El GeoGebra como soporte en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría

Adriana Rabino – Patricia Cuello

FUNDAMENTACIÓN

En los últimos años el eje Geometría fue perdiendo espacio en las aulas debido a varias causas. Entre ellas, podemos mencionar la pérdida del sentido de la geometría al trabajar problemas en contextos geométricos puros sin significado para los estudiantes. El trabajo en el aula quedó reducido a dar definiciones, clasificar, hacer algunas construcciones, y en algunos casos, establecer relaciones y propiedades.

Actualmente existe un interés creciente para retomar los contenidos de geometría en todos los niveles educativos. Para poner al día la práctica educativa, debemos realizar esfuerzos por incorporar nuevas tecnologías en el aula, con docentes informados y preparados para adaptar sus experiencias al trabajo con la computadora, donde los estudiantes sean participantes activos y constructivos, con recursos informáticos que permitan crear modelos, investigar y crear conjeturas acerca de distintos hechos o fenómenos, y en algunos casos llegar a demostrarlas.

Creemos que el abordaje de la geometría a través de programas dinámicos (como por ejemplo el GeoGebra) da la posibilidad a todos (expertos y no tanto) de manipular explícitamente los objetos, dar la posibilidad de "ver" y "controlar" aquello que se convierte en una propiedad matemática cuando se desplaza directamente con el mouse a algún punto de alguna figura u objeto matemático. Las propiedades que aparecen son la consecuencia de las propiedades que han sido utilizadas al momento de la creación de la figura. También es posible vivir las mismas experiencias que solo estaban reservadas para aquellos que tenían la suerte de poder "manipular y hacer que se movieran las figuras" mentalmente, aquellos de los que se decía "dotados" para la matemática.

Este tipo de programas permite hacer geometría de una manera muy particular: se puede *animar* una figura desplazándola o reformándola. Esta libertad de movimiento permite rebasar los límites impuestos por el papel y el lápiz.

PROPÓSITOS:

- Aprovechar el carácter dinámico del software para que los estudiantes analicen y saquen conjeturas de propiedades y establezcan elaciones geométricas.
- Promover, a través de la exploración y la experimentación con el GeoGebra, que los estudiantes construyan figuras geométricas a partir de sus propiedades y relaciones "reinventadas".

PALABRAS CLAVE: GeoGebra – geometría dinámica – visualización – herramienta – generalización - conjetura - problemas.

CONTENIDOS:

- Uso del software GeoGebra para enseñar contenidos de geometría tales como:
    - Lugares geométricos: mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, circunferencia.

- Transformaciones en el plano: simetría axial, simetría central, rotación y traslación.
- Teorema de Pitágoras.
- Elementos y propiedades de los cuadriláteros.

METODOLOGÍA:

La metodología de trabajo es de aula-taller.

Se comienza con actividades que permitan a los estudiantes familiarizarse con el programa explorando todas las opciones de los menús, acompañado de un instructivo para que les resulte más dinámica esta introducción. Luego se realizan algunas actividades de iniciación muy sencillas, como por ejemplo, *hallar el punto medio de un segmento* a través de distintos caminos. De esta manera, además de aprender a hacer las construcciones, aparecerán nuevos conceptos (objetos dependientes o independientes) que van a estar determinados por el camino elegido. O sea que las actividades 1 y 2 son de familiarización con el programa (que si ya lo conocen, se pueden obviar). A partir de allí se comienza a trabajar con lugares geométricos en donde se ve claramente la conveniencia del uso del programa, ya que permite visualizar y establecer relaciones, conjeturar propiedades y/o elaborar definiciones.

Luego de esto, se trabajan propiedades de los cuadriláteros y movimientos rígidos en el plano.

Es muy interesante la ventana "crear herramienta nueva", ya que permite ampliar el horizonte de las opciones propuestas en el programa.

Se aconseja tener en cuenta:

- Los conocimientos previos de los estudiantes.
- Fijar claramente los objetivos de la clase.
- Realizar un nuevo contrato con los alumnos: no se trata de realizar un dibujo sino una construcción, una figura que conserve sus propiedades cuando se desplazan los objetos de base. Luego, las concepciones de los estudiantes con respecto a la noción de figura como dibujo, se modifican.
- La existencia de otros códigos. Por ejemplo, aspectos funcionales (dependencia-independencia) o, por ejemplo, si se quiere trazar una perpendicular a una recta dada, no se realiza la construcción del ángulo recto, etc., sólo se debe mostrar la recta a la cual se quiere trazar la perpendicular y por el punto que debe pasar.
- Solicitar a los alumnos que anticipen (se imaginen) los resultados de sus acciones antes de efectuarlas.
- Llevar a discusión las producciones de los alumnos y sus explicaciones.

Los **recursos** necesarios son: instrumentos de geometría, papel y lápiz, acceso a la sala de computación o computadora personal que contenga el programa de GeoGebra.

Queda a criterio del docente, y de acuerdo al nivel de los estudiantes, trabajar toda la secuencia o que se haga una selección de contenidos. Por ejemplo, en algunos de los problemas se les pide que demuestren una propiedad. Este punto se puede obviar si el docente considera que los estudiantes no están preparados para ello.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN Y ACREDITACIÓN:

- Supervisión del historial de la tarea.
- Resolución de los trabajos prácticos.
- Evaluación final: entrega de un trabajo elaborado en la máquina, explicando los pasos seguidos para su resolución y dificultades encontradas.

Comentarios a las actividades propuestas.

Las actividades 1 y 2 son de familiarización con el software. En caso de conocerlo, se pueden obviar.

Conceptos a destacar:

- **Grados de libertad** de los tipos de punto (ventana 2): punto (se mueve en forma independiente); punto sobre objeto (se mueve solo sobre el objeto en cuestión); limitar/liberar punto (seleccionar un punto y sujetarlo a un objeto); punto de intersección (no se mueve); punto medio (no se mueve).
- **Objeto independiente**: si movemos ese objeto, solo se mueve él, ya que fue construido en forma independiente. Por ejemplo, si se construye una simetría axial empezando por la figura y el eje de simetría, tomando la distancia de cada punto significativo de la figura al eje, luego prolongando esa distancia al otro lado del eje, y marcando el punto homólogo a la misma distancia del eje (como se haría con papel y lápiz), al mover o transformar la figura original, la transformada no se mueve ni se transforma.
- **Objeto dependiente**: ese objeto se va a mover en función de otro. Tomando el mismo ejemplo anterior, si se construye la simetría axial a través de la opción (simetría axial), al mover o transformar la figura original, la transformada cambia también manteniendo siempre la simetría. Otro ejemplo: para usar el compás, se debe dibujar un segmento (radio) y un punto. Luego con el compás se traza una circunferencia con ese radio. Si se acorta o se alarga el segmento, la circunferencia se va a agrandar o achicar en función de ese radio.

Actividad 1

Familiarización con el programa

- Explorar las opciones de cada uno de los menús.

Algunas ayudas

- Activando una opción de un menú aparece el instructivo para su uso y si se aprieta la tecla F1 se obtiene la "ayuda en línea" con la explicación de su uso (cómo se usa y la ayuda en línea).
- Para desactivar una opción hay que activar el puntero. De no hacerlo, cada vez que se use el mousse, el programa va a repetir la acción de la opción activada.
- Términos nuevos: llama "objetos" a los conjuntos de puntos.

- Se puede solapar un elemento sobre otro sin convertirse en el mismo elemento (por ejemplo, puede haber varios puntos distintos sobre un mismo punto).
- Acciones nuevas: otorga la posibilidad de desplazar los objetos de base.
- Si se tiene un "punto sobre objeto" y se pulsa el botón de la derecha del mouse, aparece la opción "animación". Accionándolo, el punto se va a mover sobre el objeto.
- Si sobre cualquier objeto se pulsa el botón de la derecha del mouse, aparece la opción "rastro". Accionándolo, el objeto va a dejar un rastro cuando se mueva con el puntero.
- Herramientas: permite crear una nueva herramienta que no está en el programa. Por ejemplo, se quiere usar un cuadrado. Se construye el mismo partiendo de un segmento (objeto de entrada) y se llega al objeto de salida (cuadrado). Se cliquea "crear nueva herramienta" y aparecerá una ventana de diálogo. Esta herramienta queda entre las opciones, y toda vez que se necesite un cuadrado, dibujando el objeto de entrada (segmento) aparecerá el cuadrado deseado.
- Anular la última acción realizada: si se borró por error la figura, se puede recuperar eligiendo: Edita - Deshace.
- Borrar toda la figura: se puede borrar toda la figura de una sola vez: Edita - Seleccionar todo – edita - borrar.
- Nombrar los objetos: para nombrar un objeto, o para cambiar el nombre de un objeto, marcar con el puntero el objeto y apretar el botón de la derecha del mouse; aparecerá la opción "renombrar".
- Medir: distancia y longitud o ángulo. Para medir la distancia entre dos puntos elegir en el menú 9, la opción distancia y longitud, luego hay que cliquear dos puntos o crear el segmento. Para medir la amplitud de un ángulo, elegir la opción "ángulo" en el menú 9 luego hay que marcar el mismo cliqueando sobre uno de los lados, luego en el vértice y por último en el otro lado (en ese orden y en sentido antihorario).
- En la vista gráfica se trabaja geométricamente y en la vista algebraica aparecerán las coordenadas de todos los puntos y las ecuaciones de todas las rectas.
- En "edita", "propiedades del objeto" se les puede dar color, estilo, etc. a los objetos.

Actividad 2

Actividades de iniciación

A. Punto Medio

Determinar un segmento AB.
Determinar un punto K sobre el segmento AB.
Desplazar los puntos A, B o K y sacar conclusiones (usar el puntero del primer menú).
Determinar el punto medio M del segmento.

B. Paralelas

Determinar un punto D que no pertenezca al segmento AB.
Trazar la paralela a AB que pase por D.
Desplazar los punto A y D con el puntero y sacar conclusiones.

C. Paralelogramo

Borrar todo lo anterior y representar los puntos A, B y C (no alineados).

Construir un paralelogramo ABCD que se mantenga paralelo al desplazar los puntos A, B y C. Redefinir este polígono y ocultar las líneas auxiliares.

Medir los lados y los ángulos interiores del paralelogramo (recordar que para medir, hay que definir los segmentos que representan los lados y también definir los ángulos).

D. Circunferencia

a. Determinar una circunferencia con la opción "circunferencia" (centro, punto) (cliquear el centro y luego volver a cliquear cuando ya se logró el círculo deseado). Objeto independiente.

b. Si se quiere una circunferencia con un radio determinado, determinar el radio (segmento con la medida deseado), determinar el centro con un punto y con la opción "compás" trazar la circunferencia. Objeto dependiente.

E. Recta y circunferencia

Determinar dos puntos cualesquiera y denominarlos A y B.

Construir una circunferencia denominada C de centro A y radio AB.

Determinar una recta d que pase por el centro de la circunferencia y que no pase por B.

Desplazar A y luego B y observar si la recta d sigue pasando por el centro de la circunferencia. Si no es así, rehacer la construcción.

Nombrar R y S los puntos de intersección entre la circunferencia C y la recta d.

Construir la recta BS y marcar el punto medio M del segmento BS.

Determinar una recta que pase por M y que sea perpendicular AB.

Desplazar los puntos A y B, y luego los demás puntos. Observar lo que ocurre.

F. Rectángulo

Determinar una recta y marcar los puntos A y B en la misma.

Determinar un punto C exterior a la recta.

Trazar una recta perpendicular a AB que pase por C. Esta recta corta a AB en H.

Determinar la perpendicular a HC por C. Llamar d a esta recta.

Terminar el rectángulo de lado AB. Nombrar con S y T los otros dos vértices del rectángulo.

Trazar las diagonales del rectángulo y comprobar que son congruentes. Comprobar si se cortan en su punto medio.

Actividad 3

Lugares geométricos

A. Mediatriz

<u>Construcción 1</u>

Determinar:

Un segmento RS.

Una circunferencia de centro R que pase por S.

Una circunferencia de centro S que pase por R.

Una recta d que pase por la intersección de las dos circunferencias.

Esta recta se denomina **mediatriz** del segmento RS. Corroborar con la opción mediatriz.

Verificar la condición que cumplen los puntos de la mediatriz con respecto a los extremos del segmento.
Definir a la mediatriz como lugar geométrico.

<u>Construcción 2</u>
Determinar un segmento UT y marcar el punto medio I.
Determinar la perpendicular a UT que pasa por I.
Verificar con la opción "mediatriz" que efectivamente esta recta lo es.
¿Qué propiedades cumple la mediatriz de un segmento respecto a éste?
Demostrar (con papel y lápiz) la siguiente propiedad: *La mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo y lo interseca en el punto medio.*

B. Bisectriz
Determinar un ángulo cualquiera ABC.
Determinar una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y radio cualquiera.
Nombrar M y N la intersección de la circunferencia con los lados del ángulo.
Determinar dos circunferencias de igual radio y con centro en M y N.
Determinar la intersección de las dos circunferencias.
Trazar una semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que pase por los puntos de intersección. Denominarla b y pintarla (edita – propiedades del objeto).
Esta semirrecta se denomina bisectriz del ángulo ABC. Verificar con la opción bisectriz.
¿Qué propiedad se puede deducir? A partir de esta propiedad **definir** la bisectriz como lugar geométrico.
Esta semirrecta divide al ángulo ABC en dos ángulos. ¿Cómo son sus amplitudes? Verificarlo y luego **demostrarlo** con lápiz y papel.

<u>Actividad 4</u>
Segmentos congruentes
Representar un segmento congruente a otro. Para ello usar la opción compás (botón 6)
Y proceder de la misma manera que si se hiciera con regla y compás. Describir todos los pasos.

<u>Actividad 5</u>
Propiedad triangular
a. Determinar tres segmentos de diferente longitud y pintarlos de diferente color.
b. Con los tres segmentos construir un triángulo que tenga las longitudes de dichos segmentos por lados (por ejemplo, usando la opción compás).
c. Comparar geométricamente cada lado con los otros dos, respecto a la suma y a la diferencia, y sacar conclusiones.

<u>Actividad 6</u>
Puntos notables del triángulo
A. Circuncentro

Se llaman mediatrices de un triángulo a las mediatrices de sus lados.
a. Determinar un triángulo ABC y trazar sus mediatrices. Sacar conclusiones.
b. Desplazar los vértices. Anotar las conclusiones marcando con una cruz en el casillero correspondiente:

Intersección de las mediatrices en \pertenece a	lado	interior	exterior
Triángulo acutángulo			
Triángulo rectángulo			
Triángulo obtusángulo			

c. Llamar O al punto de intersección de las mediatrices (circuncentro).
d. Trazar una circunferencia con centro en O y que pase por uno de los vértices. ¿Qué características tiene esta circunferencia? Justificar.

B. Incentro
Se llaman bisectrices de un triángulo a las bisectrices de sus ángulos.
a. Determinar un triángulo ABC y trazar sus bisectrices. Sacar conclusiones.
b. Desplazar los vértices y anotar las conclusiones.
c. Llamar O al punto de intersección de las bisectrices (incentro).
d. Trazar una circunferencia con centro en O y que sea tangente a un lado del triángulo. ¿Qué características tiene esta circunferencia? Justificar.

C. Baricentro
a. Trazar una circunferencia C.
b. Marcar tres puntos R, S y T que pertenezcan a la circunferencia.
c. Dibujar el triángulo RST. Trazar las medianas (segmentos que unen cada vértice con el punto medio de lado opuesto). El punto de intersección de las medianas se denomina baricentro. Llamarlo B y ocultar las medianas.
d. ¿Qué pasa con el baricentro cuando desplazamos los puntos (vértices) sobre la circunferencia? (para ello con el botón de la derecha cliquear en el baricentro y elegir la opción "rastro y cliquear con la derecha uno de los vértices y elegir la opción "animación").
e. Probar que el baricentro es centro de gravedad del triángulo. Para ello, un modo podría ser:
Calcular las áreas de los tres triángulos RSB, RBT, STB. Mover un vértice y sacar conclusiones.

D. Ortocentro
Se denominan alturas de un triángulo a los segmentos perpendiculares a cada lado que contienen al vértice opuesto.
a. Dibujar un triángulo ABC y trazar sus alturas. Sacar conclusiones.
b. Desplazar los vértices. Anotar las conclusiones marcando con una cruz en el casillero correspondiente:

Intersección de las alturas en\perteneciente	lado	interior	Exterior
Triángulo acutángulo			
Triángulo rectángulo			
Triángulo obtusángulo			

Actividad 7

Geometría territorial (curvas de iso-distancias)

a. Se quiere establecer una zona de pesca que se encuentra entre 50 millas y 200 millas de la costa de la isla de Pascua (Rapa Nui).

Para ello se utiliza el siguiente método:

Se traza un segmento tangente a cualquier punto P de la costa. Luego se traza un segmento perpendicular PQ al primero por ese punto P y que mida 50 millas sobre el mar (en escala). Se dibujan circunferencias concéntricas en Q hasta que una de ellas "toca" a la costa. Luego se trazan circunferencias congruentes tangentes a toda la costa. De esta manera los centros de esas circunferencias irán determinando una misma distancia de 50 millas. En forma análoga proceder para 200 millas.

(No hace falta reproducir la isla. Se puede hacer una isla-modelo que puede tener cualquier forma geométrica similar).

b. Juan Sebastián tiene un perro rottweiler bastante agresivo. Lo quiere tener atado pero quiere darle cierto grado de libertad. Entonces fija un alambre en el suelo de 5 metros de largo y lo ata en forma móvil a ese alambre con una correa de un metro. Pero necesita saber cuál es la zona de movilidad porque la mamá quiere plantar césped a su alrededor. Encontrarla.

Actividad 8

Más problemas para resolver

A. Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo

Verificar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 2 rectos.

B. Propiedad de los ángulos exteriores de un triángulo

Verificar que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°.

C. Dados tres puntos trazar una circunferencia que pase por ellos (con opción correspondiente y luego utilizando lugares geométricos).

D. Triplicar un segmento dado de dos maneras diferentes.

E. Dado un ángulo, construir uno congruente con él.

F. Dados dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo, lo construimos. ¿Siempre es posible construirlo? Justificar.

Actividad 9
La relación pitagórica
a. Construir un triángulo rectángulo y verificar la relación pitagórica.
b. Construir un triángulo que no sea rectángulo y verificar si se cumple la relación.

Actividad 10
Cuadriláteros
A. a. ¿Qué cuadrilátero es posible obtener utilizando como diagonales dos segmentos bajo las siguientes condiciones? (apoyarse en las representaciones geométricas):

- Igual longitud que se corten en forma perpendicular o en forma oblicua (analizar todas las posibilidades pensando en donde se ubica el punto de intersección respecto de ambas diagonales).
- Distinta longitud que se corten en forma perpendicular o en forma oblicua (analizar todas las posibilidades pensando en dónde se ubica el punto de intersección respecto de ambas diagonales).

b. Organizar este análisis en un diagrama de árbol dibujando un representante en cada caso.
c. Elaborar todas las definiciones que se puedan de cuadriláteros a partir de este análisis.

B. Determinar un cuadrilátero con cuatro segmentos. Pedir el perímetro y el área. ¿Qué sucede?
Redefinir con la opción **Polígono** y pidamos nuevamente el perímetro y el área.
¿Qué sucede ahora?
Démosle color al perímetro y rellenemos el polígono.

C. Algunas construcciones
¿Son suficientes estas condiciones para hacer cada una de las construcciones siguientes? Si es así, construirlas:
a. Un paralelogramo dados dos lados y una diagonal.
b. Un rectángulo dados un lado y la diagonal.
c. Un paralelogramo dadas las dos diagonales y un lado.
d. Un cuadrado dadas las diagonales.
e. Un trapecio isósceles dadas las diagonales, el punto de intersección y un ángulo comprendido por ellas.

D. Propiedades de las bases medias
a. Dibujar un trapezoide. Traza sus bases medias. Ver dónde se intersectan las mismas. Desplazar los vértices con el puntero y saca conclusiones.
b. Verificar en qué cuadriláteros la base media es igual a la semisuma de los lados opuestos.

c. ¿Qué cuadriláteros se forman uniendo los extremos de las bases medias de cualquier cuadrilátero? Desplazar los vértices para conjeturar.
d. **Demostrar** la propiedad del punto c. con papel y lápiz. Ayuda: trazar las diagonales del cuadrilátero y utilizar la propiedad de las bases medias de los triángulos: *El segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de éste.*

E. Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono
Dibujar distintos cuadriláteros y verificar la suma de los ángulos interiores y de los exteriores. Sacar conclusiones.
Comparar con lo obtenido en el caso de los triángulos.

F. Bisectrices
Determinar tres puntos A, B y C no alineados. Determinar el paralelogramo ABCD. Redefinirlo y borrar las rectas auxiliares.
Determinar la bisectriz del ángulo A y la bisectriz del ángulo C (opuestos). ¿Qué se observa?
Al desplaza los puntos A, B y C, ¿qué pasa con las bisectrices?
Determinar la bisectriz del ángulo A y del ángulo D.
¿Qué se observa?

G. Cuadriláteros equivalentes
a. Determinar tres puntos A, B y C. Determinar el paralelogramo ABCD.
Determinar un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo anterior.
Explicar y justificar el procedimiento.
b. Determina un trapecio ABCD.
Determinar un paralelogramo que tenga igual área que ese trapecio.
Explicar y justificar el procedimiento.

H. Más problemas con cuadriláteros
Determinar:
a. Un paralelogramo ABCD. Medir sus lados, sus diagonales y sus ángulos.
¿Qué se puede decir de las diagonales y de los ángulos de un paralelogramo cualquiera?
b. Un paralelogramo que tenga un lado igual a una de sus diagonales.
c. Un segmento AB. Determinar un cuadrado de lado AB de dos formas distintas.
Al desplazar A o B debe seguir siendo un cuadrado.
d. Un segmento RS. Determinar un rombo de lado RS de dos formas distintas.
¿Qué propiedades del rombo se utilizaron?
e. Un romboide ABCD, de manera que se pueda desplazar el punto O (intersección de las diagonales) sobre AC.
f. Un romboide que tenga un lado del doble del otro. Explicar cómo se hizo.
g. Un romboide que tenga sus diagonales iguales. Desplazar los vértices de la figura de manera que el romboide tenga al menos un ángulo recto.

h) Dos puntos P y E. Construir un paralelogramo donde E es un vértice y P el punto de intersección de las diagonales.

Actividad 11
Más problemas
A. Sea AB un segmento y sea P un punto sobre él. Sean APC y PBD triángulos equiláteros uno a cada lado del segmento AB. Hallar el lugar geométrico del punto medio de CD a medida que P se mueve sobre AB (usar rastro y animación).

B. Sea ABCD un rombo tal que AC = 6 y BD = 8 (las unidades son arbitrarias). Sea M el punto medio de AB, N el de BC, O el de CD y P el de AD. Se trazan las circunferencias de centro D que pase por P, la circunferencia de centro C que pase por O, la circunferencia de centro B que pasa por N y la circunferencia de centro A que pasa por M. Así queda determinada una flor de 4 pétalos. Hallar el área y el perímetro de la flor.

Actividad 12
Transformaciones rígidas en el plano
A. Simetría axial
Notación: $S_e(F) = F'$
Para realizar la simetría axial de una figura, se necesita como dato un eje respecto al cual se hará la simetría de la misma.

Dibujar un triángulo ABC y una recta d.
Usar la opción "simetría axial" para construir la figura simétrica.
Denominar los vértices en la figura transformada A', B' y C'.
¿Qué características tienen ambas figuras? Comparar áreas y perímetros.
Unir los puntos homólogos y sacar todas las conclusiones.
Mover uno de los vértices y observar qué sucede con la figura transformada.
Construir una simetría axial en base a las observaciones hechas (sin usar la opción del programa).
Mover un vértice y observar qué sucede con la figura transformada. ¿Podrías explicar?
Simetría y mediatriz
Determinar:
- una recta AB y un punto P en la recta
- un punto R no perteneciente a la recta y hallar su simétrico R' respecto de la recta AB
- los segmentos PR y PR' y calcular sus longitudes.

Desplazar P sobre la recta. ¿Qué ocurre con las distancias calculadas?
Trazar el segmento RR'. ¿Qué representa la recta AB para el segmento RR'? Generalizar.
Encontrar el eje de simetría
Determinar:
- dos puntos A y B

- una recta d de tal manera que A y B sean simétricos con respecto a esa recta (apoyarse en el ejercicio anterior).

Circunferencia y simetría

Determinar una recta AB. Determinar dos puntos O y T exteriores a la misma.

Trazar la circunferencia de centro O que pase por T. Determinar un punto S sobre la circunferencia.

Determinar el simétrico S’ de S respecto de AB. Desplazar S y ver qué sucede con S’ (usar “rastro”).

¿Cómo se determina la simétrica de una circunferencia respecto de un eje?

B. Simetría central

Notación: $S_O(F) = F'$

Para realizar la simetría central de una figura, se necesita como referencia un punto, el centro de simetría, respecto al cual se realizará la simetría central de la misma.

Dibujar un polígono ABCD y un punto O (centro de la simetría).

Usar la opción “simetría central” para construir la figura simétrica.

Denominar los vértices en la figura transformada A’, B’, C’ y D’.

¿Qué características tienen ambas figuras? Sacar todas las conclusiones posibles comparando las dos figuras y sus relaciones con el punto O.

Mover uno de los vértices de ABCD y observar qué sucede con la figura transformada.

Construir una simetría central en base a las observaciones hechas (sin usar la opción del programa).

Mover un vértice y observar qué sucede con la figura transformada. ¿Podrías explicar?

Encontrar el centro de simetría

Determinar:

- dos puntos A y B
- encontrar un punto O que sea centro de simetría y transforme A en B.

C. Traslación

Notación: $T_v(F) = F'$

Para realizar la traslación de una figura, se necesita como referencia un vector, ya que el mismo nos indicará la distancia, la dirección y el sentido que se quiere trasladar la figura.

Representar un triángulo ABC y un vector MN con las opciones triángulo y vector del menú Rectas.

Determinar una recta paralela a MN que pase por A. Luego con la opción “compás” trazar una circunferencia de centro A y radio MN (para ello, elegir “compás”, hacer clic en el origen M del vector y luego en el extremo N. Esto es equivalente a mostrarle el segmento que determinará el radio). Luego señalar el punto A como centro y aparecerá la circunferencia de centro A y radio MN.

Señalar los puntos de intersección entre la recta que pasa por A y la circunferencia (son dos). Elegir como A' aquel que respete el sentido del vector. Se puede ocultar la circunferencia (ya que es un trazado auxiliar) con la opción "mostrar/ocultar objeto".
Repetir el procedimiento con los otros vértices del triángulo. Quedará así determinado el triángulo A´B´C´. Pintar el triángulo transformado (edita – propiedades de objeto).
Esta construcción se denomina "traslación". Verificarla con la opción "traslación". ¿Cómo son los lados y los ángulos del triángulo ABC y su transformada? Sacar conclusiones.

D. Rotación

Notación: $R_{(O,\alpha)}(F) = F'$

Para realizar una rotación, se necesitan como datos el centro de rotación y un ángulo orientado, que indicará cuánto se girará y en qué sentido. Un ángulo orientado está compuesto por su amplitud y el sentido, siendo, por convención, positivo (+) el sentido contrario a las agujas del reloj y negativo (-) en el mismo sentido que las agujas del reloj.

Dibujar un cuadrilátero ABCD.
Marcar un punto O (que será el centro de rotación) exterior al polígono**.**
Marcar un vértice del cuadrilátero (por ejemplo D), luego marcar O y luego elegir la opción "ángulo dada su amplitud", indicar amplitud y sentido del ángulo orientado. Aparecerá el punto rotado D´. Repetir el procedimiento con los otros vértices. Unir con la opción "polígono" todos los vértices transformados. Pintar el cuadrilátero transformado.
Elegir la opción "rotación" (mostrando el polígono, el centro e indicando el ángulo de rotación). Verificar que lo que se construyó anteriormente es una rotación $R_{(o,+120°)}$ (ABCD). ¿Cómo es ABCD respecto de A´B´C´D´?
A partir de esta construcción, explicar el procedimiento para realizar la rotación de una figura sin usar la opción del programa.

Composición de movimientos

La composición de movimientos es otro movimiento que combina dos o más transformaciones cualesquiera. Al decir combinados (o compuestos) se debe respetar la siguiente regla: primero se aplica uno de los dos movimientos y el segundo movimiento se debe aplicar al transformado del primero. Por ejemplo, si se quiere componer una simetría axial con una rotación a la figura ABC, se aplica la simetría axial $S_e(ABC) = A'B'C'$, y luego se aplica $R_{(O,\alpha)}(A'B'C') = A''B''C''$.
En el orden en que se dio el ejemplo, la notación es la siguiente:
$R_{(O,\alpha)} \circ S_e(ABC)=A''B''C''$

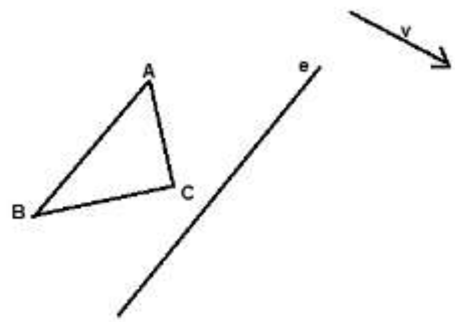
E. Composición de movimientos rígidos

a. Dibujar un triángulo ABC y trazar dos rectas en distintas posiciones relativas cada vez (paralelas o incidentes). Aplicar una composición de simetrías axiales al triángulo ABC. ¿Cómo se podría pasar de la primera figura a la última con un solo movimiento en cada caso? Explicar y comprobar con la opción correspondiente del programa.

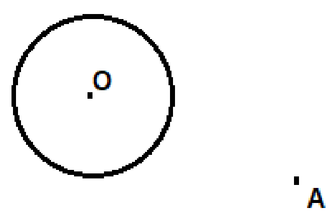
b. Realizar la composición de varias simetrías axiales con ejes paralelos (por lo menos 4 o 5) y sacar conclusiones. Usar alguna opción del programa para corroborar.

c. Componer los siguientes movimientos:

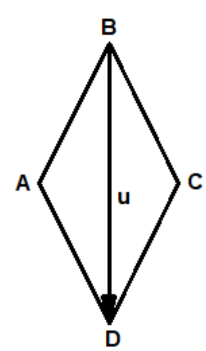
I. T_v **o** S_e (ABC)



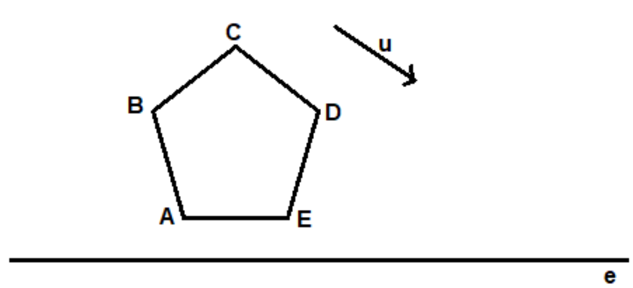
II. $R_{(A,\,-60°)}$ **o** S_A ($C_{(O,R)}$)



III. T_u **o** $R_{(D,+60°)}$(ABCD)



IV. S_e **o** T_u **o** S_{AE} (ABCDE)



Verificar, en todos los casos, si la composición de movimientos es conmutativa.

G.PARA PRACTICAR CREANDO NUEVAS HERRAMIENTAS

El software permite crear herramientas que no están en el programa. Por ejemplo, hay una opción que permite determinar "polígonos" en general, pero si se necesitan hacer cuadrados, hay que construirlos o crearlos como herramienta. Con la opción "crear nuevas herramientas", se puede crear el cuadrado y guardarlo. De esta manera ya se tiene para usarlo todas las veces que sea necesario sin tener que hacer todo el procedimiento cada vez.

Se procede de la siguiente manera: se dibuja el "objeto de entrada" (en este caso un segmento), se construye el cuadrado trazando perpendiculares en los extremos del segmento…., se redefine el cuadrado con la opción polígono. Cuando se logra el cuadrado, éste será el "objeto de salida". Optar por "herramientas", "crear nueva herramienta", aparece una ventana donde se identifica el objeto de salida (mostrar el cuadrado) y el de entrada (van a aparecer acá los dos extremos del segmento y si se quiere se puede agregar el segmento) y se le da nombre a la construcción. Y ya está. Importante: cuando se quiere utilizar una herramienta creada, al cliquearla la opción nos indica cuáles son los elementos de entrada que debemos tener, en este caso, punto-punto-segmento. Esos son los elementos que le debemos mostrar para que construya el cuadrado.

a. CREANDO HERRAMIENTAS

Crear las nuevas herramientas:
-"Cuadrado".
-"Triángulo equilátero".
-"Dividir un segmento en 3 partes iguales" (apoyarse en el Teorema de Thales para la construcción). En la construcción de esta nueva herramienta, el programa toma como objeto de entrada los dos extremos del segmento, el punto que se necesita para hacer la semirrecta y el segmento (si lo agregamos). Por lo tanto cuando se quiere utilizar esta herramienta se debe mostrar a la misma los extremos del segmento, el segmento y un punto (la opción nos dirá punto-punto-punto-segmento). Los objetos de salida son los dos puntos que dividen al segmento en tres partes iguales.

b. COPOS DE NIEVE (FRACTALES)

Para generar la secuencia del "copo de nieve", a partir de un triángulo equilátero hay que dividir en tres partes iguales cada uno de sus lados, y construir otros triángulos equiláteros

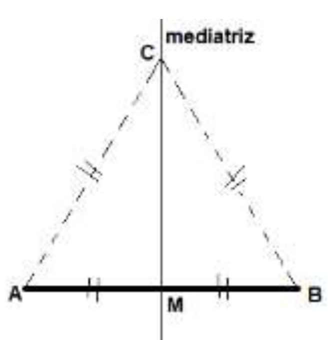
más pequeños en el tercio central de cada lado (hacia fuera). Así sucesivamente para todos los triángulos equiláteros que se van generando. Utilizar las herramientas creadas anteriormente.
a. Determinar la situación.
b. Realizar una tabla de valores en donde las variables sean las figuras generadas (0, 1, 2.....) y la longitud de cada lado de las nuevas figuras obtenidas, suponiendo que el triángulo equilátero original tiene longitud de lado 1 (figura 0).
c. Encontrar la fórmula y graficar.
d. Idem para los distintos perímetros.

Los "anticopos de nieve" se producen en forma análoga, pero poniendo hacia adentro los triángulos de cada tercio central del lado. En la construcción se muestran en sentido inverso los extremos del segmento.

La posibilidad de continuar el proceso de iteración iniciado en esta actividad, en forma infinita, dará idea de lo que los científicos hoy denominan "fractales" (del latín: *"frangere"*, romper).
El estudio de los fractales ha permitido interpretar muchos fenómenos de la naturaleza estudiados en otras disciplinas (formas de las nubes, distribución de galaxias, formas de las costas oceánicas, dinámicas de las burbujas, estructuras, ramas de los árboles, etc.) , tanto como han enriquecido la matemática misma (curvas de Peano, circunferencia de Apolonio, función de Cantor, etc.), siendo la computadora un instrumento facilitador prioritario para el conocimiento de esta rama del quehacer matemático.

¿Se pueden imaginar ahora que una planta de coliflor o de brócoli posee las propiedades de un fractal? Una condición importante de ellos es que cualquier parte del entero guarda similitud con el entero total.
(Extraído de "*Razones para enseñar geometría en la educación básica", de Ana Bressan y otros* (Ed. Novedades Educativas. 2000).

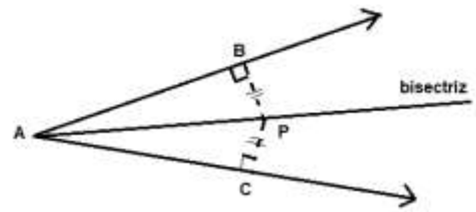
SOLUCIONES DE ALGUNOS PROBLEMAS
Actividad 3
A. Definición: La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Mismo?
Propiedad: La mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo y lo interseca en el punto medio.
Esta propiedad se puede verificar con las opciones "punto medio" y "perpendicular".
Para demostrarla se utiliza papel y lápiz y propiedades geométricas.
Demostración:



M es punto medio porque equidista de A y de B (por definición).

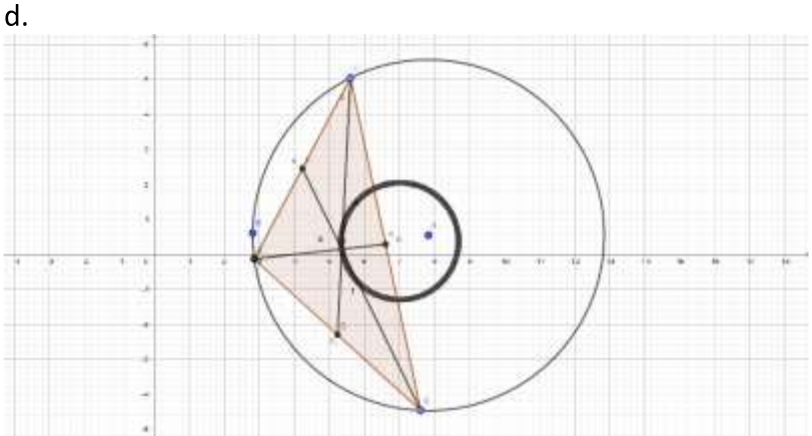
El triángulo ABC es isósceles (por definición). Luego MC es mediana de ABC y coincide con la altura de ABC respecto del lado AB. Por lo tanto es perpendicular a esa base.

B. Definición: La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de ese ángulo.
Propiedad: La bisectriz de un ángulo divide a éste en dos ángulos congruentes.
Se puede verificar esta propiedad midiendo los ángulos.
Demostración:



Los triángulos ABP y ACP son congruentes porque: BP y PC son congruentes (por definición), ambos tienen un ángulo recto (por definición) y comparten el lado opuesto al ángulo mayor. Por lo tanto los ángulos BPA y PAC son congruentes.

Actividad 6
Puntos notables del triángulo
A.
d. La circunferencia queda circunscripta al triángulo (o el triángulo queda inscripto en la circunferencia).
B. La circunferencia es tangente a los tres lados y el triángulo la circunscribe.
C.
d.



Actividad 7

a.

(Los radios de las circunferencias no están en escala. Se quiere que se comprenda el método).

b.

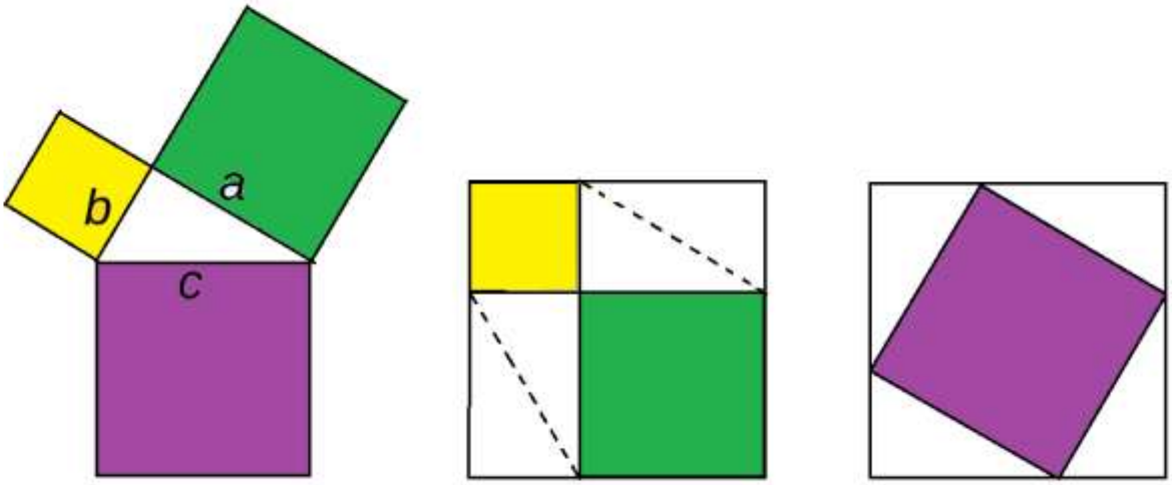
Actividad 8

C. Utilizar mediatrices de los segmentos que unen los puntos.

F. Sí. Se trata de uno de los casos de congruencia de triángulos.

Actividad 9

a. Hay muchísimas demostraciones del Teorema de Pitágoras (geométricas y algebraicas). Por ejemplo, ésta es una de las más conocidas (hay muchas más):



b. Para verificar si se cumple la relación pitagórica en un triángulo no rectángulo, se pueden dibujar cuadrados sobre cada uno de los lados, calcular sus áreas y verificar si alguna de ellas es la suma de las otras dos.

<u>Actividad 10</u>

A.

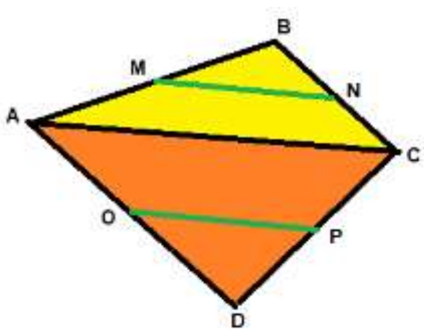
Diagonales

b.

c. Por ejemplo: "El cuadrado es un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes, perpendiculares y se cortan en su punto medio".

D.

d. El cuadrilátero que se forma al unir los puntos medios de los lados de un trapezoide cualquiera es un paralelogramo (Teorema de Varignon).

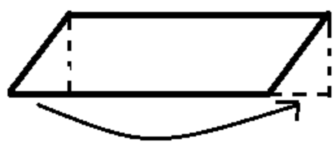


Demostración:
Trazar una de las diagonales del trapezoide ABCD. Éste queda dividido en dos triángulos. Trazar las

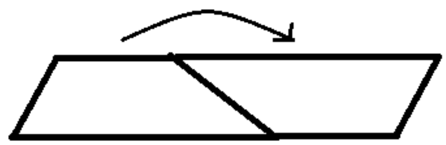
bases medias de los triángulos. Por propiedad, las bases medias son paralelas a la base del triángulo: MN // AC y OP // AC. Como la base es la misma para ambos triángulos, por carácter transitivo las dos bases medias son paralelas: MN // OP. Repetir el procedimiento con la otra diagonal y así queda determinado el paralelogramo.

G.

a.



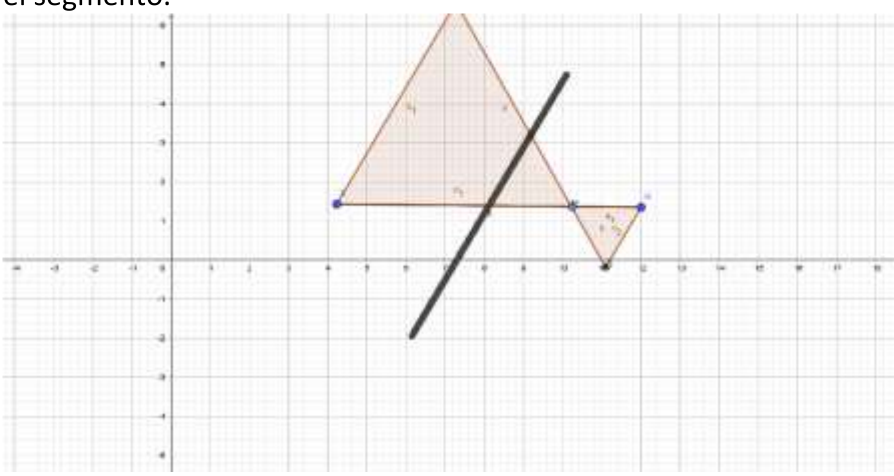
b.



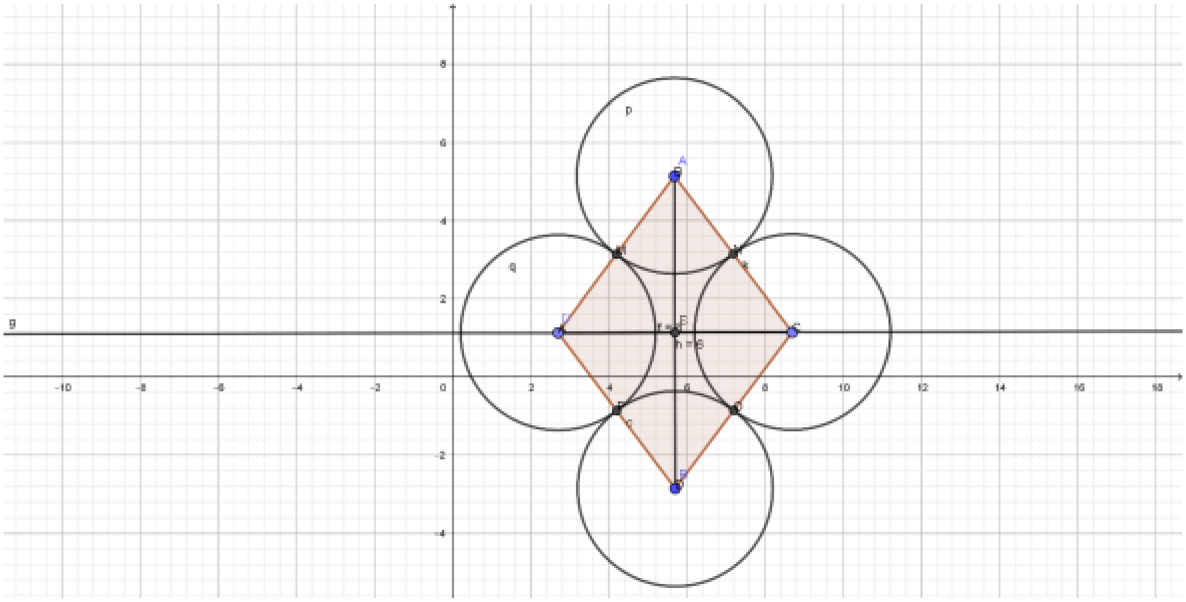
Actividad 11

A.

Es un segmento paralelo a un lado de cada uno de los triángulos. Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los vértices de ambos triángulos que no están contenidos en el segmento.



B.



Cada lado del rombo mide 5 unidades (por Pitágoras) por lo tanto el radio de cada circunferencia es de 2,5u. Calculando los ángulos del rombo y utilizando proporcionalidad se puede calcular el arco de cada circunferencia que forma el perímetro. Luego se multiplica por 4 y se obtiene el perímetro total. Con las áreas se realiza un trabajo análogo, conociendo los ángulos del rombo y utilizando proporcionalidad se puede calcular el área de cada sector circular, multiplicar por 4 y sumarle el área del rombo.

Actividad 12

Transformaciones rígidas en el plano

A. Simetría axial

Cuando se determina una simetría axial (o cualquier otra transformación rígida) con la opción que ofrece el programa, la figura transformada es dependiente de la original, por lo tanto al "mover" la original, la transformada se mueve de la misma manera. En cambio cuando se construye la simetría "paso a paso" no ocurre lo mismo ya que las dos figuras son independientes.

Simetría y mediatriz

Al mover el punto P sobre la recta, las distancias a los puntos R y R´ se mantienen constantes, y la recta es la mediatriz del segmento RR´.

Circunferencia y simetría

Para realizar la simétrica de una circunferencia solo se necesita hacer el simétrico del centro de la misma y conocer el radio.

B. Simetría central

Si se construye la simetría central (como se haría con lápiz y papel) la figura y su transformada son independientes, por lo tanto al "mover" la figura, la transformada no responde.

Para hallar el centro de simetría entre dos puntos, se deben unir los mismos y buscar el punto medio, para que el centro esté a la misma distancia de un punto y el otro.

D. Rotación
La figura original respecto a la transformada es congruente.
Como en los demás movimientos, al hacer la transformación "a mano" las figuras no son dependientes. En cambio sí lo son cuando se realiza la transformación con la opción correspondiente.

E. Composición de movimientos rígidos
a. Si la posición relativa entre los dos ejes es paralela, la composición de dos simetrías axiales es una traslación. Si la posición relativa es oblicua, la composición de simetrías axiales es una rotación cuyo centro es la intersección de los dos ejes y el ángulo de giro es el ángulo entre los dos ejes (su orientación dependerá del orden en que se hicieron las simetrías).
b. Si la cantidad de ejes paralelos es par se trata de una traslación y si es impar es una simetría axial.

ANEXO PARA EL DOCENTE

¿QUÉ ES LA GEOMETRÍA DINÁMICA?
Es un software actual basado en el desarrollo de modelos matemáticos que se remonta a muchos años atrás. Podemos considerar que los orígenes de la geometría dinámica se remontan a la antigua Grecia y a la Geometría árabe de la época medieval desde el momento en que los geómetras de estas épocas se dieron cuenta de que solamente con regla y compás no podían resolver muchos problemas como la trisección de un ángulo, la construcción de un heptágono regular, la cuadratura del círculo o la duplicación del cubo. Así, se idearon otros métodos geométricos para tratar de resolver problemas de este tipo. Los antiguos matemáticos crearon una gran cantidad de construcciones en las que, moviendo un segmento, una recta o incluso un grupo de elementos, se producía el efecto deseado. Cercano a nuestro tiempo podemos mencionar, como una intermediaria entre la geometría dinámica y los softwares, a la profesora Emma Castelnuovo, al proponer la construcción de "aparatos" para visualizar las propiedades en movimiento. Pero su método iba más allá, se trataba de utilizar objetos concretos y en movimiento y, a partir del uso y de la observación de estos, estimular la intuición del alumnado. Los estudiantes que manejaban y jugaban con objetos concretos eran llevados, afirmaba Emma, a formular hipótesis y a descubrir, por su cuenta, las propiedades geométricas propias de estos objetos. El aprendizaje tendría entonces un carácter intuitivo, natural y progresivo, y lo aprendido sería mejor interiorizado. Se promovería así un pensamiento crítico en el alumnado y, además, se impulsarían su creatividad e independencia.

Entonces, mientras que la noción de movimiento y cambio en figuras geométricas no es nueva, es el invento de sofisticadas tecnologías gráficas computarizadas lo que permitió expresar plenamente el concepto de geometría dinámica. De hecho, uno puede pensar respecto de la geometría dinámica como el reino de figuras ideales (geométricas) y construcciones que se pueden estirar, torcer y formar (virtualmente sin límites reales) sus relaciones geométricas mutuas.

Para llegar a los actuales Sistemas de Geometría Dinámica, hubo un hecho en el desarrollo de la computación de relevante importancia. En 1963, Ivan Sutherland (1938 -) desarrolló *Sketchpad: A man-machine graphical communication system*, el primer programa informático que permitía la manipulación directa de objetos gráficos. Después de tantos años, las ideas subyacentes en Sketchpad todavía influyen en la interacción entre computadoras y usuarios siendo de los primeros sistemas en utilizar una interfaz gráfica. Implementó el uso del lápiz óptico, predecesor del actual mouse permitiendo al usuario interactuar con los objetos presentes en la pantalla. Fue el precursor de muchas de las formas de interactuar con los ordenadores que hoy consideramos totalmente naturales tales como hacer clic en un botón para seleccionar un objeto visible o arrastrar para modificarlo. Sketchpad sentó las bases para el posterior desarrollo de los Sistemas de Geometría Dinámica.

Los primeros programas informáticos para Geometría Dinámica fueron*Cabri Geomètre* (francés presentado en 1988) y The Geometer's Sketchpad (norteamericano presentado en 1989 basado en Sketchpad). Posteriormente, muchos otros softwares de geometría dinámica han ido apareciendo ofreciendo distintas funcionalidades (GEONExT, Dr. Genius, Dr. Geo, Gambol, GeoGebra,...).
El principio básico del diseño de los sistemas de geometría dinámica es permitir la construcción de figuras geométricas partiendo de objetos básicos (puntos, líneas, rectas, segmentos, círculos, etc.) y relaciones (punto medio, perpendicular, paralela, etc.)...Se trabaja con mucho más que un dibujo, se trabaja con una categoría de dibujos, cada una de los cuales es un caso de una misma figura geométrica. Al mismo tiempo es una herramienta para la ***validación*** *de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta solo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de su construcción. En otras palabras, una propiedad geométrica es un invariante perceptual...Hasta cierto punto la evidencia del software ha eliminado la necesidad de demostrar....Transformar las herramientas conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear.* (Cambian los códigos. Se pueden trabajar problemas y experimentar situaciones que, sin la tecnología, no serían accesibles. Se puede adoptar un enfoque experimental que cambia la naturaleza del aprendizaje). *Existen problemas que probablemente empujarán a los alumnos a ir más allá de la experimentación y de la observación...El profesorado difícilmente sea capaz de introducir estas tecnologías en su práctica diaria si no está bien informado sobre todos los aspectos que pueden determinar su lugar y su papel preciso en un proceso didáctico. Afirmaría que los profesores deben conocer los entornos de aprendizaje informáticos desde un punto de vista didáctico....Los entornos informáticos plantean una dificultad intrínseca si se les compara con los entornos materiales clásicos, debido a la representación dinámica que exhiben y a su autonomía de acción. Estas características probablemente cambiarán las relaciones entre el profesor y su entorno de trabajo* (Balacheff).

El entorno computarizado dinámico constituye verdaderos laboratorios donde los estudiantes pueden jugar, investigar y aprender matemática. Permiten establecer relaciones y “jugar” con las propiedades geométricas conjeturando, generalizando y validando. La parte de construcción es la menos significativa y que menos se justifica para el uso de software.

Las siguientes son algunas de las características (**habilidades a desarrollar**) que se nutren de esos laboratorios:

Visualización

En general la visualización se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. Por lo tanto es un componente crucial en el aprendizaje de conceptos geométricos.

Los entornos dinámicos, no sólo habilitan a los estudiantes a construir figuras con ciertas propiedades y por ende visualizarlas, sino que también permite realizar transformaciones continuas en aquellas construcciones acordes a lo que el usuario decide. Este dinamismo contribuye además a la fortaleza de las experiencias visuales.

Experimentación

Mientras juegan con entornos tecnológicos los estudiantes aprenden a experimentar, y a apreciar la facilidad de obtener muchos ejemplos, mirar casos extremos, contraejemplos y evidencias no estereotipadas. La información obtenida a través de este camino es la base para establecer generalizaciones y conjeturas.

Muchos autores advierten sobre el peligro de este “inductivismo”. Muchos alumnos se contentan con obtener una buena acumulación de ejemplos empíricos como evidencia de una demostración de una proposición. La experimentación por sí sola puede no resultar suficiente, a pesar de que la cantidad de casos que se “barren” son infinitos.

Sorpresa

Las situaciones problemáticas deben ser diseñadas de tal manera que comprometan al estudiante.

Un tipo significativo de problema es requerir, a los mismos, predicciones de razonamiento de un cierto fenómeno en juego o cierta acción que tomen dentro del entorno tecnológico.

Feedback

El feedback directo es potencialmente más efectivo del que provee el docente, no solamente por su apuntalamiento efectivo (carente de juicio de valor) sino también porque provee de claves reales para revisar una predicción y repensar sobre la situación.

Necesidad de probar y demostrar

Después de la sorpresa, muchos estudiantes pueden preguntar “por qué”.

La demostración, que responde al “por qué”, debe nacer de la observación y de la re-visión del proceso de experimentación mismo. En otras palabras, la experimentación debería proveer la semilla para la argumentación que ayuda a demostrar una proposición. De esta manera con el entorno dinámico realmente se “cierra el círculo”, y de esta manera puede promover un aprendizaje significativo.

Conexiones intramatemática

Los estudiantes tienen la oportunidad de confrontar las situaciones geométricas con sus representaciones gráficas, de esta manera pueden entender la situación vía la representación, o viceversa.

Naturaleza de los objetos matemáticos

Mirando cómo un gráfico es creado en el tiempo real describiendo una situación de cambio frente a sus ojos, la tecnología tiene la potencialidad de hacer perceptible la idea de cambio y variación, rango y sus cualidades (crecimiento, extremos, etc.)
(Abraham Arcavi-Nurit Hadas)).

En la **selección de problemas** se deberían tener en cuenta problemas que:

- Tengan que validar una propiedad (se pueden considerar muchísimos caso que la cumplan).
- Tengan que aplicar una técnica recursiva "tediosa" (se facilita creando herramientas).
- Tengan que hallar o inventar un lugar geométrico (facilitando con el uso de "rastro" y "animación").
- Tengan que establecer relaciones geométricas.
- Sean de construcción.
- Sean de la realidad.

¿Es un sistema axiomático? ¿Es correcto decir que se pueden demostrar propiedades? Hay distintas opiniones al respecto.

En matemática las teorías se sustentan en supuestos, axiomas y teoremas que son los que la determinan.

Al tomar como punto de referencia un programa de geometría dinámica que ejecuta un conjunto de instrucciones, cada una con un conjunto finito de pasos (lo que permitiría conocer algunos resultados) es posible pensar que al combinar algunas de estas instrucciones se genere una teoría distinta. Por ejemplo, cuando se les solicita a los estudiantes que "copien un dibujo dado", al realizar la copia se debe tener en cuenta la génesis de construcción de la figura original y no el afán de reproducir la figura (tal que una se superponga perfectamente con la otra, como se haría con papel y lápiz). En esta postura de descubrir cómo fue creada la figura original (ahora serían objetos) nos encontramos con una nueva definición de lo que significa una copia, por ejemplo podríamos decir: "la copia de una figura (objeto) dada es igual a ésta cuando cada una es una familia de figuras y siempre se puede encontrar una de una familia que se superponga con una de la otra familia".

Entonces es necesario entrar a establecer las condiciones para que pueda definirse un cuerpo de estudio sólido, en el que aparezcan nuevos elementos que exploten el potencial de sus bases para consolidar resultados válidos en la comunidad matemática. Además, aparecen supuestos acerca de que el programa tiene otros usos, no excluyentes.

Veamos algunas opiniones:

Opinión de Carmen Samper (profesora de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia):
La geometría dinámica ha sido diseñada para apoyar el aprendizaje de la geometría, como herramienta de mediación semiótica. Debido a esa intención, los creadores de los software de geometría dinámica buscaron que se satisficiera la mayor parte de los postulados de la geometría euclidiana, pues el papel de la geometría dinámica en el aprendizaje es que se evidencien las dependencias entre propiedades de figuras geométricas, que obedezcan los postulados y puedan, por ello, traducirse a un teorema del sistema axiomático que se está construyendo. Pero, para establecer como teorema algo se debe estar seguros de que las dependencias visualizadas no dependen de la representación que se está analizando. Para ello es que el dinamismo es importante, pues es posible estudiar un sin número de ejemplos en un tiempo determinado. Pero al introducir el dinamismo, se afectan algunos supuestos de la geometría euclidiana como: un punto ocupa un lugar (en GeoGebra u otros se pueden tener varios puntos en el mismo sitio), las rectas se extienden indefinidamente. Es decir, el modelo que ofrece la geometría dinámica de la geometría plana difiere del modelo que establecen los postulados. Es por ello, que los estudiantes tienen que saber interpretar lo que descubren con la geometría dinámica en términos de los postulados que se han establecido en el sistema axiomático que se está trabajando.

Opinión de Martín Acosta G. (Doctor en Matemáticas e Informática - Doctor en Ciencias de la Educación - Profesor, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá):
Los axiomas forman parte de una organización teórica de la geometría que permite estructurar de manera económica todo el conocimiento. Su función no es la construcción ni la producción de dibujos. El objetivo de la geometría dinámica es la representación de objetos y propiedades geométricas que respeten ciertas características, acordes con un modelo (o varios) de la geometría. No es la estructuración teórica de la geometría. Así que podemos decir que la geometría dinámica no tiene en si misma axiomas y teoremas. Sin embargo, es posible realizar un esfuerzo de sistematización del conocimiento geométrico producido a partir de la experimentación con un software de geometría dinámica, y en ese caso será posible (¿y necesario?) escoger los axiomas de base. Esto supone una distinción: la estructura teórica que queremos producir debe poderse traducir fácilmente en el sistema de representación del software (¿o no?) es decir, esa estructura teórica ¿debe reflejar la posibilidad de desplazamiento, de superposición de objetos etc.? Esa es una decisión arbitraria o de conveniencia. Ahora bien, por otra parte existe el problema teórico de estudiar la geometría dinámica, en ese caso, de describir matemáticamente los objetos geométricos dinámicos y sus relaciones. Este problema es diferente, aunque está relacionado con el anterior. Resumiendo, pienso que los axiomas son algo que imponemos desde afuera a la geometría dinámica para estructurarla teóricamente, y por lo tanto son arbitrarios. Sin embargo, podemos tratar de hacerlos lo más cercanos posible a los objetos del software, sin que dejen de ser algo que nosotros agregamos al programa.

Opinión de Leonor Camargo (Doctora en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, España. Profesora titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pedagógica Nacional de Colombia):
El programa de geometría dinámica se diseñó específicamente con un interés didáctico. Es decir, no se tenía la intención de proponer una nueva geometría, sino de tener un recurso para modelar la geometría euclidiana, la geometría proyectiva (porque tiene puntos de intersección de rectas en el infinito) y aún geometrías no euclidianas. Decisiones como la de poder construir puntos sobre puntos, o admitir que tres puntos colineales puedan formar un triángulo, obedecen a dar preferencia a situaciones de continuidad del movimiento de los objetos, para favorecer la exploración, que a imaginarse una "nueva geometría". Claro que alguien podría, con un interés matemático, construir el conjunto de axiomas de la geometría dinámica, imaginando que dichos axiomas son las acciones básicas de construcción que trae el programa, pero esto no fue el interés de los Laborde (creadores del Cabrí).

La discusión sigue abierta, pero creemos que, más que generar una nueva geometría (modelo de un sistema axiomático), la geometría dinámica es una herramienta muy poderosa que facilita el camino geométrico y algebraico para establecer relaciones, conjeturar propiedades dentro de la geometría euclidiana (o no) y aprovechar ventajas como, entre otras, ver el “barrido” de infinitos casos (cuestión imposible de lograr con papel y lápiz).

REFERENCIAS

- ACOSTA, Martín. (2005). “*Geometría Dinámica. Exploración y demostración*”. En: I Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
- ARENAS, Jesús (1998).*Geometría y Experiencias*. Ed. Addison Longman.
- BALACHEFF, Nicolás (2000). *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas.* En Gorgorió, N.; Deulofeu, J. Y Bishop, A. (coords.) Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona: Editorial GRAO.
- BRESSAN, Ana María y otros (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Ed. Novedades Educativas, Argentina.
- BRESSAN, Ana María y otros (2003). *Enseñar Geometría*. Ed. Styrka, Uruguay.
- CASTELNUOVO, Emma (1970). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Ed. Trillas.
- DÍAZ BARRIGA, Eugenio (2006). *Geometría Dinámica con Cabrí-Geometre*. Ed. Kali.
- FAYÓ, Alicia y FAYÓ María Cristina (2001). *Cabrí-Classe* II (Metodología para el aprendizaje de la Geometría con Cabrí-Geometre II). Ed. Look Impresiones.
- KINDT, MARTÍN (1999). *Geometry: classical topics and new applications*. En Geometry with Applications and Proofs. Dutch Design in Mathematics Education. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-860-2_2

- KINDT, MARTIN y otros (1996). *Curriculum changes in the secondary school. Freudenthal Institute.* Capítulo 9: Promoting changes in the Curriculum by means of Dynamic Technologies. (Abraham Arcavi-Nurit Hadas). Department of Science-Weizmann Institute of Science-Rehovot-Israel).
- LABORDE, JEAN MARIE (1999). *Technology Empowering teachers: some Snapshots from Cabri-Geometre*. MathEduc.
- LIMA DÍAZ, ISAAC y DUEÑAS, MARÍA FERNANDA (2007). *Geometría GDT. Estudio Dinámico del Trilado.* Club de Matemática Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).