

COLUMNAS DE NÚMEROS NATURALES

Autor: Marcelo Ponce.

Contenidos: Paridad en N. Sucesiones aritméticas.

PRIMERA PARTE

1. Formar las siguientes **columnas de números naturales** infinitas, ordenadas en filas de la siguiente manera:

1	2	1°
3	4	2°
5	6	3°
7	8	4°
9	10	5°
11	12	6°
13	14	...
15	16	
17	18	
...	...	

a) ¿Es posible saber en qué fila se encontrará el 63, el 204 y el 1022? ¿Y el 20.299?

Al observar la tabla de la derecha se puede deducir que a cada número de fila le corresponde su doble en la columna de pares y el doble menos 1 en la columna de impares. Haciendo el camino inverso, si se conoce el número (en este caso 63 que es impar) y se quiere saber a qué fila corresponde, se le suma 1 y se lo divide por 2:

$$(63 + 1) : 2 = 8 \text{ (fila)} \qquad (20299 + 1) : 2 = 10150 \text{ (fila)}$$

Si el número es par, directamente se lo divide por 2 para saber a qué fila corresponde:

$$204 : 2 = 102 \text{ (fila)} \qquad 1022 : 2 = 511 \text{ (fila)}$$

b) ¿Será cierto que el 1.456.997 se encuentra en la fila 728.499? Justifica tu respuesta.

$$(1456997+1):2 = 728499$$

2. Sumas cruzadas de filas consecutivas

1	2
3	4

 $1+4=3+2$

a) ¿Qué se obtiene si se suman los números cruzados de dos filas consecutivas? Expresar una conjetura comprobando en varias sumas cruzadas.

b) Demostrar esta propiedad: “Si se suman los números cruzados de dos filas consecutivas en la tabla se obtiene el mismo resultado”.

Consideramos a **X** un número natural cualquiera, par o impar

X	X+1
X+2	X+3

$$X + (X+3) = (X + 1) + (X + 2) = 2X + 3$$

c) La suma cruzada dio como resultado 43, ¿de qué número se trata **X**?

En este caso, se puede resolver completando la tabla hasta llegar a los número que sumados dan 43, porque se trata de un número pequeño. Pero también se puede hacer despejando x : $x + (x + 3) = 43$ da $x = 20$ que es par. En este caso, en la primera columna estarían los pares y en la segunda columna los impares.

d) Otra suma cruzada dio como resultado 297. Completar la tabla con los números correspondientes y elaborar un procedimiento para encontrarlos.

Se puede resolver de diferentes maneras. Atendiendo a la demostración anterior, se puede expresar que $x + (x + 3) = 297$, o que $(x + 1) + (x + 2) = 293$. Luego hallar el valor de x . También como se sabe que una columna es de números pares y la otra es de números impares, se puede proceder así:

$$\begin{aligned} 2x + (2x+1) &= 297 \\ 4x &= 297 - 1 \\ x &= 296 : 4 \\ x &= 74 \end{aligned}$$

Por lo tanto el primer número par será: $2x = 2 \cdot 74 = 148$

El impar será $2 \cdot 74 + 1 = 149$

En la tabla se obtienen los restantes números sumando 1 y restando 1

147	148
149	150

e) Encontrar los números que conformar las siguientes sumas: 677, 1085 y 10.881

f) ¿En qué filas se encuentran los números que dan las sumas cruzadas anteriores?

Una vez encontrado el número par se lo divide por 2 y nos da el número de la fila.

g) La suma de dos números consecutivos, ¿puede ser 38? Justificar.

La suma de un número par y otro impar es siempre un número impar, como se demuestra a continuación:

2.n "Número par"
 2.n + 1 "Número impar"
 La suma de un par e impar es impar:
 $2n+(2n+1)=4n+1=2 \cdot (2n)+1$
 2.(2n) "Número par"
 2.(2n)+1 "Número impar"

Por lo tanto, la suma cruzada nunca puede dar 38 que es par.

También se puede verificar esta conclusión planteando cualquiera de las ecuaciones anteriores. Suponemos que la suma es 38:

$$\begin{aligned} 4x+1 &= 38 \\ 4x &= 38 - 1 \\ x &= 37:4 \end{aligned}$$

Como 37 no es divisible por 4, este resultado no se puede hallar en el conjunto de los números naturales.

3. ¡¡Más sumas!!

		Filas
1	2	1º
3	4	2º
5	6	3º
7	8	4º
9	10	5º
11	12	6º
13	14	...
15	16	
17	18	
....	

a) Seguir el siguiente procedimiento "Realizar la suma cruzada de los números de la 1º y 2º filas y anotar el resultado, seguidamente ejecutar la suma cruzada de los números de la 2º y 3º filas y escribir el resultado, luego de la 3º y 4º y así sucesivamente....."

b) ¿Qué se puede decir de los resultados obtenidos?

Se obtienen: 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ... Es el conjunto de números naturales, empezando por el 5, y la diferencia entre ellos es siempre 4.

c) ¿Será posible escribir una ley que permita obtener estos números?

En efecto, resulta ser una sucesión aritmética de razón 4, cuya fórmula general es $a_n = 4n + 1$ donde n es la posición de los elementos de la sucesión. Pero además, n coincide con el número de fila correspondiente al primer término de la suma cruzada.

d) ¿Cómo se puede utilizar esta fórmula general para saber si el 209 es la suma de dos números cruzados de filas consecutivas? Explicar el procedimiento.

Se puede hallar el valor de n por alguno de los caminos utilizados anteriormente o bien usando la fórmula de la sucesión aritmética:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \text{ (esta fórmula es sencilla de deducir)}$$

$$209 = 5 + 4(n - 1)$$

		Filas
103	104	52º
105	106	53º

$204 = 4(n - 1)$ por lo tanto, $52 = n$

e) Explicar por qué 163 no es el resultado de la suma de dos números cruzados de filas consecutivas.

Se debería cumplir que n es un número natural al reemplazarlo en la fórmula y no lo es:

$163 = 5 + 4(n - 1)$

$158 = 4(n - 1)$

$n = 34,5$

f) ¿Qué condición/es debe cumplir el número para que sea la suma de dos números cruzados de filas consecutivas?

Se deduce del punto d).

4. Sumas cruzadas de filas no consecutivas (saltando una fila):

1	2	1º
3	4	2º
5	6	3º
7	8	4º
9	10	5º
11	12	6º
13	14	...
15	16	...
17	18	...
....

a) ¿Qué sucede si la suma cruzada es de números saltando una fila (no consecutivas)? Investigar.

b) ¿Cuál es la sucesión de las sumas cruzadas en este caso? ¿Y su fórmula?

7, 11, 15, 19, 23, 27,... La fórmula ahora es $a_n = 4n + 3$ (n = número de fila)

c) Si se elige el número 576 para realizar una suma cruzada ¿de qué fila se deben seleccionar los otros números para componer la suma? ¿Cuánto vale esa suma?

El 576 está en la fila 288 (como es un número par se divide por 2 directamente), se pueden escoger los números de la fila 290, que son 579 y 580. La suma es 1155. También se puede ir para arriba hasta la fila 286, en esta caso la suma es 1147.

571	572	fila 286
573	574	
575	576	fila 288
577	578	
579	580	fila 290

d) La suma de dos números de filas no consecutivas da 1687, completa la tabla:

		Filas

Los números están en la fila 421, se multiplica por dos y da 842 los restantes números se buscan siguiendo los procedimientos anteriores.

$$\begin{aligned} 4n + 3 &= 1687 \\ 4n &= 1684 \\ n &= 421 \end{aligned}$$

e) ¿Será posible que la suma de dos números de filas no consecutivas sea 47? De ser cierto, ¿de qué filas provienen esos números?

x	x + 1
x + 2	x + 3
x + 4	x + 5

Luego, $x + (x + 5) = 47$ $2x + 5 = 47$ $x = 21$ $21 + 26 = 47$ (fila 11).

5. ¡¡¡Muchas más sumas!!!

1	2	1º
3	4	2º
5	6	3º
7	8	4º
9	10	5º
11	12	6º
13	14	...
15	16	
17	18	
...	...	

Probar ahora las sumas cruzadas saltando dos filas, tres o más filas.

Indicar las sucesiones correspondientes a esas sumas y extraer las fórmulas de cada una.

Dar problemas como los siguientes:

a) Se suman los números de filas separadas por otras dos y se obtiene 189 ¿Cuáles son esos números? ¿En qué filas se encuentran?

$$x + (x + 7) = 189 \text{ o } 2x + 7 = 189 \Rightarrow x = 91 \text{ (filas 41 y 44)}$$

b) Observa la siguiente sucesión de números:

9, 13, 17, 21, 25,..... ¿qué relación guarda esta sucesión de números y las sumas cruzadas? Escribe la fórmula general.

Siempre la diferencia de estas sucesiones es 4 ¿por qué?

x	1	3	5	...
$a_n = 2x + 7$	9	13	17	...

c) Justificar la siguiente afirmación: “Si el número pertenece a la sucesión anterior entonces es el resultado de la suma de dos números de filas separadas por otras dos” Por ejemplo, como $9 = 1 + 8 = 2 + 7$ y $13 = 3 + 10 = 4 + 9...$, entre 1 y 8 hay dos filas entre medio.

¡Un paso más allá!

a) Se sumaron dos número de forma cruzada y su suma resultó 57, ¿cuáles son esos números? ¿De qué filas provienen? ¿Existe más de una posibilidad de obtener 57 sumando otras filas? (Organizar la información en una tabla y sacar conclusiones)

b) Realizar el mismo razonamiento para una suma cruzada que da 39.

c) Extraer una conclusión.

a) Posibles soluciones

$4n+1 = 57$ 1º- los números están en la fila 14 y 15 son 27, 28, 29, 30
 $n = 14$

$4n + 5 = 57$ 2º- los números están en la fila 13 y 16 (ya que debo saltar dos filas) y
 $n = 13$ son 25, 26, 31,32

$4n + 9 = 57$ 3º- los números están en la fila 12 y 17 (salto cuatro filas) y son 23, 24,
 $n = 12$ 33, 34

4º $4n + 13 = 57$ - los número están en la fila 11 y 18 (salto seis filas) y son 21,22, 35,36
 $n = 11$

Como se aprecia en la tabla existen diversas maneras de obtener 57. Se puede organizar la información en una tabla:

Orden	Sucesión	Valor de n		Filas a sumar	Números en cada fila
1	$4n + 1$	14	14	15	27,28,29,30
2	$4n + 5$	13	13	16	25,26,31,32
3	$4n + 9$	12	12	17	23,24,33,34
4	$4n + 13$	11	11	18	21,22,35,36
5	$4n + 17$	10	10	19	19,20,37,38
6	$4n + 21$	9	9	20	17,18,39,40

7	$4n + 25$	8	8	21	15,16,41,42
8	$4n + 29$	7	7	22	13,14,43,44
9	$4n + 33$	6	6	23	11,12,45,46
10	$4n + 37$	5	5	24	9,10,47,48
11	$4n + 41$	4	4	25	7,8,49,50
12	$4n + 45$	3	3	26	5,6,51,52
13	$4n + 49$	2	2	27	3,4,53,54
14	$4n + 53$	1	1	28	1,2,55,56

Por lo que no se obtiene como resultado un número natural. El número dado no pertenece a las familias de sucesiones anteriores, por lo que se deben buscar otras sucesiones:

$$\begin{aligned} 4n + 1 &= 39 \\ n &= 9,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4n + 5 &= 39 \\ n &= 8,5 \end{aligned}$$

Orden	Sucesión	Valor de n	Filas a sumar		Números en cada fila
1	$4n + 3$	9	9	11	17,18,21,22
2	$4n + 7$	8	8	12	15,16,23,24
3	$4n + 11$	7	7	13	13,14,25,26
4	$4n + 15$	6	6	14	11,12,27,28
5	$4n + 19$	5	5	15	9,10,29,30
6	$4n + 23$	4	4	16	7,8,31,32
7	$4n + 27$	3	3	17	5,6,33,34
8	$4n + 31$	2	2	18	3,4,35,36
9	$4n + 35$	1	1	19	1,2,37,38

Conclusión: las sumas de números cruzados, sólo pueden pertenecer a una familia de sucesiones de la forma:

$$a_n = 4n + x_i \text{ (con } n \wedge x \in \mathbb{N}, i = 1, 2 \dots \text{)}$$

Siendo $x_1 = 4m - 3$ (con $m \in \mathbb{N}$) o $x_2 = 4m - 1$ (con $m \in \mathbb{N}$)

- Se toma el número “suma” dado.
- Luego se determina x_i sustituyendo a m con números naturales, estimando una aproximación.
- Se despeja n , si el número es natural se construye la sucesión que permitirá encontrar todos los números y filas que corresponden a esa suma cruzada.