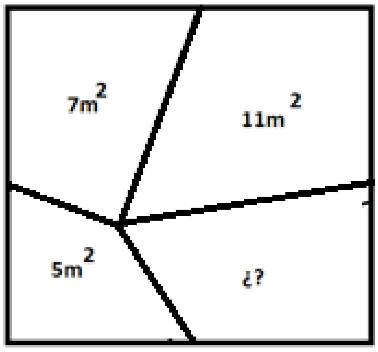
ÁREA DESCONOCIDA (nivel secundario y superior)

Adriana Rabino, Patricia Cuello y Marcelo Ponce

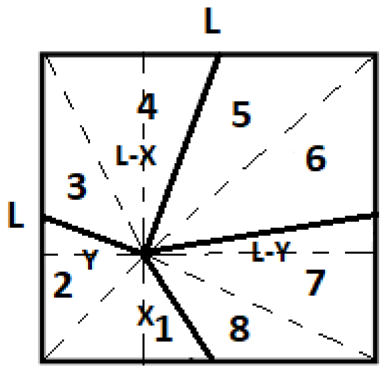
Extraído de DIARIO EL DÍA | LA OPINIÓN DE TENERIFE- GENTE Y CULTURAS. www.eldia.es
10 de noviembre de 2019

Tenemos un cuadrado en el que hemos marcado los puntos medios de cada lado y lo hemos dividido en cuatro regiones como muestra la figura:

A. Calcular el área de la región ¿ ?
B. Al calcular el área de la región faltante surge la conjetura de una propiedad. ¿Puedes demostrarla?



A. Una **posible solución** sería trazar las paralelas de los lados que pasen por el punto de encuentro interior. Quedan determinados 8 triángulos. Con los datos que se tienen de las medidas de las regiones, se sabe que:



$L^2 = 5 + 7 + 11 + Z \Rightarrow$ $\mathbf{L^2 = 23 + Z}$

Y se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

De los triángulos (1)y(2): $\frac{1}{2} \cdot L.x/2 + \frac{1}{2} \cdot L.y/2 = 5$

$\frac{1}{4} \cdot L \cdot (x + y) = 5$

$\mathbf{L \cdot (x + y) = 20}$

De los triángulos (5)y(6): $\frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot (L - y) + \frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot (L - x) = 11$

$L^2 - L.y + L^2 - L.x = 44$

$\mathbf{2.L^2 - L.(y + x) = 44}$

De los triángulos (7)y(8): $\frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot (L - y) + \frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot x = Z$

$\frac{1}{4} \cdot L^2 - L.y + \frac{1}{4} \cdot L \cdot x = Z$

$L^2 - L \cdot y + L \cdot x = 4 \cdot Z$

$\mathbf{L^2 - L \cdot (y - x) = 4 \cdot Z}$ **(a)**

De los triángulos (3)y(4): $L/2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (L - x) + \frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot y = 7$

$L \cdot (L - x) + L \cdot y = 28$

$L^2 - L \cdot x + L \cdot y = 28$

$\mathbf{L^2 + L.(y - x) = 28}$ **(b)**

Sumando (a) y (b) se tiene: $2L^2 = 28 + 4Z$

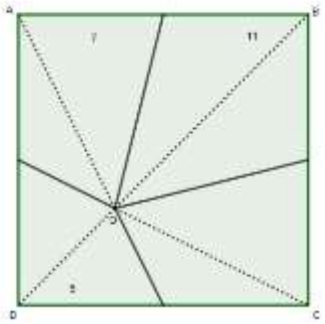
Reemplazando L^2: $2 \cdot (23 + Z) = 28 + 4Z$

$$46 + 2Z = 28 + 4Z$$
$$\mathbf{9 = Z}$$

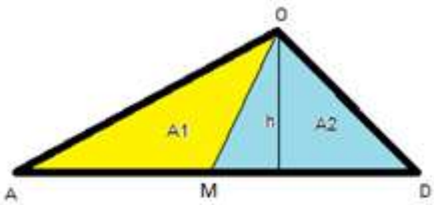
El área faltante mide 9m²

Otra **posible solución**

Sabemos que los segmentos trazados desde O a los lados del cuadrado interceptan a los mismos en el punto medio.
Trazamos los segmentos que unen el punto O con los vértices del cuadrado ABCD (líneas punteadas).



En el triángulo AOD, el segmento OM es la mediana del triángulo respecto del lado AD (por hipótesis, pues m es el punto medio del cuadrado).Como AM = DM, los triángulos AOM y DOM tiene la misma base y altura “h”, por lo tanto la misma área: A1 = A2



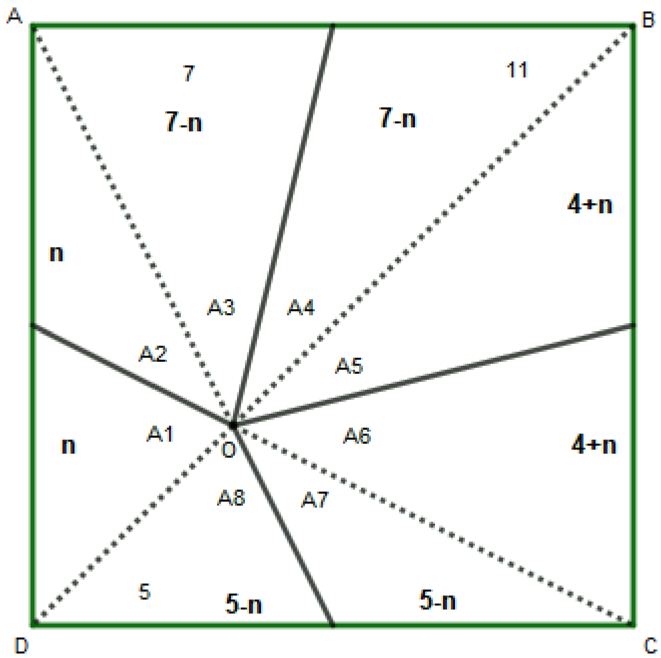
Extendiendo este razonamiento a los triángulos ABO, BOC y DOC del cuadrado tenemos:

$A_1 = A_2 = n$
$A_2 + A_3 = 7 \Rightarrow A_3 = 7 - n$

$A_3 = A_4$
$A_4 = 7 - n$
$A_4 + A_5 = 11 \Rightarrow 7 - n + A_5 = 11$
⇨ $A_5 = 11 - 7 + n$
O sea $A_5 = 4 + n$

$A_1 + A_8 = 5$
$n + A_8 = 5$
$A8 = 5 - n$

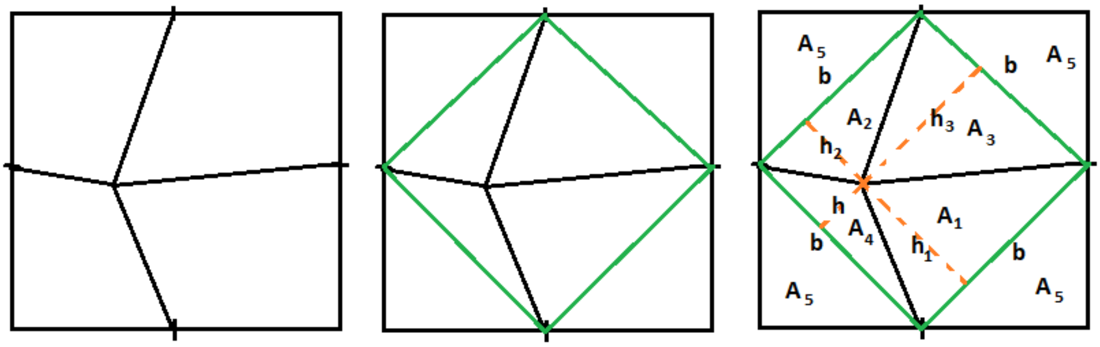
$A_6 + A_7 = 5 - n + 4 + n$
Por lo tanto la región desconocida
$\mathbf{A_6 + A_7 = 9m^2}$



B. Al tener este resultado se puede observar que las áreas de los pares de cuadriláteros opuestos suman lo mismo.
Nos podemos preguntar si siempre sucederá esto, cualquiera sea la ubicación de O.
Para establecer una **conjetura** habría que verificar si se cumple en más casos. Para ello es óptimo utilizar algún programa de geometría dinámica, por ejemplo, el Geogebra:

Dibujar un cuadrado, poner un punto con "punto sobre objeto" dentro del cuadrado. Marcar los puntos medios de los lados del cuadrado. Desde ese punto interior armar los cuatro cuadriláteros tocando los puntos medios de lados y vértices del cuadrado (para responder a una figura semejante del enunciado). Calcular el área de cada cuadrilátero. Con el puntero mover este punto interior y corroborar que la suma de las áreas de los diferentes cuadriláteros opuestos es la misma, pero a su vez las dos sumas coinciden, con lo cual el área de los cuadriláteros opuestos es la mitad del área del cuadrado.

Una vez establecida esta conjetura hay que **demostrarla:**
Se tiene un cuadrado y desde un punto interior se indican los puntos medios de cada lado. Se une un punto interior cualquiera con cada uno de estos puntos medios. Quedan determinados cuatro cuadriláteros (hipótesis).
Queremos demostrar que la suma de las áreas de los cuadriláteros opuestos es la misma.
Para ello, unimos los puntos medios de los lados del cuadrado (queda determinado otro cuadrado cuya área es la mitad de la del cuadrado original, por propiedad). De esta manera se trabaja con triángulos que es más fácil, luego se hace la extensión a los cuadriláteros dado que los 4 triángulos de las esquinas son iguales (por propiedad de triángulos L.A.L.)



Las bases de esos triángulos son congruentes. Trazamos las alturas y:
$h_1 + h_2 = b$
$h_3 + h_4 = b$
$A_1 + A_2 = b \cdot h_1/2 + b \cdot h_2/2 = b \cdot (h_1 + h_2)/2 = b^2/2$
$A_3 + A_4 = b \cdot h_3/2 + b \cdot h_4/2 = b \cdot (h_3 + h_4)/2 = b^2/2$
Queda así demostrado que la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la misma.
Si a cada triángulo le sumáramos el área (constante) de cada triángulo de las esquinas del cuadrado (que son congruentes), queda demostrada la propiedad por ley de monotonía:
$A_1 + A_2 = A_3 + A_4$
$A_5 = A_5$
Por lo tanto: $A_1 + A_2 + A_5 = A_3 + A_4 + A_5$
Conociendo esta propiedad se podría haber resuelto el problema original directamente, haciendo $\mathbf{5m^2 + 11m^2 - 7m^2 = 9m^2}$