LA ILUSIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD

Autores: Adriana Rabino y Patricia Cuello

Nivel medio (2° año)

Una mayor interacción entre experiencias de dentro y fuera de la escuela haría que el aprendizaje fuera más significativo para los estudiantes. La escuela debería ser un laboratorio de la vida y sería ideal que ellos aprendieran a transferir conocimientos de un contexto a otro.

Un contenido óptimo para establecer esa interacción es el de la **proporcionalidad**, ya que es una herramienta matemática para interpretar y aplicar en múltiples fenómenos de distintos campos de la actividad humana.

El modelo lineal está profundamente arraigado en el conocimiento institucional de los estudiantes y es usado de forma espontánea como si usar la proporcionalidad fuera natural e incuestionable, hasta el punto de transformarse en un obstáculo epistemológico ("ilusión de la proporcionalidad"). De ahí la importancia de enseñar a los estudiantes a distinguir problemas proporcionales y no proporcionales. Suele pasar que algunos que aplican algoritmos correctamente en problemas de proporcionalidad, como la regla de tres, no necesariamente tienen "razonamiento proporcional" (es decir, entender la relación de equivalencia entre dos razones). Entonces se trata de que adquieran la habilidad en reconocer, en primera instancia, si un problema es de proporcionalidad directa, inversa, de adición o de cualquier otra relación numérica.

Muchas veces los estudiantes creen que las magnitudes son proporcionales cuando ambas crecen o decrecen simultáneamente (para la proporcionalidad directa), y si una crece y la otra decrece piensan que se trata de magnitudes inversamente proporcionales. Se ha observado que desde la primaria, muchas veces, se enseña así, especialmente para que los estudiantes puedan identificar la proporcionalidad "directa" de la "inversa". Este error conceptual conduce a los mismos a equivocarse al momento de resolver problemas sin comprender el real concepto de proporcionalidad. Además, esta falta de comprensión se fortalece por el hecho de que si se está en la clase de matemática y el tema a tratar es proporcionalidad, los estudiantes ya presuponen que los problemas que se dan son todos de proporcionalidad y no tienen que hacer el esfuerzo de identificarlos si lo son o no.

El **propósito** de esta secuencia de **proporcionalidad** es que el estudiante descubra, ante situaciones problemáticas en distintos contextos, de qué tipo de problemas se trata y que vea que algunos de ellos cumplen con ciertas regularidades y otros no. Luego, centrándose en esas regularidades (y siempre con el apoyo de contextos ricos y significativos), se pretende que descubran propiedades de la proporcionalidad y lleguen, por último, a construir la definición de proporcionalidad (directa e inversa) y su aspecto funcional.

Entonces, antes que nada, ¡atención! (aunque nos gustaría tener esa ilusión), no todos los problemas responden a una proporcionalidad.

Metodología: En esta propuesta se presentan primero distintos problemas (algunos de proporcionalidad y otros no) en distintos contextos y con el propósito de que el estudiante busque el camino hacia su solución. De esta manera se les pide que organicen la información (puede ser en tablas, listas, diagramas) y descubran regularidades en aquellos problemas que responden a una proporcionalidad, luego naturalmente (y siempre apoyándose en el contexto) surgirán las propiedades, la constante de proporcionalidad y su ley o fórmula. Las tablas son especialmente adecuadas para evidenciar estas relaciones. Destacamos en este proceso la importancia del contexto que es primordial para que hagan este reconocimiento.

El siguiente es un pequeño resumen teórico para el docente pero que puede utilizarse al final de la secuencia a modo de institucionalización.

PEQUEÑO RESUMEN TEÓRICO

DEFINICIÓN

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando es posible encontrar un valor fijo k (llamado constante de proporcionalidad) tal que dado un valor x_n cualquiera de una de las magnitudes es posible encontrar el valor correspondiente y_n de la otra magnitud al multiplicar x_n por k .

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando es posible encontrar un valor fijo k (constante de proporcionalidad) tal que dado un valor x_n cualquiera de una de las magnitudes es posible encontrar el valor correspondiente y_n de la otra magnitud al dividir k por x_n .

PROPIEDADES

- Se trata de una correspondencia funcional, a cada elemento de una de las magnitudes le corresponde uno y solo uno de la segunda. Para todo x existe un y tal que f(x) = y.

Proporcionalidad directa:

- Si a un elemento de la primera magnitud se lo multiplica por una constante, el correspondiente de ese elemento también queda multiplicado por la misma constante con respecto al resultado anterior: $x_1 \dashrightarrow y_1 \Rightarrow k.x_1 \dashrightarrow k.y_1$.
- Se conserva la adición entre magnitudes: si se suman o restan dos valores cualesquiera de la primera magnitud al resultado le corresponde la suma o diferencia de los correspondientes de la segunda: $x_1 \dashrightarrow y_1 \Rightarrow x_1 + x_2 \dashrightarrow y_1 + y_2$.
- Es posible determinar la constante k de proporcionalidad: y/x = k.
- A la constante de proporcionalidad le corresponde la unidad en la primera magnitud: k-->1.
- Si se grafica una función de proporcionalidad directa se obtiene una recta que pasa por el origen.

Proporcionalidad inversa:

- Si a un elemento de la primera magnitud se lo divide por una constante, el correspondiente de ese elemento queda multiplicado por la misma constante con respecto al resultado anterior: $x_1 \dashrightarrow y_1 \Rightarrow x_1/k \dashrightarrow y_1.k$.

- Es posible determinar la constante k de proporcionalidad: y.x = k.
- Si se grafica una función de proporcionalidad inversa se obtiene una hipérbola.

La constante de proporcionalidad sirve como una herramienta más para encontrar valores correspondientes (además de las propiedades) ya que y/x = k (directa) o y.x = k (inversa), pero además sirve para corroborar si dos magnitudes que están relacionadas son directamente o inversamente proporcionales o ninguna de las dos.

LAS ACTIVIDADES DE ESTA SECUENCIA ESTÁN DIVIDIDAS EN TRES PARTES CON OBJETIVOS BIEN DIFERENCIADOS.

Los estudiantes pueden trabajar en grupos de a tres, aunque el registro de la producción debe ser individual.

PRIMERA PARTE

Objetivo: que los estudiantes analicen situaciones problemáticas en distintos contextos e identifiquen aquellas que son proporcionales.

Se dan problemas variados, algunos proporcionales y otros no. Se pedirá que organicen la información para poder llegar a la solución.

SEGUNDA PARTE

Objetivo: que los estudiantes utilicen las tablas de razones como herramienta para re-descubrir las propiedades de la proporcionalidad, la constante de proporcionalidad y la ley de formación, en aquellos problemas que responden a una proporcionalidad.

El siguiente es un aporte teórico (para el docente) que puede ayudar a potenciar el uso de la tabla de razones con sus estudiantes.

TABLA DE RAZONES

La tabla de razones es una herramienta (modelo) muy práctica que se puede utilizar para resolver muchos problemas de proporcionalidad. Basta con tener dos valores numéricos relacionados entre sí (razón), luego efectuando operaciones de suma o resta, o multiplicación por una constante (propiedades) se puede obtener el resultado que dará solución al problema (llegando a una misma razón). En general se usa la combinación de varias operaciones para llegar al resultado deseado.

La tabla de razones es una herramienta flexible de cálculo que el alumno puede usar para resolver variados problemas, tanto de multiplicación, de división o de razones. Como la palabra lo indica, la tabla de razones es una serie de razones organizadas en una tabla. Una de las ventajas es que permite a los estudiantes escribir pasos intermedios en el transcurso de la resolución. Otra ventaja es que los estudiantes construyen estrategias aditivas con las cuales se sienten cómodos, siendo las mismas un soporte para el cálculo escrito, y para desarrollar estrategias de cálculo mental y estimativo.

Otra de las ventajas es que se familiarizan con la idea de razones equivalentes sin necesidad de un lenguaje o notación formales. De esta forma va adquiriendo el "razonamiento proporcional". Asimismo es un patrón visible que los estudiantes pueden analizar con facilidad y un registro visual de las estrategias empleadas, que el docente puede usar para comprender y evaluar el trabajo de sus estudiantes.

Al hacer que los alumnos se familiaricen y trabajen con tablas de razones es probable que entre ellos comparen sus tablas y sus diferentes estrategias. Hay que tener en cuenta y enfatizar con los estudiantes de que no hay una única manera de resolver un problema utilizando tablas de razones, con lo que los procedimientos no necesariamente son los mismos. Puede suceder que un método sea más rápido o más fácil de comprender para un alumno que para otro. Se les puede preguntar: "¿hay alguien que lo haya resuelto de otra forma?" Las explicaciones pueden variar, pedirles que expliquen por qué utilizaron ese camino, aceptando cualquier respuesta razonable. Las estrategias que pueden aparecer: sumar o restar, multiplicar o dividir por 10, multiplicar o dividir por 2, multiplicar o dividir por cualquier constante. Se les puede preguntar a los alumnos si encuentran un camino más corto para resolver el problema (a veces las tablas se pueden prolongar un poco…), pero es interesante que nos digan si piensan que un camino más corto resulta más fácil; **una tabla más corta es mejor sólo si resulta más fácil para el alumno. Si los números son difíciles de trabajar, a veces el camino más largo es mejor.**
Así, la tabla de razones se transforma en un recurso poderoso, no sólo para los estudiantes sino para los docentes, siempre y cuando sea presentada como un recurso flexible y no como *la única* manera de resolver problemas de razones.

Nota: los valores en la tabla de razones no necesitan estar ordenados. Se pueden ir agregando columnas con los valores que se necesiten a conveniencia y la cantidad que se quiera hasta lograr la solución.

TERCERA PARTE
Objetivo: que los estudiantes resuelvan problemas de proporcionalidad en distintos contextos y con distintas representaciones.

ACTIVIDADES PARA LOS ESTUDIANTES

PRIMERA PARTE

1."Si un niño de 9 años mide 1,23 metros, en su cumpleaños 18° medirá 2,46 metros". Decir si es correcto/incorrecto. ¿Por qué? ¿Puede esta relación ser correcta si cambiamos solo un número? Si es así, de qué forma? Si no, explicar por qué.

2. Receta de postre de chocolate (3 personas):

120 g de chocolate
9 cucharadas de crema
2 huevos
4 cucharadas de licor de café
4 cucharadas de azúcar

¿Cuáles son las cantidades si se quiere hacer un postre para 4 personas?

3. Si se necesitan 8 ml para pintar una tapa de madera cuadrada de 12cm de lado, ¿cuánta pintura se necesita para pintar una superficie cuadrada de 36cm de lado?

4. Milly tardó 5 minutos para coser a máquina una cinta alrededor de una toalla de forma cuadrada de 30cm de lado. Entonces, ella calcula que le llevará 30 minutos para coser esa cinta alrededor de un mantel cuadrado de 180cm de lado. ¡¿Es correcto el cálculo de Milly? Si no, cuánto tiempo necesitará para terminar el mantel?!

5. "LA MARCHA DE LOS PINGÜINOS IMPERIALES
¡Hermosa película! (de Luc Jacquet): "En el lugar más frío de la Tierra, el amor encuentra un camino".

En el agua el pingüino emperador es como un delfín. Elegante, potente y rápido. En tierra es todo lo contrario, torpe y desprotegido. Entonces, ¿por qué abandona su medio natural para caminar cientos de kilómetros a través de los inhóspitos, helados parajes y en medio de condiciones adversas hasta lo más recóndito de la Antártida? Sólo tiene un motivo y es esencial: la supervivencia de su propia especie.
En ese camino adverso entre el alimento que está en el mar y el lugar donde empollan, tanto hembras como machos se turnan para ir a buscar el sustento vital. Para ello van y vuelven varias veces recorriendo cientos de kilómetros. Muchas veces son sorprendidos por tormentas de viento y nieve, en las cuales detienen su marcha, se juntan unos con otros formando un círculo para buscar el calor de sus cuerpos y el amparo y tener menos exposición al frío. Y, para no ser siempre los mismos los que están en el borde, se intercambian los lugares permanentemente, de afuera hacia adentro y de adentro hacia afuera.
¿Por qué crees que se juntan formando un círculo? ¿No sería lo mismo juntarse formando otra figura siendo que la cantidad de pingüinos es la misma?

6. a. El agua mineral Copahue viene en cajas de 15 botellas. Si tuvieras un restaurante, organiza la información para saber cuántas cajas necesitas de acuerdo a la cantidad de botellas que se pueden consumir.

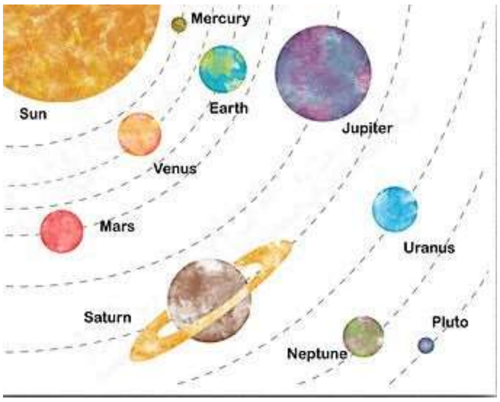
b. La soda Copahue viene en una caja más grande que contiene más de 15 botellas.
Sólo tenemos esta información:

Cajas					5	6		12
botellas					125	150		300

¿Puedes saber cuántas botellas hay en cada caja?

7. DISTANCIA DE LOS PLANETAS AL SOL. La distancia entre los planetas de nuestro Sistema Solar y el Sol varía de acuerdo a las órbitas de los planetas. La siguiente tabla nos muestra esas distancias:

planeta	Kilómetros
Mercurio	57 910 000
Venus	108 200 000
Tierra	146 600 000
Marte	227 940 000
Júpiter	778 330 000
Saturno	1 429 400 000
Urano	2 870 990 000
Neptuno	4 504 300 000



Esta imagen es una representación del Sistema Solar de un manual escolar. ¿Te parece fiel a la realidad? Justifica.

8. "Tengo una cinta, si la corto en trozos de 15 cm tengo 12 trozos." Complete la tabla:

Número de trozos	12		30	10		60		
Longitud de cada trozo (cm)		3 / 4			0,5		5/2	1,5

9. Gustavo quiere va a ir al cine con amigos. Como vive cerca del cine se ofreció para comprar las entradas. Todavía no sabe cuántos amigos van (le van a avisar a último momento), solo sabe que a lo sumo son 6. Para ver cuánto dinero tiene que llevar hizo la siguiente tabla:

entradas	1	2	4	6
pesos	320	640	1280	1920

Explica su razonamiento.

SEGUNDA PARTE

Observación: Recordar que los valores en las tablas no tienen que estar ordenados, y se pueden agregar todas las columnas necesarias para buscar información.

1. Completar las siguientes tablas explicando el procedimiento utilizado:

Kilos de harina	2	4	5	2,5	
Precio en pesos	160	320			1520

Cantidad de paquetes	5	8		10
Cantidad de caramelos	100		300	200

Cantidad de botellas		10		
Capacidad de la botella	¼ l		½ l	400 ml

(para envasar 20 litros de aceite de oliva)

Velocidad constante (km/h)	200	150	300	
Tiempo transcurrido (en min)	3		2	6

2. En la clase de Biología están haciendo un huerto. Quieren hacer plantines para llevarlos a la feria artesanal y venderlos. El profe tiene 16 cajas y les pregunta a los alumnos cuántos plantines podrán llevar sabiendo que cada caja contiene 35 plantas.
Denise resolvió el problema de la siguiente manera:

cajas	1	2	3	4	5	6	7	8	16
plantas	35	70	105	140	175	210	245	280	560

En cambio Tania lo resolvió como se muestra a continuación:

Cajas	1	2	4	8	16
plantas	35	70	140	280	560

Y Carla lo resolvió así:

cajas	1	10	2	6	16
plantas	35	350	70	210	560

a. Explica el procedimiento de cada alumno.
b. Piensa en otra manera de usar la tabla de razones para responder al problema.

3. En cada una de las siguientes tablas se muestran algunos precios de gaseosas según su cantidad. Una pertenece a un kiosco y la otra pertenece al supermercado. Las gaseosas son del mismo tipo y ninguno de los dos kioscos hace descuento.

Cant. de gaseosas	20	23	21	
Precio ($)	1820		1911	1638

Cant. de gaseosas	15	16	18	13
Precio ($)	1575	1680		

Completar las tablas en lo posible sin pasar por la unidad e indicar en cuál de los dos negocios conviene comprar. Si es necesario, agregar más columnas y buscar más valores en cada tabla.

4. Hay diversa maneras de completar las tablas de razones. Para las siguientes tablas, hallar el número que falta e indica la expresión que mejor describa tu procedimiento: **sumar… – restar… - multiplicar o dividir por 10 – multiplicar o dividir por 2 – multiplicar o dividir por cualquier constante:**

Metros de tela	1	10	9
pesos	520	5200	

Alquiler de moto por día	1	10	5
pesos	1480	14800	

Estampillas	1	2	4	40
pesos	125			

Botella de jugo	1	4
vasos	6	

5. Completar las tablas e indicar la velocidad promedio:
Hora de partida: 8:00hs de la mañana y hora de llegada: 9:30hs. Distancia recorrida 81 kilómetros.

km	.....	.....	.....	.....	.....
horas	.....	......	.....	.....	.....

Hora de partida: 9:05hs de la mañana y hora de llegada: 9:55hs. Distancia recorrida 30 km.

km	.....	.....	.....	.....	.....
horas	.....	......	.....	.....	.....

6. Ver qué regularidades se cumplen en las tablas anteriores. Hallar el valor de la constante de proporcionalidad en cada caso.

7. Para preparar 1 kg de dulce hacen falta 1 ¼ kg de fruta y 1 ½ kg de azúcar. Completa la siguiente tabla:

Cantidad de dulce (en kg)	1/4	1/2	1	1 ½	2	3	4
Cantidad de fruta (en kg)			1 ¼				
Cantidad de azúcar (en kg)			1 ½				

8. La primer tabla corresponde a una proporcionalidad directa y la segunda a una inversa (¿cómo se sabe?). Completarlas indicando las propiedades que se utilizaron para hacerlo:

x	50	25		300	
y	4		6		22

x	15	75		7,5
y	50		2	

9. En la casa de Lucas hay una garrafa que se usa sólo para una estufa. Completa la tabla, teniendo en cuenta que la estufa se mantiene siempre al mínimo:

Horas de uso por día	4	6	8	12	
Días que dura la garrafa	24	16			48

¿Qué significa la constante de proporcionalidad en esta situación?

10. Completar las siguientes tablas, decir si se trata de proporcionalidad directa, inversa o ninguna de las dos. Si es proporcionalidad, hallar la constante:

Número de porciones	1	5	8			14
Tazas de harina	2 ½			57 ½	30	

Distancia constante:

Velocidad (km/h)	100	80	70			40
Tiempo (h)	4 ½			6	7	

Velocidad (km/h)	100	20	50			120
Distancia (km)	27				36	

Altura de un niño (m)	0,50	0,90	1,23			1,75
Peso de ese niño (kg)	3 ½			8	20	

Tengo 20 kg de lavanda para envasar en bolsitas:

Capacidad de c/bolsita (ml)	200	250				100
Cantidad de bolsitas	400			20	40	

TERCERA PARTE

Resolver los siguientes problemas

1. Un avión que vuela a 648 km por hora, tarde 1 hora 20 minutos para unir dos ciudades.
a. ¿Cuánto tardará un helicóptero en recorrer el mismo camino a un promedio de 192 km / hora?
b. ¿Qué tipo de magnitudes se relacionan en este problema? Justifica.

2. Se dice que Thales de Mileto midió la altura de las pirámides de Egipto, basándose en el hecho de que las alturas de dos objetos son entre sí como las longitudes de sus sombras. Cómo calculó Thales la altura de la pirámide de Keops, sabiendo que el lado de la base tiene una longitud de 230 m, la sombra de la pirámide es de 85 m y la sombra de un bastón de 1,40 m de altura, a la misma hora es de 1,9 m.

3. Tres hermanos cuyas edades suman 24 años quieren repartirse 144 figuritas en forma proporcional a sus edades. Si la edad del mayor es igual a la suma de las edades de los otros dos, y el del medio duplica la edad del menor, ¿Cuántas figuritas le tocan a cada uno?

4. a. Analizar las siguientes fórmulas. Decir si las magnitudes que se relacionan son directa o inversamente proporcionales.
b. Graficarlas en un mismo gráfico dándole un valor a la constante en cada caso. Describir estos gráficos.
i) $F = m.a$ para $m = cte$ fuerza y aceleración.
ii) $V = e/t$ para $e = cte$ velocidad y tiempo.

iii) Pe = p/v para p = cte peso específico y volumen.
iv) Sup = b.h para b = cte superficie y altura.

5. Un automovilista parte de viaje con 60 litros de nafta en el tanque. En promedio gasta 1 litro de nafta por cada 8 kilómetros recorridos. ¿Hay proporcionalidad entre la cantidad de nafta contenida en el tanque y los kilómetros recorridos a ese promedio de velocidad? Justificar. Ayuda: armar una tabla y graficar.

POSIBLES SOLUCIONES Y COMENTARIOS (PARA EL DOCENTE)

PRIMERA PARTE

1. La respuesta a esta situación es que el razonamiento es incorrecto. Los caminos para llegar a esta conclusión pueden ser variados. Es obvio que se pensó que si se duplica la edad se debe duplicar la estatura (pensando que se trata de una proporcionalidad directa) lo cual es un error porque estas dos magnitudes no son proporcionales.
Se les puede sugerir a los alumnos que hagan una tabla, de esta manera se verá más claramente el error y el porqué de ese error:

Edad (años)	9	18	27
Estatura (metros)	1,23	2,46	¡¡3,69!!??

Si se cambia uno de los valores, por ejemplo poner 1,76 metros de altura para los 18 años, puede resultar correcta, pero esto no nos conduce a sacar ninguna otra conclusión ya que las dos magnitudes son independientes

2. Cuando se utilizan recetas de cocina adaptándolas a distintas cantidades de porciones estamos tratando con magnitudes directamente proporcionales. Pero la realidad nos conduce a que no siempre se puedan respetar estrictamente. Por ejemplo, esta receta es para 3 persona. Si queremos hacerla para 4 personas, una estrategia es pasar por la unidad, entonces a 120g de chocolate le corresponden 40g para una persona y 160g para 4. Lo mismo se puede hacer para las 9 cucharadas de crema y para las 3 cucharadas de licor de café. Pero, ¿qué hacemos con los huevos que no se pueden dividir en 3 para multiplicar por 4? En la realidad lo que se hace es buscar una cantidad aproximada, por ejemplo agregar 1 huevo más chico. Con el azúcar nos enfrentamos a un problema parecido, pero tiene una salida a una mejor aproximación. Hagamos una tabla, poniendo el dato que tenemos:

Cucharadas de azúcar	4	4:3=1,33	**5,33**
personas	3	1	**4**

Esto estaría totalmente correcto desde el punto de vista del cálculo. ¿Y en la cocina? ¿Pasa esto de poner 5,33 cucharadas de azúcar? Seguro que no. Entonces la respuesta correcta sería 5 cucharadas y una pizca más!

3. Es muy probable que los estudiantes cometan el error de pensar que porque se triplica el lado del cuadrado, también se triplique la cantidad de pintura y respondan que se necesitan 24ml. Pero no es esa la relación correcta entre magnitudes, ya que la cantidad de pintura cubre superficie (área), por lo tanto la relación que debemos buscar es entre cantidad de pintura y área a pintar, ahí se encuentra la proporcionalidad (directa). Para un cuadrado de 12cm de lado el área es 144cm^2 y para ello se necesitan 8ml de pintura. Para un cuadrado de 36cm de lado, cuya área es de 1296cm^2 se necesitan…
Podemos organizar la información en una tabla, escribiendo siempre primero la razón entre las dos magnitudes, eso va a ayudar a buscar el camino de la solución:

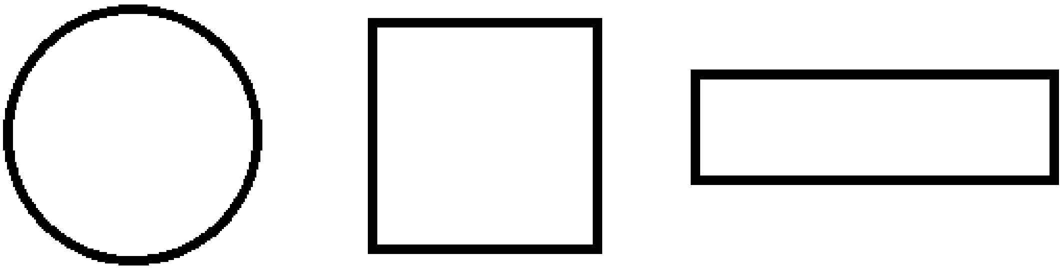
Área a pintar (cm^2)	144	1440	1440 – 144 = **1296**
Cantidad de pintura (ml)	8	80	80 – 8 = **72**

Por supuesto que se deben admitir otras estrategias de solución (esta puede ser una), pero la tabla ayuda a buscar relaciones sencillas, como por ejemplo multiplicar por 10 y, en este caso, al restar dos cantidades de una magnitud (que nos conviene porque así llegamos al valor de área que queremos) es comprensible que se deban restar las cantidades correspondientes en la otra magnitud.

4. Matemáticamente el razonamiento de Milly es correcto, porque se están comparando dos magnitudes (tiempo y perímetro o longitud) que serían proporcionales… ¡bajo cierta condición! La condición es que el ritmo de trabajo debería ser siempre el mismo, y eso en la realidad nunca se da, aunque esté cosiendo a máquina, porque el ritmo de la máquina lo pone la persona y es muy difícil que sea constante. Ni que hablar si la persona se suena la nariz, o va al baño, o la llaman por teléfono mientras está trabajando. Es importante pedirles a los estudiantes que hagan estas aclaraciones al margen de resolver los cálculos correctamente.
El cálculo que hizo Milly es que la longitud del borde del mantel es 6 veces la longitud del borde de la toalla, por lo tanto el tiempo requerido será 6 veces también.
Pero la realidad es que, si al coser el mantel, hay una pequeña diferencia de 1 minuto o 2 con respecto al cálculo matemático, no va a afectar en lo más mínimo.

5. La naturaleza es sabia, ¿no? Los pingüinos Se juntan formando un círculo porque, a igual superficie (la que cubren los pingüinos), el círculo es la figura que tiene menor perímetro, y justamente el perímetro (o el borde) es donde los pingüinos tienen mayor exposición al frío. Entonces, cuanto menor sea el perímetro mejor. Además de usar la estrategia de intercambiarse con los del interior para soportar mejor el frío.
Lo podemos ver mejor con un ejemplo. Tomemos un círculo, un cuadrado y un rectángulo que tenga la misma área (que sería la superficie que cubren los pingüinos) y calculemos el perímetro de cada figura:

El área es aproximadamente 28,274cm^{2}en cada figura



radio 3cm
perímetro 18,85cm

lado 5,317cm
perímetro 21,269cm

lados 2cm y 14,137cm
perímetro 32,274cm

Los valores son aproximados porque entra en juego el número irracional π.
Si los pingüinos se acomodaran en forma "alargada" (como podría ser el rectángulo) habría muchos más de ellos expuestos al frío.

6. a.

Cajas	1	2	3		5	6	10	12
botellas	15	30	45		75	90	150	180

b.

Cajas				**1**	5	6	2	12
botellas				**25**	125	150	50	300

7. La distancia representada de Mercurio al Sol en la imagen es de aproximadamente 3mm. Hagamos una tabla para comparar las distancias representadas con las reales:

	Mercurio	Neptuno
Distancia representada (mm)	3	**233**
Distancia real (km)	57 910 000	4 504 300 000

La distancia representada con respecto a la real es directamente proporcional (se denomina escala). El problema es que si se representa el Sistema Solar respetando las proporciones, probablemente no alcance el tamaño de la hoja para hacerlo. En este caso, buscamos un operador que nos lleve de 57 910 000 a 4 504 300 000 (dividiendo el segundo número por el primero). Luego multiplicamos a 3 por ese operador y obtenemos 233mm =23,3cm. Lo representado en la imagen es apenas una distancia de 4cm (casi 6 veces menor).

Otra actividad que se puede hacer es trabajar con los tamaños de los planetas (comparando las distancias reales con las de la representación). En este caso se verá que es más complejo todavía hacer una representación a escala. Ver www.gpdmatemática.org.ar/recursos en el aula/problemas secundario/Sistema Solar

8. Se sabe que con trozos de 15 centímetros se obtienen 12 trozos.

Es fácil notar que multiplicando 12 x 15 se obtiene la longitud total de la cinta, 180cm, y este valor va a ser siempre el mismo.
Entonces si conocemos el número de trozos basta con dividir la longitud total por ese número y se obtiene la longitud de cada trozo.
En cambio, si conocemos la longitud de cada trozo, también basta dividir la longitud total por esa longitud para obtener la cantidad de trozos.
Como consecuencia, al multiplicar cada valor de una de las magnitudes por su

Número de trozos	12	240	30	10	360	60	72	120
Longitud de cada trozo (cm)	15	3 / 4	6	18	0,5	3	5/2	1,5

correspondiente en la otra magnitud siempre va a dar el mismo número constante (180).

9. Gustavo puede haber hecho el siguiente razonamiento:

entradas	1	2	4	6
pesos	320	640	1280	1920

"Cada entrada cuesta $320. Si somos 2 es el doble. Si somos 4 vuelve a ser el doble. Si somos 6 es lo mismo que los valores para 2 y 4 personas juntas. Entonces sumo 640 + 1280 = 1920".

SEGUNDA PARTE

1.

Kilos de harina	2	4	5	2,5	**19**	**1**	**15**
Precio en pesos	160	320	**400**	**200**	1520	**80**	**1200**

Cabe aclarar que este camino de solución no es el único, y que los alumnos pueden seguir agregando todos los valores que sean necesarios a la tabla que los ayuden a solucionar el problema.
Las flechas indican las operaciones que se fueron haciendo.
No hace falta que los estudiantes sepan que se trata de una relación de proporcionalidad directa. Simplemente analizando el contexto se pueden deducir todas las operaciones.

Se les puede pedir a los estudiantes que identifiquen así las operaciones con flechas, lo cual va a facilitar el trabajo de corrección.

Este problema es similar al anterior. Se puede inferir que si se tienen 300 caramelos se van a necesitar 15 paquetes. Para hallar la cantidad de caramelos en 8 paquetes, se pueden buscar siempre diferentes caminos. Por ejemplo, se pueden calcular la cantidad de caramelos en 1 paquete, luego en 3 y por último sumar la cantidad de caramelos de 3 paquetes y de 5 paquetes para llegar a 8 paquetes.

Cantidad de paquetes	5	8	**15**	10	**1**	**3**
Cantidad de caramelos	100	**160**	300	200	**20**	**60**

Acá se tiene como dato que se quieren envasar 20 litros de aceite de oliva. Siempre apoyándonos en el contexto se puede ver cómo varían las magnitudes para que la capacidad de cada botella multiplicada por la cantidad de botellas siempre tiene que dar 20.

Cantidad de botellas	**80**	10	**40**	**20**
Capacidad de la botella	¼ l	**2**	½ l	400 ml

Es fácil reconocer que si la velocidad es constante, al ir al doble de velocidad se tardará la mitad de tiempo y viceversa.

Velocidad constante (km/h)	200	150	300	**100**
Tiempo transcurrido (en min)	3	**4**	2	6

2. Se tienen 16 cajas y cada caja contiene 35 plantas.
Denise resolvió el problema de la siguiente manera:

cajas	1	2	3	4	5	6	7	8	16
plantas	35	70	105	140	175	210	245	280	560

En cambio Tania lo resolvió como se muestra a continuación:

Cajas	1	2	4	8	16
plantas	35	70	140	280	560

Y Carla lo resolvió así:

cajas	1	10	2	6	16
plantas	35	350	70	210	560

a. Denise fue sumando de a 1 la cantidad de cajas hasta 8, lo mismo hizo con los plantines. En el último paso se dio cuenta que no hacía falta seguir de a uno porque para llegar a 16 buscaba el doble, lo mismo con las plantas. Tania fue multiplicando el número de cajas por 2 y lo mismo hizo con las plantas. Carla multiplicó por 10 a la unidad y su correspondiente, luego multiplicó por 2 a la unidad y su correspondiente, y a estos últimos valores los multiplicó por 3. Agrupo el 10 con el 6 para obtener 16 y lo mismo hizo con los valores que se correspondían.
b. Producción libre.

3. El siguiente no es el único camino.

Cant. de gaseosas	15	16	18	13	**5**	**10**	**6**	**3**
Precio ($)	1575	1680	**1790**	**1265**	**525**	**1050**	**630**	**215**

Cant. de gaseosas	20	23	21	**18**	**10**	**1**	**3**	**2**
Precio ($)	1820	**2093**	1911	1638	**910**	**91**	**273**	**182**

Para saber en cuál de los dos negocios conviene comprar basta comparar dos cantidades que coincidan (por ejemplo 10 gaseosas) y ver que el precio en la segunda tabla es menor.

4. sumar… o restar… – multiplicar o dividir por 10 – multiplicar o dividir por 2 – multiplicar o dividir por cualquier constante:

Restar

Metros de tela	1	10	9
pesos	520	5200	**4680**

Dividir por 2

Alquiler de moto por día	1	10	5
pesos	1480	14800	**7400**

Multiplicar por 2 y por 10

Estampillas	1	2	4	40
pesos	125	**250**	**500**	**5000**

Multiplicar

Botella de jugo	1	4
vasos	6	**24**

5. Hora de partida: 8:00hs de la mañana y hora de llegada: 9:30hs. Distancia recorrida 81 kilómetros.

km	**81**	**27**	**54**	…..	…..
horas	**1:30**	**0:30**	**1**	…..	…..

Velocidad: 54km/h

Hora de partida: 9:05hs de la mañana y hora de llegada: 9:55hs. Distancia recorrida 30 km.

km	**30**	**6**	**36**	…..	…..
horas	**0:50**	**0:10**	**1**	…..	…..

Velocidad 36km/h

6. Se les pide a los alumnos que analicen todas las tablas trabajadas hasta el momento. Las regularidades que van a encontrar los estudiantes, y que surgen de completar las tablas apoyándose en los contextos, son las siguientes: en algunas tablas se pueden sumar o restar cantidades de una magnitud a ese resultado le va a corresponder la suma o resta de las cantidades asociadas en la otra magnitud. Lo mismo si una cantidad se multiplica por una constante, su asociada quedará multiplicada por la misma constante. Asimismo, el cociente entre cantidades correspondientes va a ser siempre constante (constante de proporcionalidad). En todos estos casos decimos que se trata de magnitudes directamente proporcionales. Dado que las magnitudes son variables, esta es la oportunidad para que el docente, a través de preguntas en los distintos contextos, guíe a los estudiantes a establecer la relación entre las variables

encontrando la ley de formación o fórmula general (y/x = k, despejando y = k.x) que de aquí en más llamaremos función de proporcionalidad directa.
En otras tablas encontrarán otra regularidad: si una de las cantidades es multiplicada (o dividida) por una constante para obtener otra cantidad de la tabla, su correspondiente queda dividida (o multiplicada) por la misma constante. También, el producto de las cantidades correspondientes es siempre constante. En todos estos casos se trata de magnitudes inversamente proporcionales. Otra vez, dado que las magnitudes son variables, si y.x = k, y =k/x y así se obtiene la ley o fórmula de la función de proporcionalidad inversa.
Esta actividad se puede hacer de la siguiente manera: darles unos minutos para que discutan dentro de su grupo y luego se analiza en el frente, pasando un representante de cada grupo y los demás pueden intervenir y aportar. Se escriben todas las conclusiones en el pizarrón.

7. Para preparar 1 kg de dulce hacen falta 1 ¼ kg de fruta y 1 ½ kg de azúcar. Completa la siguiente tabla:

Cantidad de dulce (en kg)	1/4	1/2	1	1 ½	2	3	4
Cantidad de fruta (en kg)	**5/16**	**5/8**	1 ¼	**15/8**	**2 1/2**	**3 3/4**	**5**
Cantidad de azúcar (en kg)	**3/8**	**3/4**	1 ½	**9/4**	**3**	**9/2**	**6**

8. Al estar este problema en contexto matemático no se puede saber si es de proporcionalidad directa o inversa. Pero, el enunciado nos ayuda para determinarlo. Tener en cuenta que los valores en la tabla no necesariamente están ordenados.

x	50	25	**75**	300	**275**
y	4	**2**	6	**24**	22

x	15	75	**375**	7,5
y	50	**10**	2	**100**

Hay varios caminos para resolverlo. En este caso, en la primera tabla se dividió por 2, se multiplicó por 3, se multiplicó por 6 y se restó. En la segunda tabla, se multiplicó y dividió por 5 y se dividió y multiplicó por 10.

9.

Horas de uso por día	4	6	8	12	**2**
Días que dura la garrafa	24	16	**12**	**8**	48

En esta situación la constante de proporcionalidad significa la cantidad total de horas que dura la garrafa, en este caso es 96 horas.
En una situación real estos valores pueden fluctuar, especialmente cuando la garrafa se va terminando el rendimiento en horas no es el mismo.

10.

Número de porciones	1	5	8	**23**	**12**	14
Tazas de harina	2 ½	**12,5**	**20**	57 ½	30	**35**

Proporcionalidad directa. k = 2,5

Distancia constante:

Velocidad (km/h)	100	80	70	**75**	**64,,28**	40
Tiempo (h)	4 ½	**5,625**	**6,43**	6	7	**11,25**

Proporcionalidad inversa. k = 450

Velocidad (km/h)	100	20	50	**10**	**133,2**	120
Distancia (km)	27	**5,4**	**13,5**	**2,7**	36	**32,4**

Proporcionalidad directa. k = 3,70

Altura de un niño (m)	0,50	0,90	1,23			1,75
Peso de ese niño (kg)	3 ½			8	20	

No es proporcional.

Tengo 20 kg de lavanda para envasar en bolsitas:

Capacidad de c/bolsita (ml)	200	250	**50**	**4000**	**2000**	100
Cantidad de bolsitas	400	**320**	**1600**	20	40	**800**

Si bien se trata de una proporcionalidad inversa, hay que tener en cuenta que la magnitud peso no es proporcional ni equivalente a la magnitud capacidad. Se puede deducir de la tabla que la constante ES k = 80000, pero no se relaciona con el peso constante de LA lavanda (20kg) mientras no se sepa la densidad de la misma.

Se sugiere que todo este trabajo con tablas se realice y discuta en el grupo y que cada alumno tenga su producción individual. Dado que hay muchos caminos de resolución es interesante estar atentos a las discusiones grupales y hacer periódicamente puestas en común, discutiendo la validez o no de las distintas soluciones.

TERCERA PARTE

1. Un avión que vuela a 648 km por hora, tarde 1 hora 20 minutos para unir dos ciudades.
a. Este problema trata de magnitudes inversamente proporcionales. Hay que aclarar siempre algunas cuestiones referentes al contexto, por ejemplo en este caso, de que se trata de velocidades promedio o velocidades constantes.
Se puede resolver por varios caminos. Por ejemplo, si se sabe que se trata de magnitudes inversamente proporcionales sabemos que el producto de dos cantidades correspondientes es constante. En este caso 648km/h. 1,33h = 861,84km. Luego 861,84km: 192km/h = 4,49h (tiempo que tardará el helicóptero).
b. Si las magnitudes son constantes o promedio se puede pensar que al doble de velocidad se tardará la mitad de tiempo, por ejemplo.

2. Thales de Mileto trabajó con equivalencia de razones (entre sombras y objetos) lo que forma una proporción y por supuesto se trata de una proporcionalidad directa.
La altura original de la pirámide de Keops es de 146 metros. Hoy en día, por efectos de la erosión, mide 137 metros.

Si la sombra fue medida desde el lado de la base de la pirámide, hay que considerar 115 metros más hasta llegar al centro de la base propiamente dicha de la pirámide, o sea en total 200 metros. Con esos datos, podemos recurrir a una tabla, por ejemplo:

Altura (metros)	1,40	**146,6**
Sombra (metros)	1,91	200

Los caminos para llegar a los resultados son diversos. Se puede hallar la constante de proporcionalidad haciendo 1,91: 1,40. También se puede ver en cuánto aumento la sombra haciendo 200: 1,91 y luego multiplicar 1,40 por este operador.

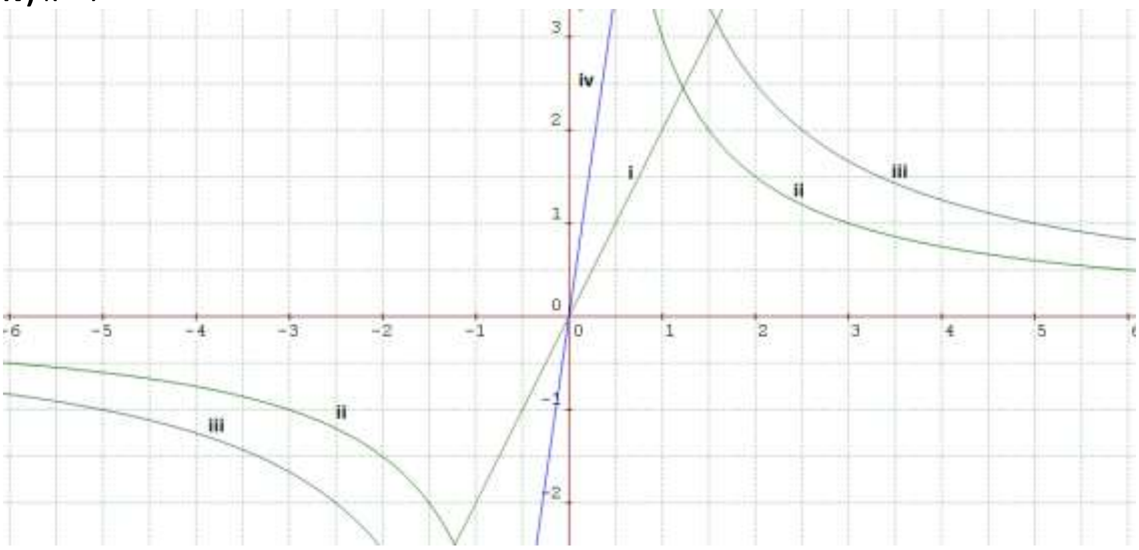
3.

x	y=2x	z=x+y	x+y+z
4	**8**	**12**	24
24	**48**	**72**	144

$x + y + z = 24$
$x + 2x + x + 2x = 24$
$6x = 24$
$x = 4$

4. a.
i) F = m.a para m = cte fuerza y aceleración. Directa.
ii) V = e/t para e = cte velocidad y tiempo. Inversa.
iii) Pe = p/v para p = cte peso específico y volumen. Inversa.
iv) Sup = b.h para b = cte superficie y altura. Directa.

b. i) k = 2
ii) k = 20
iii) k = 5
iv) k = 7



Los gráficos de las magnitudes directamente proporcionales son rectas que pasan por el origen. Las inversamente proporcionales son hipérbolas.

Hay que tener presente el contexto para decidir si las gráficas son discretas o continuas o si en su dominio e imagen corresponde que se grafiquen valores negativos.

5.

Distancia recorrida (km)	0	80	160	240	320	400	480
Cantidad de nafta en el tanque	60	50	40	30	20	10	0

En esta relación no hay proporcionalidad. Se puede comprobar en la tabla que no se cumplen propiedades de la proporcionalidad (directa o inversa). En el gráfico, no es ni una recta que pasa por el origen ni una hipérbola. La fórmula de esta función es
$Y = (-1/8).x + 60$

EVALUACIÓN

Proponemos esta actividad como evaluación de cierre de esta secuencia, pero la misma queda a criterio del docente.

Describir por lo menos tres fenómenos de la vida real que se comporten proporcionalmente (directa o inversamente) y uno que no lo sea. En cada ejemplo de proporcionalidad, armar la tabla de razones, encontrar la fórmula o ley y realizar el gráfico.

También queda a criterio del docente agregar más problemas para la práctica atendiendo a las necesidades del agrupamiento.
Asimismo, después de haber enfocado esta secuencia hacia la comprensión del concepto mismo de la proporcionalidad, se puede trabajar la definición de proporción, su cálculo algebraico y el Teorema fundamental de las proporciones, y extender este concepto a otros contenidos (razones, escala, porcentaje, barras de porcentaje, etc.) y también vinculándolos con otras disciplinas (Física, Química, Geografía, etc.).

Referencias

www.gpdmatemática.org.ar
Recursos en el aula/secundaria:
- Mirando televisión
- Pongámonos de acuerdo: ¿cuatro o seis?
- ¿Cuánto equipaje puedo llevar?
- Necesito hacer algunos arreglos en mi casa

- Los gigantes del bosque
- Veo veo
- Aprovechando los fractales en la enseñanza
- ¿Se ve así el Sistema Solar?
- Nos preparamos para ir de camping
- Las Mamushkas: ¿son proporcionales?
- Ficción y realidad

En Ideas para padres:

- PDF Tabla de Razones. Ana Castillo

En Publicaciones:

El razonamiento proporcional en alumnos de 7° grado con distintas experiencias curriculares. David Ben-Chaim, James Fey, William Fitzgerald, Catherine Benedetto y Jane Miller. 1998, *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 247-273. En Publicaciones de interés en www.gpdmatematica.org.ar

La Tabla de Razones La idea básica detrás de la tabla de razones es que se pueden generar razones equivalentes. J. Middleton y Marja van den Heuvel-Panhuizen. Traducción N. Da Valle y A. Bressan. Revisión Ma. F. Gallego (para uso interno del GPDM/ 2018). En Publicaciones de interés en www.gpdmatematica.org.ar

De la tabla de razones a la regla de tres simple, las proporciones y la función de proporcionalidad directa. Ana Bressan – GPDM En Publicaciones del GPDM en www.gpdmatematica.org.ar