sqrt{A}$

¡Llegamos así a lo que nos habíamos propuesto demostrar!

$$\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3}\right)^2 = A$$

Esta propiedad puede extenderse perfectamente a cualquier tipo de triángulo mientras se respete el procedimiento de construcción de los triángulos interiores.