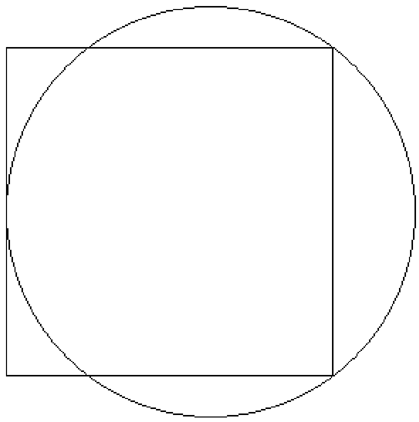
RELACIÓN ENTRE PERÍMETRO Y ÁREA DE UN CUADRADO Y UN CÍRCULO

Autoras: Adriana Rabino – Ana Bressan

Contenido: Relación perímetro – área.

I parte: Considerar distintos tamaños y posiciones relativas entre un cuadrado y un círculo dados, ¿cómo se relacionan sus perímetros y áreas?

1. Supongamos que el cuadrado y el círculo se encuentran en la siguiente posición relativa, como lo indica la figura:

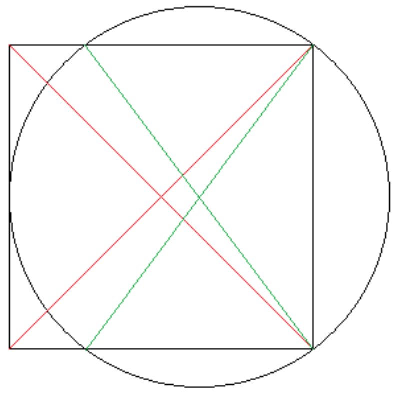


Se pide:

a. Determinar gráficamente el centro del cuadrado y el centro del círculo.
b. Determinar el cociente entre el lado del cuadrado (ℓ) y el radio del círculo (r).
c. Determinar si el perímetro del círculo (longitud de la circunferencia) es mayor o menor que el perímetro del cuadrado.
d. Determinar la relación entre la superficie del círculo y la del cuadrado.

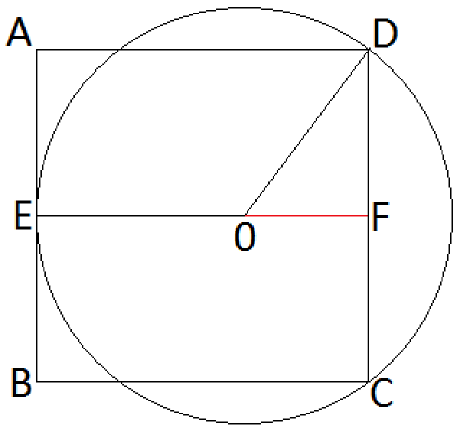
Soluciones

a. La intersección de las líneas rojas es el centro del cuadrado. La intersección de las líneas verdes es el centro de la circunferencia. Tuvimos en cuenta que todo ángulo recto inscripto en una circunferencia abarca un diámetro. La intersección de dos diámetros determina el centro de la circunferencia. La intersección de las diagonales del cuadrado determina su centro.



Para hallar el centro de la circunferencia también se pueden trazar las mediatrices de dos cuerdas.

b.



El punto O es el centro del círculo, EO = OD = r son dos radios del círculo y por Pitágoras tenemos que:

$OD^2 = OF^2 + DF^2$

que podemos reemplazar por:

$r^2 = (\ell - r)^2 + (\ell/2)^2$

cuya resolución da:

$\ell = 8\,r / 5$

En consecuencia

$\boldsymbol{\ell/r = 8/5}$

c. El perímetro del círculo (o sea la longitud de la circunferencia) es:

Perímetro circulo = $2\,\pi\,r \cong$ **6,2832 r**

El perímetro del cuadrado es:

Perímetro cuadrado = $4\,\ell = 4*8\,r/5 =$ **6,4 r**

En consecuencia el perímetro del círculo es menor que el perímetro del cuadrado.

d. La superficie del círculo es:

Área círculo = $\pi\,r^2 \cong$ **3,1416 r²**

Área cuadrado = $\ell^2 = (8\,r/5)^2 =$ **2,56 r²**

El cociente entre sus áreas es 1,22.

Conclusión: aunque el perímetro del círculo es menor que el del cuadrado, su superficie es mayor.

<u>**II parte.**</u> **Generalizando.** Buscar otras situaciones entre un cuadrado y un círculo en que el perímetro del círculo sea menor que el del cuadrado, pero que su área sea mayor.

¿Cuál es el límite para que se cumpla esta situación?

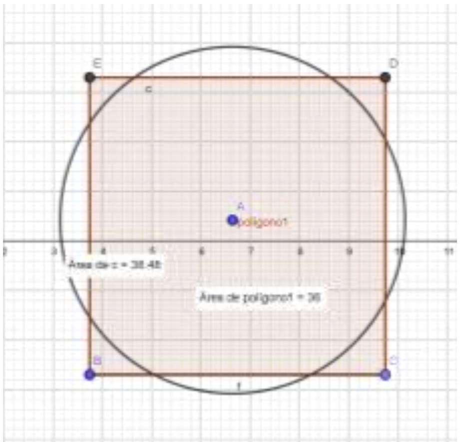
<u>Ayuda:</u> se facilita con algún software de geometría dinámica.

Posible solución:

Para que el perímetro del círculo sea menor que el perímetro del cuadrado se debe cumplir esta relación: $2.\pi.R < 4.\ L$ ó $R < 2.L/\pi$ ó $L > \pi.R/2$

Con la ayuda de Geogebra podemos dibujar un cuadrado cualquiera. Luego buscar una circunferencia que cumpla con alguna de las condiciones anteriores. Ver en qué posiciones relativas se pueden hallar las dos figuras.

Podemos usar cualquiera de las tres desigualdades. Por ejemplo, si elegimos la última, $L > \pi.R/2$, construir una circunferencia de radio R y luego calcular $\pi.R/2$ y construir un cuadrado cuyo lado sea mayor que este resultado. Mover el cuadrado sobre el círculo en distintas posiciones relativas y por último verificar que el área del círculo es mayor que el área del cuadrado.



En este ejemplo se buscó R = 3,5cm

$\pi.R/2 = 5{,}497787$cm debe ser menor que L

Se puede elegir L = 6cm

En este caso $P_{cuadrado}$ = 24cm > $P_{círculo\ =\ 21{,}99cm}$

Sin embargo, $A_{cuadrado}$ = 36cm^2 < $A_{círculo}$ = 38,48cm^2

El límite va a ser cuando ambos perímetros sean iguales (el círculo va a tener mayor área)

$2.\pi.R = 4.\ L$ ó $R = 2.L/\pi$ ó $L = \pi.R/2$, ya que cuando el círculo tenga mayor perímetro seguro que va a tener mayor área que el cuadrado.

En este caso en que R = 3,5cm, los perímetros miden 21,99cm y las áreas resultan: $A_{círculo}$ = 38,48cm^2 y el $A_{cuadrado}$ = 30,25cm^2.

Conjetura: de todas las figuras planas de igual perímetro, el círculo es la de mayor área

Esta conjetura hay que demostrarla para asegurar la veracidad de esta propiedad.

No es fácil en el sentido que si pensamos en TODAS las figuras planas, éstas incluyen polígonos (regulares o no, cóncavos o convexos) y otras figuras que pueden ser curvas o semicurvas.

Una forma experimental (que no sirve al momento de realizar una demostración rigurosa, pero se puede hacer con los estudiantes para que ellos mismos conjeturen) es pedirles que tomen un hilo y lo anuden a los extremos (esto sería el perímetro de cualquier figura) y que sobre una hoja cuadriculada traten de formar la figura que contenga en su interior la mayor cantidad de cuadraditos (se puede usar compensación entre áreas buscando mayor precisión). Observarán que tiende a formar un círculo. Al conocer la longitud del hilo se puede calcular el área del círculo y de otras figuras formadas con ese mismo perímetro.

Acotando las distintas figuras planas podemos pensar en **polígonos regulares** (siempre inscribibles en una circunferencia) y se puede demostrar que, a igual perímetro el círculo siempre tiene mayor área:

Perímetro polígono regular = n (número de lados) . L

Perímetro del círculo = $2.\pi$. R

Área polígono = perímetro . apotema /2

Área del círculo = π . R^2

Partimos de que $n \cdot L = 2.\pi \cdot R$

Queremos saber qué relación existe entre estas áreas:

$$\text{perímetro . apotema }/2 \quad ? \quad \pi \cdot R^2$$

Considerando los perímetros iguales entre el círculo y el polígono tenemos

$$2 \cdot \pi \cdot R \cdot \text{apotema}/2 \quad ? \quad \pi \cdot R^2$$

$$\text{apotema} \quad < \quad \text{Radio}$$

(por propiedad de triángulo rectángulo: el cateto es menor que la hipotenusa)

Por lo tanto el área del polígono regular es menor que el área del círculo.

<u>Extensión:</u>

Entre los rectángulos, el de mayor área es el cuadrado (éste estaría incluido en la demostración anterior con respecto al círculo). O sea que con esta demostración ya estarían contemplados todos los polígonos regulares y todos los rectángulos (por carácter transitivo, ya que el área del círculo es mayor que la del cuadrado de igual perímetro y la del cuadrado sería mayor que la del rectángulo de igual perímetro).

Perímetro rectángulo: $2b + 2h$
Perímetro cuadrado: $4 L$

Se sabe que cuadrado y rectángulo tienen igual perímetro
$4 L = 2b + 2h \Rightarrow L = (b+h)/2$

Comparando las áreas del rectángulo y el cuadrado

$$b.h \; ? \; L^2$$

$$b.h \; ? \; [(b+h)/2]^2$$

$$4\, b\, h \quad ? \quad b^2 + 2bh + h^2$$

Luego, $\boldsymbol{2\, b\, h \; < \; b^2 + h^2}$ **porque** $\boldsymbol{0 < (b - h)^2}$